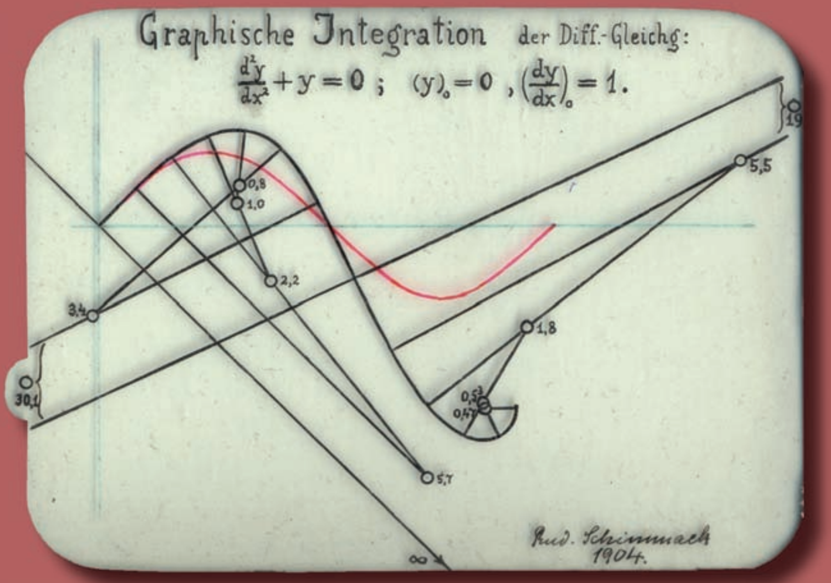
Ina Kersten

# Gewöhnliche Differenzialgleichungen

## Ein Einstieg




Universitätsdrucke Göttingen

Ina Kersten

Gewöhnliche Differenzialgleichungen

erschienen in der Reihe der Universitätsdrucke
im Universitätsverlag Göttingen 2015

Ina Kersten

# Gewöhnliche Differenzialgleichungen

## Ein Einstieg

Universitätsverlag Göttingen
2015

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

*Anschrift der Autorin*
Ina Kersten
Mathematisches Institut
der Georg-August-Universität Göttingen
Bunsenstraße 3-5
37073 Göttingen
kersten@uni-math.gwdg.de



Satz und Layout: Ina Kersten
Umschlaggestaltung: Petra Lepschy
Titelabbildung: Rudolf Schimmack
Grafiken: Sven Jäger
Grafiken auf den Seiten 56, 74, 82 und 98 von Julia Bienert
Grafiken auf den Seiten 10, 11, 12, 13 unten und 42 von Ben Müller und Christian Kierdorf aus früheren Drucken

Dias von Rudolf Schimmack aus der Dia-Sammlung des Mathematischen Instituts der Universität Göttingen:
Eingescannt von Anja Sattelmacher und bearbeitet von Sven Wiese
http://modellsammlung.uni-goettingen.de/


http://univerlag.uni-goettingen.de
ISBN: 978-3-86395-221-1

# Vorwort

Dieser Universitätsdruck ist aus Vorlesungen über gewöhnliche Differenzialgleichungen entstanden, die ich seit 2009 dreimal gehalten habe, davon zweimal für Lehramtsstudierende. Im Sommersemester 2014 wurden die einzelnen Kapitel des vorliegenden Bandes jeweils nach den Vorlesungsstunden ausgeteilt, um die Darstellung zu testen. Weil aber Vorlesungsstunden durch Feiertage ausfielen, habe ich den Stoff nach Ende der Vorlesungszeit noch ergänzt, und zwar um die Abschnitte 7.7 Legendre-DGL, 9.4 Autonome $2 \times 2$-Systeme, 10.7 Numerische Verfahren und 10.8 Abhängigkeitssätze. Die Legendre-DGL fand ich dabei so interessant, dass der Abschnitt 7.7 etwas länger ausgefallen ist.
Vorlesungsbegleitend gab es 48 Übungsaufgaben, wobei die Aufgaben mit dem Zusatz „Zur Wiederholung“ Präsenzaufgaben waren.

Ein herzlicher Dank geht an Dr. Oscar Marmon für das sorgfältige Korrekturlesen, etliche Verbesserungsvorschläge und das Beisteuern von Übungsaufgaben sowie an den Studierenden Sven Jäger, der die meisten der Grafiken, zum Teil auch mit Erläuterungen, erstellt und einen Beitrag zum Titelbild von R. Schimmack geschrieben hat, vgl. Abschnitt 3.6. Vielen weiteren Personen möchte ich herzlich für ihre Unterstützung danken, insbesondere Julia Bienert, Julia Brandes PhD und den Hilfskräften Jan Malec, David Recio Mitter, Carolin Wagner sowie den Teilnehmenden an der Vorlesung für ihre aktive Mitarbeit.

Juni 2015 *Ina Kersten*

Apparat zur Integration der Riccati-Differenzialgleichung aus der Göttinger Sammlung mathematischer Modelle und Instrumente (Modell 564, Foto: Sven Wiese)

# Symbolverzeichnis

| | |
|---|---|
| $A := B$ | $A$ ist definitionsgemäß gleich $B$ |
| $\Longrightarrow$ | folgt |
| $\Longleftrightarrow$ | genau dann, wenn |
| $\setminus$ | ohne |
| $\square$ | Ende des Beweises |
| $\lvert M\rvert$ | Anzahl der Elemente einer Menge $M$ |
| $\emptyset$ | leere Menge (besitzt kein Element) |
| $m \in M$ | $m$ ist Element der Menge $M$ |
| $M \subset N$ | $M$ ist Teilmenge von $N$ (d.h. $m \in M \implies m \in N$) |
| $\infty$ | Zeichen für „unendlich“ |
| $a \leqslant b$ | $a$ ist kleiner oder gleich $b$ |
| $a < b$ | $a$ ist kleiner als $b$ |
| $\lvert\ \rvert$ | Betrag |
| $\lVert\ \rVert$ | Norm |
| $\vec{a}$ | Vektor $a$ |
| $\vec{0}$ | Nullvektor |

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ Ring der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$ Körper der rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$ Körper der reellen Zahlen, $I$ Intervall in $\mathbb{R}$
$\mathbb{R}_{>a} := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ für festes $a \in \mathbb{R}$, analog $\mathbb{R}_{<a}$, $\mathbb{R}_{\geqslant a}$, $\mathbb{R}_{\leqslant a}$ und $\mathbb{R}_{\neq a}$
$[a, b[ := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ halboffenes Intervall mit $a, b \in \mathbb{R}$ (oder $b = \infty$)
$]a, b[ := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ offenes Intervall mit $a, b \in \mathbb{R}$ (oder $\mp\infty$)
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ abgeschlossenes Intervall mit $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$
$\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ Ring der $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{R}$
$\pi$ Kreiszahl $\approx 3{,}141592653$

$\frac{df}{dx}$, $f'$ Ableitung, $\frac{\partial f}{\partial x}$ partielle Ableitung, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ Ableitung nach der Zeit $t$
$F(x)\big|_a^b := F(b) - F(a)$

$\mathbb{C}$ Körper der komplexen Zahlen
$i$ imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$
$\Re(z)$ und $\Im(z)$ Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl $z$

### Das griechische Alphabet

A $\alpha$ Alpha, B $\beta$ Beta, $\Gamma$ $\gamma$ Gamma, $\Delta$ $\delta$ Delta, E $\varepsilon$ Epsilon, Z $\zeta$ Zeta, H $\eta$ Eta, $\Theta$ $\theta$ Theta, I $\iota$ Jota, K $\kappa$ Kappa, $\Lambda$ $\lambda$ Lambda, M $\mu$ My, N $\nu$ Ny, $\Xi$ $\xi$ Xi, O $o$ Omikron, $\Pi$ $\pi$ Pi, P $\rho$ Rho, $\Sigma$ $\sigma$ Sigma, T $\tau$ Tau, $\Upsilon$ $\upsilon$ Ypsilon, $\Phi$ $\varphi$ Phi, X $\chi$ Chi, $\Psi$ $\psi$ Psi, $\Omega$ $\omega$ Omega

# Inhaltsverzeichnis

# Grundlagen

## 1 Einige elementare Funktionen

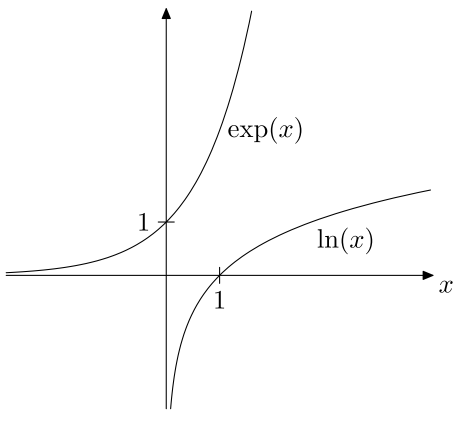
### Die Exponentialfunktion und der natürliche Logarithmus

Die *Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0},\ x \mapsto \exp(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ist streng monoton wachsend. Ihre Umkehrfunktion $\ln\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$ heißt *natürlicher Logarithmus.* Es gelten die *Funktionalgleichungen*

(1) $\qquad \exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y) \quad$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$

(2) $\qquad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad$ für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$

Es ist $e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ die Euler*sche Zahl*, $e \approx 2{,}718281828$. Es gilt $\exp(0) = 1 = e^0$ und $\ln(1) = 0$ sowie $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$.




Wie aus (1) folgt, gilt $\exp(n) = e^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man schreibt daher häufig auch $e^x$ statt $\exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es ist dann

$$(1') \qquad e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

Da ln die Umkehrfunktion von exp ist, gelten die *Umkehrbeziehungen*

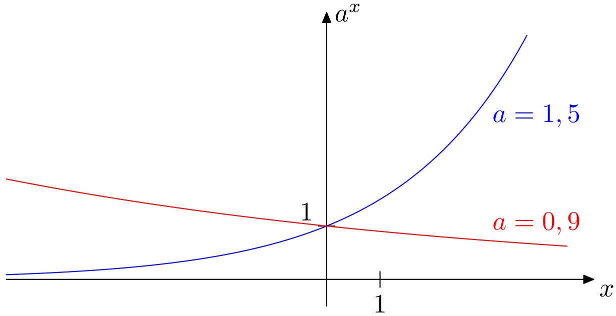
$$(3) \quad e^{\ln(x)} = x \ \text{ für alle } x \in \mathbb{R}_{>0} \ \text{ und } \ln(e^x) = x \ \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

### Allgemeine Potenz und Logarithmus

Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ vorgegeben. Setze $a^x := e^{x \ln(a)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wie man mit Hilfe von $1'$ sehen kann, ist dies für $x = n \in \mathbb{N}$ die übliche Potenz $a^n$. Für $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gelten die Regeln $\ln(a^x) = x \ln(a)$ und

$$a^{x+y} = a^x a^y \ \text{ und } \ (a^x)^y = a^{xy} \ \text{ sowie } \ a^x b^x = (ab)^x \ \text{ und } \ a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x .$$

Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto a^x$, ist für $a > 1$ streng monoton wachsend und für $0 < a < 1$ streng monoton fallend.




Die Umkehrfunktion $\log_a : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log_a(x)$ heißt *Logarithmus zur Basis $a$*. Es gilt $\ln = \log_e$ .

### Potenz und Wurzel

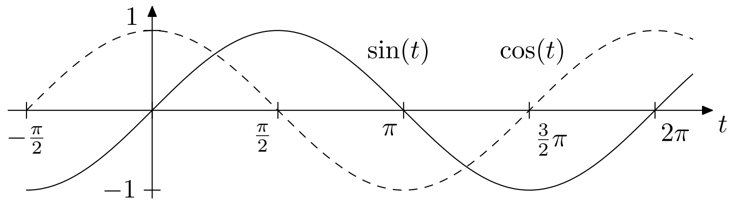
Oben haben wir für festes $a \in \mathbb{R}_{>0}$ die Funktion $x \mapsto a^x$ betrachtet. Nun wenden wir uns der Potenzfunktion $x \mapsto x^r$ für festes $r \in \mathbb{R}$ zu. Sie ist für $r = n \in \mathbb{N}$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Ist $n$ ungerade, dann ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ streng monoton wachsend und besitzt eine Umkehrfunktion $u_f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, genannt *$n$-te Wurzel*, wenn $n \geqslant 2$ ist.

Für gerades $n$ müssen wir den Definitionsbereich von $f$ einschränken, um eine $n$-te Wurzel zu erhalten. Es ist dann die Funktion $f\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ streng monoton wachsend mit Umkehrfunktion $u_f\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

Für beliebiges $r \in \mathbb{R}$ und $x > 0$ gilt $x^{-r} = \frac{1}{x^r}$ . Ist $r = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ und $x > 0$, so gilt $x^r = \sqrt[n]{x^m}$.

## Sinus, Cosinus und Umkehrfunktionen

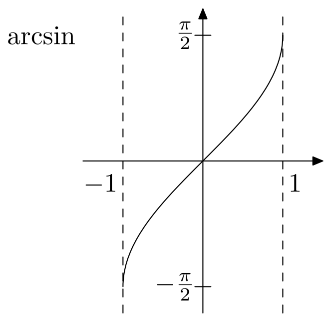
Die Funktionen $\mathbb{R} \to [-1,1]$ , $t \mapsto \sin(t)$ und $t \mapsto \cos(t)$ sind *periodisch* mit Periode $2\pi$ ; d. h. es gilt $\sin(t+2\pi) = \sin(t)$ und $\cos(t+2\pi) = \cos(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Funktion sin ist *ungerade*, d. h. es gilt $\sin(-t) = -\sin(t)$ und cos ist *gerade*, d. h. es gilt $\cos(-t) = \cos(t)$ jeweils für alle $t \in \mathbb{R}$ .

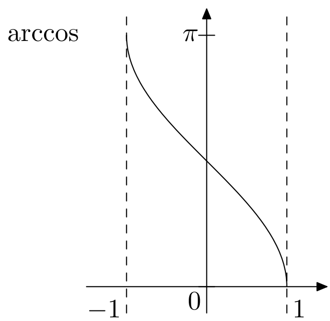



Wie den obigen Graphen von sin und cos anzusehen ist, ist sin im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton wachsend und cos im Intervall $[0,\pi]$ streng monoton fallend. Die also existierenden Umkehrfunktionen

$$\arcsin\colon\ [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ \text{ und } \ \arccos\colon\ [-1,1] \to [0,\pi]$$

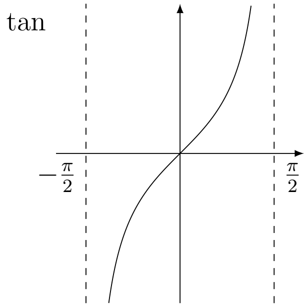
nennt man *Arcus-Sinus* und *Arcus-Cosinus*.

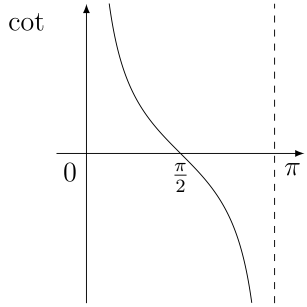


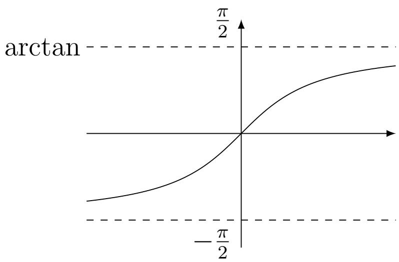

## Tangens, Cotangens und Umkehrfunktionen

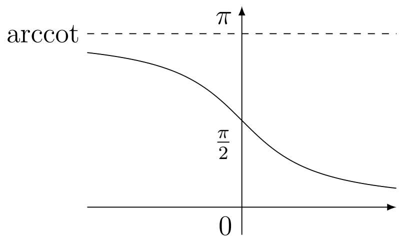
Die *Tangens-Funktion* ist für $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ definiert durch $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
Die *Cotangens-Funktion* ist für $x \in \left]0,\pi\right[$ definiert durch $\cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.




Die beiden Funktionen sind in den angegebenen Intervallen streng monoton. Die Umkehrfunktionen $\arctan\colon \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ und $\operatorname{arccot}\colon \mathbb{R} \to ]0, \pi[$ nennt man *Arcus-Tangens* und *Arcus-Cotangens*.

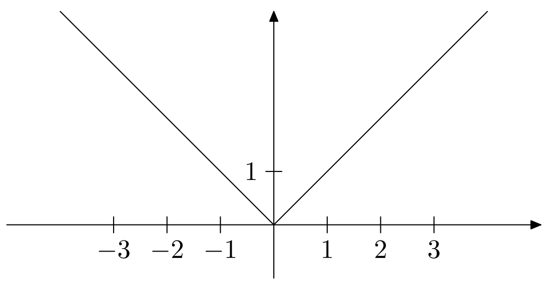



**Die Betragsfunktion** $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}\,,\ x \mapsto |x|$ ist definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geqslant 0\,, \\ -x & \text{falls } x < 0\,. \end{cases}$$

Sie ist stetig und im Nullpunkt nicht differenzierbar.




Die oben betrachteten elementaren Funktionen sind mit Ausnahme der Betragsfunktion alle in dem jeweils angegebenen Definitionsbereich differenzierbar.

# 2 Differenzieren und Integrieren

*„Auf der Genauigkeit, mit welcher wir die Erscheinungen ins Unendlichkleine verfolgen, beruht wesentlich die Erkenntnis ihres Causalzusammenhangs.“*

Bernhard Riemann (1826–1866)

Wir stellen hier einige Grundlagen aus der Differenzial- und Integralrechnung zusammen, die wir im Folgenden immer wieder benutzen werden. Weiteres und insbesondere Beweise finden sich z. B. in Forster [8].

## 2.1 Der Hauptsatz

Sei $I$ ein Intervall in $\mathbb{R}$.

**Definition.** Eine differenzierbare Funktion $F\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* einer Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, falls $F' = f$ gilt.

Ist $F$ eine Stammfunktion einer Funktion $f$, so ist auch $F + c$ eine Stammfunktion von $f$ für jede konstante Funktion $c$ (denn eine konstante Funktion hat die Ableitung 0). Ist $G$ eine weitere Stammfunktion von $f$, so ist $G = F + c$, d. h. je zwei Stammfunktionen von $f$ unterscheiden sich nur um eine konstante Funktion, (denn aus $(G - F)' = 0$ folgt $G - F = c$).

**Hauptsatz.** *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und sei $x_0 \in I$.*

1) *Die Funktion $F\colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ ist eine Stammfunktion von $f$.*

2) *Für alle $x_0, x_1 \in I$ und jede Stammfunktion $F$ von $f$ gilt*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = F(x_1) - F(x_0) =: F(x)\Big|_{x_0}^{x_1}.$$

Das Ergebnis einer Integration lässt sich also überprüfen, indem man es differenziert. Dabei muss dann die Funktion herauskommen, die unter dem Integralzeichen steht. Man nennt eine Stammfunktion $F$ von $f$ auch ein *unbestimmtes Integral* und schreibt $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Falls wir nur an einer speziellen Stammfunktion interessiert sind, schreiben wir im Folgenden die Konstante nicht mit.

## 2.2 Regeln beim Differenzieren

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Für Funktionen $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ sind deren Summe $f + g\colon D \to \mathbb{R}$, das skalare Vielfache $\lambda f\colon D \to \mathbb{R}$ und deren Produkt $fg\colon D \to \mathbb{R}$ durch die folgenden Abbildungsvorschriften definiert:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)\,, \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad \text{und} \quad (fg)(x) := f(x)g(x)$$

für alle $x \in D$. Sind die Funktionen $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ im Punkt $x \in D$ differenzierbar, so sind auch die Funktionen $f+g,\ \lambda f,\ fg\colon D \to \mathbb{R}$ in $x$ differenzierbar, und für die Ableitungen gelten die folgenden Regeln

**Linearität:** $\quad (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \text{und} \quad (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)\,,$

**Produktregel:** $\quad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,.$

Es sei nun $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Dann ist der Quotient $\frac{f}{g}\colon D \to \mathbb{R}$ durch die Abbildungsvorschrift $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ für alle $x \in D$ definiert. Sind die Funktionen $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ im Punkt $x \in D$ differenzierbar, so ist auch die Funktion $\frac{f}{g}\colon D \to \mathbb{R}$ in $x$ differenzierbar, und für die Ableitung gilt die

**Quotientenregel:** $\quad \left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}\,.$

Seien $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$. Dann ist deren *Kompositum* $g \circ f\colon D \to \mathbb{R}$ (auch *verkettete Abbildung* genannt) durch die Abbildungsvorschrift $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ für alle $x \in D$ definiert. Die Funktion $f$ sei im Punkt $x \in D$ differenzierbar, und die Funktion $g$ sei im Punkt $f(x) \in E$ differenzierbar. Dann ist auch die Funktion $g \circ f\colon D \to \mathbb{R}$ in $x$ differenzierbar, und für die Ableitung gilt die

**Kettenregel:** $\quad (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)\,.$

Jede streng monoton wachsende oder fallende Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ hat eine *Umkehrfunktion*, d. h. eine Funktion $u_f\colon f(D) \to \mathbb{R}$ so, dass $(u_f \circ f)(x) = x$ für alle $x \in D$ und $(f \circ u_f)(y) = y$ für alle $y \in f(D)$ gilt.

Sei $I$ ein Intervall in $\mathbb{R}$, und sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende oder fallende, stetige Funktion. Dann ist die Umkehrfunktion $u_f\colon f(I) \to \mathbb{R}$ stetig. Ist $f$ im Punkt $x \in I$ differenzierbar und ist $f'(x) \neq 0$, so ist die Umkehrfunktion $u_f : f(I) \to R$ im Punkt $f(x)$ differenzierbar, und für die Ableitung gilt die

**Umkehrregel:** $\quad u_f'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}\,.$

**Beispiel.** Die Tangens-Funktion $\tan\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend. Für die Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ gilt nach Umkehrregel $\arctan'(\tan(x)) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{1+\tan^2(x)}$. Mit $y = \tan(x)$ folgt $\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

Den folgenden Satz werden wir in Abschnitt 4.1 anwenden.

**Satz 1.** *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit stetiger Ableitung. Wenn $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ gilt, dann besitzt $f$ eine differenzierbare Umkehrfunktion $u_f\colon f(I) \to \mathbb{R}$.*

In der Literatur wird meist die Bezeichnung $f^{-1}$ statt $u_f$ für die Umkehrfunktion benutzt, was aber leicht zur Verwechslung der Umkehrfunktion mit der Funktion $\frac{1}{f}$ führen kann und hier vermieden werden soll.

## 2.3 Ableitungen elementarer Funktionen

| | | |
|---|---|---|
| $f(x) = c$ konstant | $\Longrightarrow$ | $f'(x) = 0$ |
| $f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$, falls $n < 0$<br>Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ für $x \neq 0$ | $\Longrightarrow$<br>$\Longrightarrow$ | $f'(x) = n\,x^{n-1}$<br>$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ |
| $f(x) = x^r$ für $r \in \mathbb{R}$, $x > 0$<br>Beispiel: $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ für $x > 0$ | $\Longrightarrow$<br>$\Longrightarrow$ | $f'(x) = r\,x^{r-1}$<br>$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $f(x) = e^x$ | $\Longrightarrow$ | $f'(x) = e^x$ |
| $f(x) = \ln(x)$ für $x > 0$,<br>$f(x) = \ln(-x)$ für $x < 0$ | $\Longrightarrow$<br>$\Longrightarrow$ | $f'(x) = \frac{1}{x}$<br>$f'(x) = \frac{1}{x}$ |
| $f(x) = \sin(x)$ | $\Longrightarrow$ | $f'(x) = \cos(x)$ |
| $f(x) = \arcsin(x)$ für $x \in \left]-1, 1\right[$ | $\Longrightarrow$ | $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $f(x) = \cos(x)$ | $\Longrightarrow$ | $f'(x) = -\sin(x)$ |
| $f(x) = \arccos(x)$ für $x \in \left]-1, 1\right[$ | $\Longrightarrow$ | $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $f(x) = \tan(x)$ für $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ | $\Longrightarrow$ | $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$ |
| $f(x) = \arctan(x)$ | $\Longrightarrow$ | $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ |

## 2.4 Regeln beim Integrieren

Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann gelten folgende Regeln.

**Für Integralgrenzen:** $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ und $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
sowie $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ für $c \in [a,b]$.

**Linearität:** $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
und $\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Monotonie:** $f(x) \leqslant g(x)$ für alle $x \in [a,b] \implies \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$,
also auch $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$.

**Partielle Integration:** $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$,
falls $f$ und $g$ differenzierbar sind und stetige Ableitungen haben.

**Beispiel 1.** Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}_{>0}$.
Es ist $\int_a^b \ln(x)\,dx = \int_a^b \ln(x) \cdot 1\,dx = \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$ mit $f(x) = \ln(x)$ und $g'(x) = 1$. Es folgt $f'(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = \int 1\,dx = x$.
Partielle Integration ergibt $\int_a^b \ln(x)\,dx = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \ln(x)x\big|_a^b - \int_a^b \frac{1}{x}\,x\,dx = (\ln(x)x - x)\,\big|_a^b$.

Exemplarisch beweisen wir die

**Substitutionsregel:** $\int\limits_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$, *falls* $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *differenzierbar mit stetiger Ableitung und* $f\colon g([a,b]) \to \mathbb{R}$ *stetig ist.*

*Beweis.* Sei $F$ eine Stammfunktion von $f$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(F \circ g)'(x) &= F'(g(x))\,g'(x) && \text{nach Kettenregel}\\ &= f(g(x))\,g'(x) && \text{da } F' = f\,.\end{aligned}$$

Hieraus und durch zweimaliges Anwenden des Hauptsatzes in 2.1 folgt:
$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = (F \circ g)(x)\big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$. □

**Beispiel 2.** Es ist $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \cos\Big(\pi - \frac{1}{x}\Big)\,\frac{1}{x^2}\;dx = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} f(g(x))\,g'(x)\,dx$ mit $g(x) = \pi - \frac{1}{x} =: u$, also $g'(x) = \frac{1}{x^2}$ und $f(u) = \cos(u)$. Nach Substitutionsregel folgt $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \cos\Big(\pi - \frac{1}{x}\Big)\,\frac{1}{x^2}\;dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)\,du = \sin(u)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$.

## 2.5 Einige unbestimmte Integrale

Bei einem unbestimmten Integral $\int f(x)\,dx$ ist stets im Auge zu behalten, dass über einem abgeschlossenen Intervall $I = [a,b]$ integriert wird und insbesondere die Funktion $f$ dort definiert sein muss. Beim Integral $\int \frac{1}{x}\,dx$ bedeutet dies zum Beispiel, dass für das Integrationsintervall $I \subset \mathbb{R}_{>0}$ oder $I \subset \mathbb{R}_{<0}$ gelten muss oder äquivalent $0 \notin I$ ist. Es ist

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \begin{cases} \ln(x) & \text{falls } I \subset \mathbb{R}_{>0} \\ \ln(-x) & \text{falls } I \subset \mathbb{R}_{<0} \end{cases} \quad \text{das heißt } \int \tfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| \text{ falls } 0 \notin I\,.$$

| $\int f(x)\,dx = F(x)$ | *Probe:* $F'(x) \overset{?}{=} f(x)$ |
|---|---|
| $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ mit $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$, und $0 \notin I$, falls $n < -1$ | $F'(x) = \frac{n+1}{n+1} \cdot x^{n+1-1} = x^n$ |
| $\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}$ mit $r \in \mathbb{R}$, $r \neq -1$, und $I \subset \mathbb{R}_{>0}$ | $F'(x) = \frac{r+1}{r+1} \cdot x^{r+1-1} = x^r$ |
| $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, $I \subset \mathbb{R}_{>0}$ | $F'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\,x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ |
| $\int e^x\,dx = e^x$ | $F'(x) = e^x$ |
| $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$ mit $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ | $F'(x) = \frac{1}{a}ae^{ax} = e^{ax}$ |
| $\int \ln(x)\,dx = \ln(x)x - x$ | $F'(x) = \frac{1}{x}x + \ln(x) - 1 = \ln(x)$ |
| $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$ | $F'(x) = -(-\sin(x)) = \sin(x)$ |
| $\int \cos(x)\,dx = \sin(x)$ | $F'(x) = \cos(x)$ |
| $\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x)$ für $I \subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ | $F'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ |
| $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x)$ | $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ |
| $\int \cot(x)\,dx = \ln(\sin(x))$ für $I \subset \left]0, \pi\right[$ | $F'(x) = \frac{1}{\sin(x)}\cos(x) = \cot(x)$ |

## 2.6 Aufgaben 1, 2

**Aufgabe 1.** (a) Man berechne $\displaystyle\int_1^{e^2} \ln(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$ mit Hilfe der Regel für die partielle Integration.

(b) Man berechne $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} \cos\Big(\frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{2}\Big)\,x\,dx$ mittels Substitutionsregel.

**Aufgabe 2.** (a) Man leite die Regel für die partielle Integration mit Hilfe des Hauptsatzes in 2.1 aus der Produktregel her.

(b) Sei $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit stetiger Ableitung, und es sei $g(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Man zeige mit Hilfe der Substitutionsregel die *Logarithmusregel:*

$$\int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)|\,\Big|_a^b\,.$$

# 3 Grundlegende Begriffe

## 3.1 Was verstehen wir unter einer DGL?

**Definition 1.** Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$. Eine *gewöhnliche Differenzialgleichung* (abgekürzt DGL) ist eine Gleichung der Form

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{4}$$

mit einer unbekannten Funktion $y = y(x)$ und einer Funktion $F\colon D \to \mathbb{R}$, $(x, y, z_1, \dots, z_n) \mapsto F(x, y, z_1, \dots, z_n)$ in $n+2$ Veränderlichen. Die *Ordnung einer DGL* ist die Ordnung $n$ der höchsten in (4) vorkommenden Ableitung von $y$.

**Beispiele.** (i) Die Gleichung $x^2y'' + xy' - y = 0$ ist eine DGL 2.Ordnung.
(ii) Die Gleichung $y' - y^2 - x^2 = 0$ ist eine DGL 1. Ordnung (*Riccati*-DGL).

**Definition 2.** Eine *Lösung einer DGL* ist eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte $n$-mal differenzierbare Funktion $y\colon I \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

(a) Es ist $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in D$ für alle $x \in I$.

(b) Es gilt $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ für alle $x \in I$.

Das Intervall $I$ nennt man auch *Lösungsintervall.*

**Beispiele.** (i) Die DGL $x^2y'' + xy' - y = 0$ hat die Lösungen $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = \frac{1}{x}$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ . **Probe:** $y_1 = x \Longrightarrow y_1' = 1$ und $y_1'' = 0 \Longrightarrow x^2y_1'' + xy_1' - y_1 = x^2 \cdot 0 + x \cdot 1 - x = 0$ ✓ **Probe:** $y_2 = \frac{1}{x} \Longrightarrow y_2' = -\frac{1}{x^2}$ und $y_2'' = \frac{2}{x^3} \Longrightarrow x^2y_2'' + xy_2' - y_2 = x^2 \cdot \frac{2}{x^3} + x \cdot (-\frac{1}{x^2}) - \frac{1}{x} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$ ✓
Wie kommt man zu den Lösungen? Es handelt sich um eine sog. *Euler*-DGL. Dafür wird später ein allgemeines Lösungsverfahren angegeben.
(ii) Die Riccati-DGL $y' - y^2 - x^2 = 0$ ist nicht durch elementare Funktionen lösbar, vgl. dazu [13, S. 69].

Eine DGL braucht gar keine Lösung zu besitzen, wie z. B. $|y'| + x^2 = 0$, oder hat nur genau eine Lösung wie z. B. $(y')^2 + y = 0$. Im Allgemeinen jedoch hat eine DGL der Form (4) unendlich viele Lösungen, die jeweils von $n$ Parametern $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ abhängen. Die Parameter lassen sich bestimmen, wenn *Anfangsbedingungen* wie in Definition 3 vorgegeben sind.

**Definition 3.** Man spricht von einer *Anfangswertaufgabe* (oder einem *Anfangswertproblem*), wenn eine Lösung $y = y(x)$ einer DGL der Ordnung $n$ ermittelt werden soll, die an einer vorgeschriebenen Stelle $\xi \in I$ die *Anfangsbedingungen* $y(\xi) = \eta_1$ , $y'(\xi) = \eta_2$ , $\dots$ , $y^{(n-1)}(\xi) = \eta_n$ mit vorgeschriebenen $\eta_1, \dots, \eta_n \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Wir werden später allgemeine Voraussetzungen formulieren, unter denen eine Anfangswertaufgabe genau eine Lösung besitzt. Dabei wird die DGL in der unten stehenden *expliziten* Form (5) vorliegen.

**Definition 4.** Eine DGL heißt *explizit*, wenn sie die folgende Form hat:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})\,. \tag{5}$$

**Beispiel.** $y' = f(x)$ wird, falls $f$ stetig, durch $y(x) = \int f(x)\,dx$ gelöst.

Nicht jede DGL der Form (4) lässt sich in die Form (5) bringen. Explizite DGL sind in der Regel einfacher zu lösen als sog. *implizite DGL* wie z. B. die DGL $(y')^2 - xy' + y = 0$, auf die wir noch in 5.2 eingehen werden.

## 3.2 Lineare DGL

Sei $I$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ und seien $a_0, \ldots, a_n, b\colon I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

**Definition.** Eine *lineare DGL* der Ordnung $n$ ist eine DGL der Form

$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)\,y = b(x)\,. \tag{6}$$

Eine lineare DGL heißt *homogen*, falls $b(x) = 0$ ist für alle $x \in I$ und andernfalls *inhomogen*. Die *Normalform* einer linearen DGL hat die Gestalt

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)\,y = b(x)\,. \tag{7}$$

Sind die Koeffizienten $a_n, \ldots, a_0$ nicht variabel, sondern Konstanten in $\mathbb{R}$, so spricht man auch von einer *linearen DGL mit konstanten Koeffizienten.*

Wir werden hauptsächlich lineare DGL in der Normalform (4) behandeln. Denn an Stellen $x \in I$, an denen $a_n(x) = 0$ ist, treten sog. *Singularitäten* auf, die dann gesondert betrachtet werden müssen.

**Bemerkung.** Die zur Normalform (7) gehörende homogene DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)\,y = 0 \tag{8}$$

hat stets eine Lösung, nämlich die Nullfunktion $y_0$ mit $y_0(x) = 0$ für alle $x \in I$.
Wir werden zeigen, dass die Lösungen von (8) einen $n$-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum $L_h$ bilden, wobei Addition und skalares Vielfaches wie in 2.2 definiert sind. Wenn $\{y_1, \ldots, y_n\}$ eine Basis von $L_h$ ist, so lässt sich also jede Lösung $y(x)$ von (8) als Linearkombination

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) \tag{9}$$

mit Konstanten $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ schreiben.

Man nennt dann $y(x)$ auch die *allgemeine Lösung* von (8), und eine Basis des Lösungsraums $L_h$ wird ein *Fundamentalsystem von Lösungen* genannt.

**Beispiel 1.** Sei $I = \mathbb{R}_{>0}$ . Multiplizieren wir das Beispiel $x^2y''+xy'-y = 0$ aus 3.1 mit $\frac{1}{x^2}$, so erhalten wir die Form (8), nämlich $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$ . Da die Lösungen $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = \frac{1}{x}$ linear unabhängig sind, erhalten wir als allgemeine Lösung $y(x) = c_1x + c_2\,\frac{1}{x}$ .

**Beispiel 2.** Die DGL $y'' + y = 0$ auf der Titelseite hat die allgemeine Lösung $y(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)$ , wie man leicht nachprüft.
Wir bestimmen nun die Konstanten $c_1, c_2$ aus den auf der Titelseite vorgegebenen Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ .
Es ist $0 \overset{!}{=} y(0) = c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = c_2$ , also $c_2 = 0$ . Es ist $y'(x) = c_1 \cos(x) - c_2 \sin(x)$ und daher $1 \overset{!}{=} y'(0) = c_1$ . Die Lösung der Anfangswertaufgabe ist also $y(x) = \sin(x)$ .

Ein allgemeines Kriterium für die lineare Unabhängigkeit von Lösungen einer homogenen linearen DGL der Form (8) werden wir noch kennenlernen.

## 3.3 DGL-Systeme

**Definition.** Ein *explizites System* von $n$ DGL 1. Ordnung hat die Form

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\ldots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

wobei $f_k \colon D \to \mathbb{R}$ für $k = 1, \ldots, n$ stetige Funktionen auf einer Menge $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ sind. In Vektorschreibweise hat das System die Form

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y}) \tag{10}$$

wobei $\vec{f} \colon D \to \mathbb{R}^n$ , $(x, \vec{y}\,) \mapsto \big(f_1(x, \vec{y}\,), \ldots, f_n(x, \vec{y}\,)\big)$ mit $\vec{y} = (y_1, \ldots y_n)$ und $\vec{y}\,' = (y_1', \ldots, y_n')$ gelte. Eine *Lösung* des Systems (10) ist eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion $\vec{y} \colon I \to \mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften

$$(x, \vec{y}(x)) \in D \quad \text{und} \quad \vec{y}\,'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}\,(x)) \quad \text{für alle } x \in I\,.$$

Ist für das System (10) eine *Anfangsbedingung* $\vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$ mit $(\xi, \vec{\eta}) \in D$ vorgegeben, so haben wir es mit einer *Anfangswertaufgabe* (oder einem *Anfangswertproblem*) zu tun. **Achtung:** Die Buchstaben $y_1, y_2, \ldots$ haben hier bei den Systemen eine andere Bedeutung als bei den DGL.

**Bemerkung.** Eine explizite DGL $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ der Ordnung $n$, vgl. (5), kann stets wie folgt als ein spezielles System der Form (10) aufgefasst werden: Wir setzen $y_1 := y,\ y_2 := y', \dots,\ y_n := y^{(n-1)}$. Dann ist $y_n' = y^{(n)} = f(x, \vec{y})$ und wir erhalten das System

$$(11) \qquad \vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y}) \quad \text{mit} \quad \vec{f}\colon D \to \mathbb{R}^n,\ (x, \vec{y}\,) \mapsto (y_2, \dots, y_n, f(x, \vec{y}))$$

oder ausgeschrieben das System

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\dots \\ y_n' &= f(x, y_1, \dots, y_n)\,. \end{aligned}$$

Wir nennen dieses System auch das *zur DGL* $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ *gehörige System.*

Ist $\vec{y}\colon I \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (y_1(x), \dots, y_n(x))$ eine Lösung des zugehörigen Systems, so ist $y_1(x)$ eine Lösung der DGL $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.

Ist umgekehrt $y\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, so ist $\vec{y}(x) = (y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ eine Lösung des zugehörigen Systems.

Anfangsbedingungen $y(\xi) = \eta_1,\ y'(\xi) = \eta_2,\ \dots, y^{(n-1)}(\xi) = \eta_n$ für die DGL $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ gehen über in die Anfangsbedingung $\vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$ mit $\vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ für das zugehörige System. Lösungen von Anfangswertaufgaben entsprechen sich analog wie oben.

**Beispiel.** Wir betrachten die DGL $y'' = \frac{1}{x^2}y - \frac{1}{x}y'$ aus Beispiel 1 in 3.2 mit den Lösungen $y(x) = x$ und $\tilde{y}(x) = \frac{1}{x}$. Hierzu gehört das System

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= \frac{1}{x^2}\,y_1 - \frac{1}{x}\,y_2 \end{aligned}$$

mit den Lösungen $\vec{y_1}(x) = (x, 1)$ und $\vec{y_2}(x) = (\frac{1}{x}, -\frac{1}{x^2})$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Die obige Bemerkung ist sehr wichtig, denn Aussagen, die wir für ein explizites DGL-System (10) beweisen, gelten dann automatisch auch für eine explizite DGL $n$-ter Ordnung der Form (5).

## 3.4 Lineare DGL-Systeme

**Definition.** Ein explizites *lineares System* 1. Ordnung hat die Form

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)\,y_1 + \cdots + a_{1n}(x)\,y_n + b_1(x) \\ y_2' &= a_{21}(x)\,y_1 + \cdots + a_{2n}(x)\,y_n + b_2(x) \\ &\dots \\ y_n' &= a_{n1}(x)\,y_1 + \cdots + a_{nn}(x)\,y_n + b_n(x)\,, \end{aligned}$$

wobei $a_{ij}$ , $b_j\colon I \to \mathbb{R}$ für $i, j = 1, \dots, n$ stetige Funktionen sind.
In Matrixschreibweise hat das System die Form

$$\vec{y}\,' = A(x)\,\vec{y} + \vec{b}(x)\,, \tag{12}$$

wobei $A\colon I \to \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\,, x \mapsto (a_{ij}(x))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ und $\vec{b}\colon I \to \mathbb{R}^n$ stetig sind. Sind alle Funktionen $a_{ij}$ konstant und ist also $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, so spricht man von einem *linearen System mit konstanten Koeffizienten.* Ausgeschrieben bedeutet (12) die Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}.$$

Ist $\vec{b}(x) = \vec{0}$ für alle $x \in I$ , so heißt (12) *homogen* und andernfalls *inhomogen.*

**Beispiel.** Das Beispiel aus 3.3 lässt sich schreiben als $\vec{y}\,' = A(x)\,\vec{y}$ mit $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{x^2} & -\frac{1}{x} \end{pmatrix}$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ .
Schreibt man die Lösungen als Spalten, $\vec{y_1}(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{y_2}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix}$, so zeigt die folgende **Probe** die Richtigkeit der Lösungen: Es ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{x^2} & -\frac{1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{y_1}\,' \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{x^2} & -\frac{1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} \\ \frac{2}{x^3} \end{pmatrix} = \vec{y_2}\,'.$$

**Bemerkung.** Die Lösungen des zu (12) gehörigen homogenen Systems

$$\vec{y}\,' = A(x)\,\vec{y} \tag{13}$$

bilden einen $n$-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum $L_h$, wie wir zeigen werden. Ist $\{\vec{y_1}, \dots, \vec{y_n}\}$ eine Basis von $L_h$ , so ist die *allgemeine Lösung* von (13) gegeben durch $\vec{y}(x) = c_1\vec{y_1}(x) + \cdots + c_n\vec{y_n}(x)$ mit $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

## 3.5 Aufgaben 3 – 6

**Aufgabe 3.** (a) Man bestätige durch eine Probe, dass die DGL

$$y'' - \frac{2}{x}\,y' + \frac{2}{x^2}\,y = 0$$

auf $\mathbb{R}_{>0}$ die allgemeine Lösung $y(x) = c_1 x + c_2 x^2$ mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ besitzt.

(b) Welche Lösung hat die Anfangswertaufgabe $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ mit $y(1) = 1$ und $y'(1) = 0$?

**Aufgabe 4.** Man löse die Anfangswertaufgabe $y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ mit $y(1) = e$ auf dem Intervall $\mathbb{R}_{>0}$ und bestätige das Ergebnis durch eine Probe.

**Aufgabe 5.** Man löse die Anfangswertaufgabe $y' = \sin\big(\frac{x^2}{2}\big)\, x$ mit $y(0) = 1$ und bestätige das Ergebnis durch eine Probe. (Das Lösungsintervall ist dabei anzugeben.)

**Aufgabe 6.** Seien $s, a \in \mathbb{R}_{>0}$ Konstanten, und sei $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Die *Michaelis-Menten-Funktion*

$$y = M(x) = \frac{sx}{x+a}$$

tritt u. a. als *Dosis-Wirkungsfunktion* von Medikamenten auf.

(a) Man bestätige durch eine Probe, dass die Michaelis-Menten-Funktion die DGL $y' = \frac{ay^2}{sx^2}$ erfüllt.

(b) Man zeige, dass sich die Wirkung $y = M(x)$ mit wachsender Dosis $x$ einer Sättigung $s$ nähert, dass also $\lim_{x\to\infty} M(x) = s$ gilt.

(c) Woran kann man erkennen, dass $M(x)$ streng monoton wächst?

## 3.6 Erläuterungen von Sven Jäger zum Titelbild

Auf dem Titelbild[1] wird ein graphisches Verfahren zur Integration von Differenzialgleichungen zweiter Ordnung mittels Krümmungskreisen dargestellt. Es geht auf ein Verfahren des britischen Physikers Lord Kelvin[2] zurück. Dabei wird die Lösungskurve durch Kreissegmente angenähert.

[1] Die Darstellung wurde 1904 von Rudolf Schimmack angefertigt.

[2] William Thomson, 1. Baron Kelvin (1824-1907) verwendete in [19] eine verwandte Methode für die Kapillaritätsgleichung.

Gegeben sei die gewöhnliche explizite Differenzialgleichung

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{14}$$

für die eine Lösungskurve $y_1$ mit $y_1(x_0) = y_0$, $y_1'(x_0) = d_0$ konstruiert werden soll.
Für $x \in \mathbb{R}$ sei $\tau(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ der kleinere Winkel zwischen der Tangente an die Kurve $y_1$ an der Stelle $x$ und der $x$-Achse, wobei das Vorzeichen des Winkels mit dem der Tangentensteigung übereinstimme. Dann gilt:

$$y_1'(x) = \tan(\tau(x)) \tag{15}$$

und an Stellen, an denen die Krümmung ungleich 0 ist:

$$\tau'(x) = \frac{1}{\rho(x)\cos(\tau(x))}, \tag{16}$$

wobei $\rho(x)$ der gerichtete Radius des Krümmungskreises an $y_1$ an der Stelle $x$ ist. $\rho(x)$ ist positiv, falls der Krümmungskreismittelpunkt oberhalb von $y_1$ liegt und ansonsten negativ.

*Herleitung.* Um die beiden Ableitungsformeln nachzuvollziehen, verwenden wir die Definition der Ableitung als Limes von Differenzenquotienten. Es ergibt sich

$$y_1'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{y_1(x+h) - y_1(x)}{h} \overset{\text{Abb. 1}}{=} \lim_{h \to 0} \tan(\tau_h(x)) = \tan(\tau(x)),$$

wobei $\tau_h$ der Winkel der Sekante durch die Stellen $x$ und $x + h$ ist.

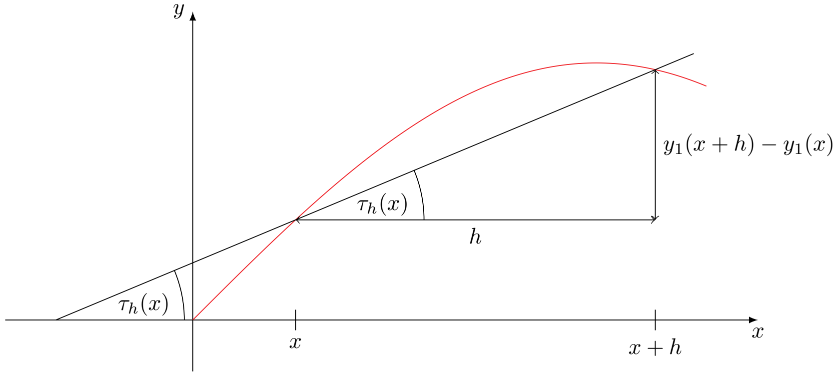



Abb. 1: Veranschaulichung von Gleichung (15)

Für die zweite Formel sei $\tau^{-1}$ eine lokale Umkehrfunktion von $\tau$ bei $x$ (existiert, da Krümmung ungleich 0 ist), sei $[\alpha, \alpha+\varepsilon]$ im Definitionsbereich von $\tau^{-1}$ enthalten, seien $x_0 := \tau^{-1}(\alpha)$, $x_\varepsilon := \tau^{-1}(\alpha+\varepsilon)$ und sei $n_0$ die Normale von $y_1$ an der Stelle $x_0$, sowie $n_\varepsilon$ die Normale an der Stelle $x_\varepsilon$. Sei weiter $S_\varepsilon$ der Schnittpunkt von $n_0$ und $n_\varepsilon$ und sei $\rho_0^{(\varepsilon)}$ der Abstand von $S_\varepsilon$ zu $(x_0, y_1(x_0))$ und $\rho_\varepsilon^{(\varepsilon)}$ der Abstand von $S_\varepsilon$ zu $(x_\varepsilon, y_1(x_\varepsilon))$, wobei das Vorzeichen jeweils angibt, ob $S_\varepsilon$ oberhalb oder unterhalb von $y_1$ liegt. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(\tau^{-1})'(\alpha) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{x_\varepsilon - x_0}{\varepsilon} \\
&\overset{\text{Abb. 2}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\rho_\varepsilon^{(\varepsilon)} \sin(\alpha+\varepsilon) - \rho_0^{(\varepsilon)} \sin(\alpha)}{\varepsilon} \\
&\overset{(*)}{=} \rho(x_0) \cdot \cos(\alpha)
\end{aligned}$$

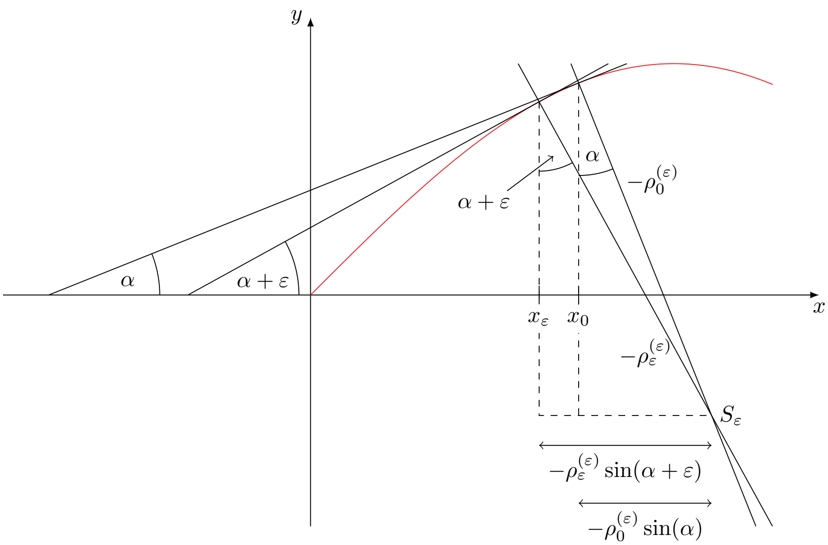



Abb. 2: Veranschaulichung von Gleichung (16)

Von der Gleichheit $(*)$ überzeugen wir uns, indem wir von unten und oben abschätzen. Sei dazu $\rho_\mathrm{l}^{(\varepsilon)} \in \{\rho_0^{(\varepsilon)}, \rho_\varepsilon^{(\varepsilon)}\}$ der kleinere und $\rho_\mathrm{u}^{(\varepsilon)} \in \{\rho_0^{(\varepsilon)}, \rho_\varepsilon^{(\varepsilon)}\}$ der größere Wert. Ist $\varepsilon \geqslant 0$, so ist $\frac{\sin(\alpha+\varepsilon)-\sin(\alpha)}{\varepsilon} \geqslant 0$, da der Sinus im

Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ monoton steigt. Deshalb gilt dann:

$$\underbrace{\rho_{\mathrm{l}}^{(\varepsilon)}}_{\xrightarrow{\varepsilon\to 0}\rho(x_0)} \underbrace{\frac{\sin(\alpha+\varepsilon)-\sin(\alpha)}{\varepsilon}}_{\xrightarrow{\varepsilon\to 0}\cos(\alpha)} \leqslant \frac{\rho_{\varepsilon}^{(\varepsilon)}\sin(\alpha+\varepsilon)-\rho_0^{(\varepsilon)}\sin(\alpha)}{\varepsilon}$$

$$\leqslant \underbrace{\rho_{\mathrm{u}}^{(\varepsilon)}}_{\xrightarrow{\varepsilon\to 0}\rho(x_0)} \underbrace{\frac{\sin(\alpha+\varepsilon)-\sin(\alpha)}{\varepsilon}}_{\xrightarrow{\varepsilon\to 0}\cos(\alpha)}$$

Den Fall $\varepsilon \leqslant 0$ behandelt man genauso. Die Behauptung folgt schließich aus der Regel zur Ableitung der Umkehrfunktion. $\square$

Somit gilt für $y_1''$ an allen Stellen $x$ mit $y_1''(x) \neq 0$:

$$y_1''(x) \overset{(15)}{=} (\tan(\tau))'(x) = \frac{1}{\cos^2(\tau(x))}\tau'(x) \overset{(16)}{=} \frac{1}{\cos^3(\tau(x))\rho(x)}.$$

Dies führt zusammen mit (14) zu der folgenden Formel für den Krümmungskreisradius in Abhängigkeit von den Koordinaten und dem Winkel zwischen Kurvenrichtung und $x$-Achse:

$$\rho = \frac{1}{\cos^3(\tau)\cdot f(x,y,\tan(\tau))}.$$

An Stellen, an denen der Nenner eine Nullstelle hat, ist die Kurve nicht gekrümmt.

Das Verfahren funktioniert nun folgendermaßen: Zuerst wird der Krümmungskreisradius $\rho_0$ im Startpunkt $P_0 = (x_0, y_0)$ berechnet und der Krümmungskreismittelpunkt $M_0$ im Abstand $\rho_0$ in zur Kurvenrichtung senkrechter Richtung eingezeichnet – für $\rho > 0$ oberhalb, für $\rho < 0$ unterhalb von $P_0$. Anschließend wird mit dem Zirkel ein Kreisbogensegment mit hinreichend kleinem Winkel $\alpha_0$ durch $P_0$ aufgetragen, dessen Ende der Punkt $P_1$ ist. An diesem wird erneut der Krümmungskreisradius $\rho_1$ aus den Koordinaten von $P_1$ sowie dem Winkel $\tau_0 + \alpha_0$ bzw. $\tau_0 - \alpha_0$ berechnet, der Krümmungskreismittelpunkt $M_1$ eingetragen und als Basis für die Konstruktion des nächsten Kreissegments verwendet und so weiter. Hat in einem Schritt der Nenner eine Nullstelle, so wird die Lösung an dieser Stelle durch ein Geradensegement approximiert.

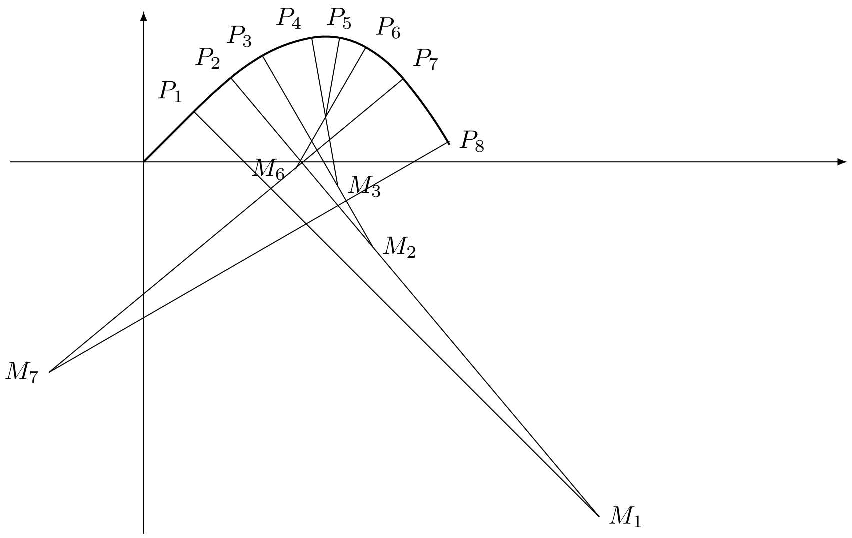



Abb. 3: Durchführung des Verfahrens

In obiger Darstellung wurde das Verfahren für das Anfangswertproblem vom Titelbild wiederholt. Dabei wurde mit einem Geradensegment der Länge $\frac{1}{\sqrt{2}}$ begonnen und anschließend die Winkel $5^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 20^\circ, 20^\circ, 20^\circ$ und $10^\circ$ verwendet und es traten Krümmungskreisradien von ungefähr 5.7, 2.2, 1.9, 0.8, 0.8, 1.4 und 4.6 auf.
Das Verfahren lässt sich noch verbessern, indem nach der Konstruktion eines Punktes $P_{i+1}$ nicht sofort mit der Konstruktion des nächsten Punktes fortgefahren wird, sondern der letzte Konstruktionsschritt mit Krümmungskreisradius $\frac{\rho_i+\rho_{i+1}}{2}$ wiederholt wird. Dadurch erhält man einen neuen Punkt $P^*_{i+1}$. Natürlich ergibt sich an diesem Punkt auch wieder ein neuer Krümmungskreisradius $\rho^*_{i+1}$, mit dem entweder $P_{i+2}$ konstruiert werden oder noch ein Verbesserungsschritt für $P_{i+1}$ durchgeführt werden kann. Diese Verbesserungsschritte können so lange wiederholt werden, bis sich die Ergebnisse kaum noch unterscheiden.
Eine ausführliche Beschreibung des Verfahrens wird in [29] gegeben; [25] enthält eine Zusammenstellung seiner Anwendungen und in [20] findet sich eine Abwandlung zur Bestimmung des Linienbildes der Lösung einer Differenzialgleichung höherer Ordnung.

# DGL erster Ordnung

## 4 Explizite DGL

Wir unterscheiden in diesem Kapitel zwischen verschiedenen Typen von expliziten DGL 1. Ordnung und leiten dafür Lösungsmethoden her.

### 4.1 DGL mit getrennten Variablen $y' = f(x)g(y)$

Seien $f\colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ und $g\colon J \to \mathbb{R}$, $y \mapsto g(y)$ stetige Funktionen auf Intervallen $I$ und $J$ in $\mathbb{R}$. Es gelte $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$. Betrachte eine *DGL mit getrennten Variablen*, d. h. eine DGL der Form

$$(*) \qquad y' = f(x)\, g(y)\,.$$

Schreiben wir diese als $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$, so folgt $\frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} = f(x)$, was man formal zu $\frac{1}{g(y)}\, dy = f(x)\, dx$ umformen kann. Es folgt

$$(**) \qquad \int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx\,.$$

Man hat nun die Gleichung $(**)$ nach $y$ aufzulösen, um eine Lösung $y(x)$ von $(*)$ zu erhalten.

**Beispiel 1.** Sei $f(x) = \cos(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $g(y) = y$ für $y \in \mathbb{R}_{>0}$. Zu lösen ist die DGL $y' = \cos(x)y$. Wir formen die DGL formal zu

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \cos(x)\, dx$$

um. Integrieren auf beiden Seiten ergibt $\ln(y) = \sin(x) + c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Um diese Gleichung nach $y$ aufzulösen, wenden wir auf beiden Seiten die Umkehrfunktion von ln an und erhalten $y(x) = e^{\sin(x)+c}$.
**Probe:** $y = e^{\sin(x)+c} \Longrightarrow y' = \cos(x)e^{\sin(x)+c} = \cos(x)y$ nach Kettenregel.

Ist die Anfangsbedingung $y(\pi) = 1$ gegeben, so ist $y(\pi) = e^{0+c} = e^c \overset{!}{=} 1$, also $c = \ln(1) = 0$. Wir erhalten $y(x) = e^{\sin(x)}$ als Lösung der Anfangswertaufgabe. Es gibt noch eine weitere Möglichkeit, diese Lösung zu erhalten: Wir lösen die Gleichung $\int_1^y \frac{1}{u}\, du = \int_\pi^x \cos(t)\, dt$ nach $y$ auf. Dies ergibt $\ln(y) - \ln(1) = \sin(x) - \sin(\pi)$ und also $\ln(y) = \sin(x)$. Daraus folgt direkt $y(x) = e^{\sin(x)}$ als Lösung der Anfangswertaufgabe.

Wie durch die Vorschrift „*Löse die Gleichung* $\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx$ *nach* $y$ *auf*“ tatsächlich stets eine Lösung der DGL $y' = f(x)g(y)$ mit getrennten Variablen entsteht, zeigt der Beweis des folgenden Satzes.

**Satz 2.** *Seien $I$ und $J$ offene Intervalle in $\mathbb{R}$ sowie $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $g\colon J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$. Ferner sei $x_0 \in I$ und $y_0 \in J$. Dann gibt es ein Intervall $I_0 \subset I$ mit $x_0 \in I_0$ und genau eine Lösung $y\colon I_0 \to \mathbb{R}$ der DGL $y' = f(x)g(y)$ mit $y(x_0) = y_0$.*

*Beweis. Existenz:* Definiere Stammfunktionen $G$ von $\frac{1}{g}$ und $F$ von $f$ durch $G(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(u)}\, du$ für alle $y \in J$ und $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\, dt$ für alle $x \in I$, vgl. den Hauptsatz in 2.1. Da $G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$ für alle $y \in J$ ist, besitzt $G$ nach Satz 1 in 2.2 eine differenzierbare Umkehrfunktion $u_G\colon G(J) \to \mathbb{R}$. Es ist $G(y_0) = 0 = F(x_0)$, vgl. 2.4. Da also $G(J)$ ein Intervall ist, das den Punkt $F(x_0)$ enthält und $F$ stetig ist, gibt es ein Intervall $I_0$ um $x_0$ mit $F(I_0) \subset G(J)$. Daher ist das Kompositum $y := u_G \circ F$ auf $I_0$ definiert, und es gilt $y(x) = u_G(F(x))$ für alle $x \in I_0$. Hieraus folgt

$$G(y(x)) = F(x) \quad \text{für alle} \quad x \in I_0\,,$$

da $G$ die Umkehrfunktion von $u_G$ ist. Differenzieren auf beiden Seiten ergibt nach Kettenregel $G'(y(x))y'(x) = F'(x)$, und da es sich bei $G$ und $F$ um Stammfunktionen von $\frac{1}{g}$ und $f$ handelt, folgt $\frac{1}{g(y(x))}y'(x) = f(x)$, was $y'(x) = f(x)\, g(y(x))$ für alle $x \in I_0$ ergibt. Die Funktion $y$ ist also eine Lösung der DGL mit getrennten Variablen auf dem Intervall $I_0$. Es ist $y(x_0) = u_G\big(F(x_0)\big) = u_G\big(G(y_0)\big) = y_0$.

*Eindeutigkeit:* Sei $z\colon I_0 \to \mathbb{R}$ eine weitere Lösung mit $z(x_0) = y_0$. Da $z$ eine Lösung ist, gilt $z'(x) = f(x)\, g(z(x))$ und also $f(x) = \frac{z'(x)}{g(z(x))}$ für alle $x \in I_0$. Nach Definition von $F$ und $G$ sowie nach Substitutionsregel mit der Substitution $u = z(t)$ ergibt sich für jedes $x \in I_0$ die Gleichungskette

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\, dt = \int_{x_0}^x \frac{z'(t)}{g(z(t))}\, dt = \int_{y_0}^{z(x)} \frac{1}{g(u)}\, du = G(z(x))\,.$$

Aus $F(x) = G(z(x))$ folgt nun $z(x) = (u_G \circ F)(x) = y(x)$. $\square$

**Beispiel 2.** Zu lösen ist die Anfangswertaufgabe $y' = y^3\, e^{-3x}$ mit $y(0) = 1$.
**1. Methode:** Es ist $\int \frac{1}{y^3}\, dy = \int e^{-3x}\, dx$, woraus $-\frac{1}{2} y^{-2} = -\frac{1}{3}\, e^{-3x} + c$ folgt. Multiplikation mit $-2$ auf beiden Seiten ergibt $y^{-2} = \frac{2}{3}\, e^{-3x} - 2c$. Anwenden der Umkehrfunktion von $y^{-2}$ auf beiden Seiten ergibt die Lösung $y(x) = \left(\frac{2}{3}\, e^{-3x} - 2c\right)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{2}{3} e^{-3x} - 2c}}$ der DGL $y' = y^3\, e^{-3x}$ für $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}_{>0}$.
Es ist $y(0) = (\frac{2}{3} - 2c)^{-\frac{1}{2}} \overset{!}{=} 1$ also $\frac{2}{3} - 2c = 1$ und daher $2c = -\frac{1}{3}$. Es folgt als Lösung der Anfangswertaufgabe $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{2}{3} e^{-3x} + \frac{1}{3}}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

**Probe:**
$y = \left(\frac{2}{3} e^{-3x} + \frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} \Longrightarrow y' = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} e^{-3x} + \frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2e^{-3x}) = e^{-3x} y^3$ ✓
**2. Methode:** Es ist $\int_1^y \frac{1}{u^3}\, du = \int_0^x e^{-3t}\, dt$, woraus $-\frac{1}{2} \frac{1}{u^2}\Big|_1^y = -\frac{1}{3}\, e^{-3t}\Big|_0^x$ folgt. Also gilt $-\frac{1}{2}\frac{1}{y^2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} e^{-3x} + \frac{1}{3}$. Multiplikation mit $-2$ auf beiden Seiten ergibt $\frac{1}{y^2} - 1 = \frac{2}{3} e^{-3x} - \frac{2}{3}$ und also $\frac{1}{y^2} = \frac{2}{3} e^{-3x} + \frac{1}{3}$. Anwenden der Umkehrfunktion von $\frac{1}{y^2}$ auf beiden Seiten ergibt die Lösung $y(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3} e^{-3x} + \frac{1}{3}}}$ der Anfangswertaufgabe.
Bei beiden Methoden ist zu beachten, dass $y > 0$ sein soll, und deswegen tritt nur die positive Wurzel als Lösung auf.

**Bemerkung.** Wenn $g(y_0) = 0$ für ein $y_0 \in J$ gilt, so ist die konstante Funktion $y\colon I \to \mathbb{R}, x \mapsto y_0$ eine Lösung der DGL $y' = f(x)\, g(y)$.
**Probe:** $y(x) = y_0 \Longrightarrow y'(x) = 0 = f(x) g(y_0) = f(x) g(y(x))$ ✓
In diesem Fall ist die Lösung einer Anfangswertaufgabe nicht immer eindeutig. Sei zum Beispiel $J = \mathbb{R}$ und $y' = \sqrt[3]{y^2}$ mit $y(2) = 0$. Dann ist neben der konstanten Funktion $y(x) = 0$ auch die Funktion $y_2(x) = \frac{1}{27}(x-2)^3$ eine Lösung der Anfangswertaufgabe. Es gibt sogar unendlich viele weitere Lösungen mit $y(2) = 0$, vgl. z. B. [9, S. 154].

## 4.2 Lineare DGL $y' = a(x)y + b(x)$

Wir betrachten zunächst die *homogene lineare DGL* $y' = a(x)\, y$ der Ordnung 1. Diese lässt sich als DGL mit getrennten Variablen behandeln, was wir in die Übungen verlagern. Hier beweisen wir sogleich den folgenden allgemeinen Satz.

**Satz 3.** *Sei $I$ ein Intervall in $\mathbb{R}$, sei $a\colon I \to R$, $x \mapsto a(x)$ eine stetige Funktion und sei $\mathcal{A}\colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathcal{A}(x)$ eine Stammfunktion von $a$. Dann hat jede Lösung der DGL $y' = a(x)y$ auf $I$ die Gestalt $y(x) = ce^{\mathcal{A}(x)}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.*
*Sind $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest vorgegeben, so hat die Anfangswertaufgabe $y' = a(x)\,y$ mit $y(x_0) = y_0$ die eindeutig bestimmte Lösung $y(x) = y_0\,e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}$.*

*Beweis.* Die Funktion $z(x) := ce^{\mathcal{A}(x)}$ ist eine Lösung, denn es ist nach Kettenregel $z'(x) = \mathcal{A}'(x)ce^{\mathcal{A}(x)} = a(x)z(x)$, da $\mathcal{A}'(x) = a(x)$ gilt.
Sei $y(x)$ irgendeine Lösung der DGL $y' = a(x)\,y$ und $\varphi(x) := y(x)\,e^{-\mathcal{A}(x)}$. Dann ist nach der Produktregel

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= y'(x)\cdot e^{-\mathcal{A}(x)} + y(x)\cdot(-a(x))e^{-\mathcal{A}(x)}\\ &= a(x)y(x)\cdot e^{-\mathcal{A}(x)} - y(x)\cdot a(x)e^{-\mathcal{A}(x)}\\ &= 0\end{aligned}$$

und also ist $\varphi(x) = c_0$ eine Konstante. Es folgt $c_0 = y(x)\,e^{-\mathcal{A}(x)}$ und daher $y(x) = c_0\,e^{\mathcal{A}(x)}$ mit einer Konstanten $c_0 \in \mathbb{R}$.
Um die letzte Behauptung zu beweisen, wählen wir als Stammfunktion von $a = a(x)$ die Funktion $\mathcal{A}(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt$. Für jede Lösung $y(x)$ der Anfangswertaufgabe gilt dann $y(x) = ce^{\mathcal{A}(x)}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ und $y(x_0) = y_0$. Hieraus folgt $y_0 = y(x_0) = ce^{\mathcal{A}(x_0)} = ce^0 = c$ und daher $y(x) = y_0e^{\mathcal{A}(x)}$. $\square$

**Beobachtung.** Ist $a : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\mathcal{A} : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $a$, so bilden die Lösungen der homogenen linearen DGL $y' = a(x)y$ einen 1-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\{e^{\mathcal{A}(x)}\}$.

**Beispiel 1.** *(Allometrische DGL)* Bei der *Allometrie* geht es um die Veränderung von Größenverhältnissen $\frac{y}{x}$ im Laufe eines Wachstumsprozesses, z.B. wenn $x$ die Körpergröße und $y$ die Kopfhöhe eines Menschen ist: Vor der Geburt *positiv allometrisch* und danach *negativ allometrisch.*
Die *allometrische DGL* lautet: $y' = k\frac{y}{x}$ mit einer Konstanten $k \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ und $x > 0$. Sie ist also eine homogene lineare DGL $y' = a(x)y$ mit $a(x) = \frac{k}{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Eine Stammfunktion von $a(x)$ ist $\mathcal{A}(x) = k\ln(x)$. Nach Satz 3 hat die DGL die Lösung $y(x) = c\,e^{\mathcal{A}(x)} = c\,e^{k\ln(x)} = c\,x^k$. Diese beschreibt die Proportionsverschiebungen bei gewissen Wachstumsprozessen, vgl. [13, S. 89 f]. Die Konstante $k$ wird auch *allometrischer Exponent* genannt.

**Variation der Konstanten:** Betrachte nun die *inhomogene lineare DGL*

$$y' = a(x)y + b(x)\,.$$

Die zugehörige homogene DGL $y' = a(x)y$ hat nach Satz 3 die *allgemeine Lösung* $y(x) = ce^{\mathcal{A}(x)}$ mit einer Stammfunktion $\mathcal{A}(x)$ von $a(x)$ und einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Der Ansatz $y(x) = c(x)\, e^{\mathcal{A}(x)}$, bei dem sozusagen die Konstante $c$ variiert wird, führt dann zur *allgemeinen Lösung* der DGL $y' = a(x)y + b(x)$, wie sich aus dem Beweis des folgenden Satzes ergibt.

**Satz über die Lösungen von $y' = a(x)y + b(x)$.** *Sei $I$ ein Intervall in $\mathbb{R}$, seien $a, b\colon I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, wobei $b(x) \neq 0$ für mindestens ein $x \in I$ gelte, und sei $\mathcal{A}\colon I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $a$. Dann gilt:*

(a) *Ist $y_s\colon I \to \mathbb{R}$ eine spezielle Lösung der DGL $y' = a(x)y + b(x)$, so hat jede Lösung $y\colon I \to \mathbb{R}$ der DGL die Gestalt*

$$y(x) = ce^{\mathcal{A}(x)} + y_s(x) \quad \textit{mit einer Konstanten } c \in \mathbb{R}\,.$$

(b) *Jede Lösung $y\colon I \to \mathbb{R}$ der DGL $y' = a(x)y + b(x)$ ist von der Form*

$$y(x) = e^{\mathcal{A}(x)} \cdot \int e^{-\mathcal{A}(x)}\, b(x)\, dx\,. \tag{17}$$

(c) *Seien $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ vorgegeben, und sei $\mathcal{A}_0(x) = \int_{x_0}^x a(t)\, dt$. Dann hat die Anfangswertaufgabe $y' = a(x)\, y + b(x)$ mit $y(x_0) = y_0$ die eindeutig bestimmte Lösung*

$$y(x) = e^{\mathcal{A}_0(x)} \Big( y_0 + \int_{x_0}^x e^{-\mathcal{A}_0(t)}\, b(t)\, dt \Big)\,.$$

*Beweis.* **Zu (a):** Sei $y\colon I \to \mathbb{R}$ irgendeine Lösung und $y_s$ eine spezielle Lösung der DGL $y' = a(x)y + b(x)$. Dann gilt $y_s' = a(x)y_s + b(x)$ und also $(y - y_s)' = y' - y_s' = a(x)y + b(x) - \big(a(x)y_s + b(x)\big) = a(x)\,(y - y_s)$. Somit ist $y - y_s$ eine Lösung der homogenen linearen DGL $y' = a(x)y$. Nach Satz 3 ist daher $y(x) - y_s(x) = ce^{\mathcal{A}(x)}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.
**Zu (b):** Die Funktion $z(x) := e^{\mathcal{A}(x)} \cdot \int e^{-\mathcal{A}(x)}\, b(x)\, dx$ ist eine Lösung der DGL $y' = a(x)y + b(x)$, denn nach Produkt- und Kettenregel ist $z'(x) = a(x)e^{\mathcal{A}(x)} \cdot \int e^{-\mathcal{A}(x)}\, b(x)\, dx + e^{\mathcal{A}(x)} \cdot e^{-\mathcal{A}(x)} b(x) = a(x)z(x) + b(x)$.
Sei $y\colon I \to \mathbb{R}$ irgendeine Lösung der DGL $y' = a(x)y + b(x)$. Da $e^{\mathcal{A}(x)} \neq 0$ gilt, können wir $y$ in der Form $y(x) = e^{\mathcal{A}(x)} c(x)$ mit einer differenzierbaren Funktion $c\colon I \to \mathbb{R}$ schreiben. Nach Produktregel folgt

$$y'(x) = \mathcal{A}'(x) e^{\mathcal{A}(x)} c(x) + e^{\mathcal{A}(x)} c'(x) = a(x)\, y(x) + e^{\mathcal{A}(x)} c'(x)\,.$$

Ein Vergleich mit der Gleichung $y'(x) = a(x)\, y(x) + b(x)$ ergibt $b(x) = e^{\mathcal{A}(x)}\, c'(x)$ und also $c'(x) = e^{-\mathcal{A}(x)}\, b(x)$. Es folgt $c(x) = \int e^{-\mathcal{A}(x)}\, b(x)\, dx$. Dies in $y(x) = e^{\mathcal{A}(x)}\, c(x)$ eingesetzt, ergibt die Gleichung (17).

**Zu (c):** Nach (17) in (b) hat jede Lösung der DGL $y' = a(x)y + b(x)$ die Gestalt $y(x) = e^{\mathcal{A}_0(x)} \displaystyle\int e^{-\mathcal{A}_0(x)} b(x)\,dx$. Da sich zwei Stammfunktionen nur um eine Konstante unterscheiden, folgt hieraus

$$y(x) = e^{\mathcal{A}_0(x)} \Big( \int_{x_0}^{x} e^{-\mathcal{A}_0(t)}\, b(t)\, dt + c \Big)$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Da $\mathcal{A}_0(x_0) = 0$ ist, folgt $y_0 = y(x_0) = c$. □

**Beispiel 2.** Man löse die Anfangswertaufgabe $y' = y + x$ mit $y(0) = 1$.
Es ist $y' = a(x)y + b(x)$ mit $a(x) = 1$, also $\mathcal{A}(x) = x$, und $b(x) = x$.
**Nach Satz (a):** Da $a(x) = 1$ konstant ist, lässt sich eine spezielle Lösung $y_s(x)$ leicht finden (vgl. z. B. [13, S. 63]), nämlich $y_s(x) = -1 - x$.
**Probe:** $y_s = -1 - x \implies y_s' = -1 = -1 - x + x = y_s + x$ ✓ Also ist $y(x) = ce^x - 1 - x$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung. Es ist $y(0) = c - 1 \overset{!}{=} 1$ und daher $c = 2$. Dies ergibt die Lösung der Anfangswertaufgabe $y(x) = 2e^x - 1 - x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
**Nach Satz (b):** Aus (17) ergibt sich mit Hilfe partieller Integration $y(x) = e^x \cdot \displaystyle\int e^{-x} x\,dx = e^x(-xe^{-x} - e^{-x} + c) = -x - 1 + ce^x$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Wie oben ergibt sich daraus die Lösung der Anfangswertaufgabe $y(x) = 2e^x - 1 - x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
**Nach Satz (c):** Mit Hilfe von partieller Integration ergibt sich direkt die Lösung der Anfangswertaufgabe $y(x) = e^{x-0}\big(1 + \int_0^x e^{-t+0}\, t\,dt\big) = e^x\big(1 + (-te^{-t} - e^{-t})\big|_0^x\big) = e^x\big(1 - xe^{-x} - e^{-x} + 1\big) = e^x - x - 1 + e^x = 2e^x - x - 1$.

**Beispiel 3.** Man löse die DGL $y' = 2xy + e^{x^2}$. Es ist $y' = a(x)y + b(x)$ mit $a(x) = 2x$ und $b(x) = e^{x^2}$. Mit der Stammfunktion $\mathcal{A}(x) = x^2$ folgt

$$y(x) = e^{\mathcal{A}(x)} \int e^{-\mathcal{A}(x)} b(x)\,dx = e^{x^2} \int e^{-x^2} e^{x^2}\,dx = e^{x^2} \int dx = e^{x^2}(x + c)$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

**Beispiel 4.** Man löse die DGL $y' = \frac{2}{x}\,y + \frac{x}{2}$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$.
Es ist $y' = a(x)y + b(x)$ mit $a(x) = \frac{2}{x}$ und $b(x) = \frac{x}{2}$. Für $\mathcal{A}(x) = 2\ln(x)$ ist $e^{\mathcal{A}(x)} = e^{\ln(x^2)} = x^2$ und $e^{-\mathcal{A}(x)} = (e^{\ln(x)})^{-2} = \frac{1}{x^2}$, vgl. (2), (3) in Kapitel 1. Nach Satz (b) folgt

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\mathcal{A}(x)} \cdot \int e^{-\mathcal{A}(x)}\, b(x)\,dx = x^2 \int \frac{1}{x^2}\,\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\,x^2 \int \frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\,x^2 \Big(\ln(x) + c\Big) \end{aligned}$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

## 4.3 Bernoulli- und Riccati-DGL

Jakob Bernoulli 1654–1705

Die **Bernoulli-DGL** ist von der Form

$y' = f(x)\,y + g(x)\,y^r$ mit $r \in \mathbb{R}$.

Für $r = 0$ oder $r = 1$ ist die DGL linear.

Diese Fälle schließen wir hier also aus.

Wir müssen aber $y > 0$ voraussetzen, damit $y^r$ für jede reelle Zahl $r \neq 0, 1$ definiert ist.

Die Substitution $z = y^{1-r}$ führt zu der linearen DGL

$$(*) \qquad z' = (1-r)f(x)\,z + (1-r)g(x)$$

denn aus $z = y^{1-r}$ folgt $z' = (1-r)y^{-r}y' = (1-r)y^{-r}\big(f(x)y + g(x)y^r\big) = (1-r)f(x)\,z + (1-r)g(x)$.

Sind $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem Intervall $I$ in $\mathbb{R}$, dann hat $(*)$ nach Satz (b) in 4.2 stets eine Lösung $z\colon I \to \mathbb{R}$. Durch Rücksubstitution $y = z^{\frac{1}{1-r}}$ erhält man dann eine Lösung $y\colon I_0 \to \mathbb{R}$ auf einem geeigneten Teilintervall $I_0$ von $I$.

Ist eine Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0 > 0$ für ein $x_0 \in I$ vorgegeben, so ist die Lösung $z\colon I \to \mathbb{R}$ von $(*)$ durch die Anfangsbedingung $z(x_0) = y_0^{1-r}$ eindeutig bestimmt. Ist dann $I_0$ das größte $x_0$ enthaltende Teilintervall von $I$, auf dem $z(x) > 0$ für alle $x \in I_0$ gilt, so erhält man durch Rücksubstitution eine eindeutige Lösung $y\colon I_0 \to \mathbb{R}$ der Bernoulli-DGL mit $y(x_0) = y_0$.

*Ist $r \in \mathbb{Z}$ und $r \neq 0, 1$, so ist auch $y < 0$ zugelassen. Dabei ist für ungerades $r$ mit $y(x)$ auch $-y(x)$ eine Lösung der Bernoulli-DGL.*

**Beispiel 1.** $y' = \frac{4}{x}\,y + x\sqrt{y}$ mit $x > 0$ und $y > 0$. Es ist $y' = f(x)y + g(x)y^r$ mit $f(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = x$ und $r = \frac{1}{2}$. Setze $z := y^{1-r} = y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$ und erhalte die DGL $(*)$

$$z' = (1-r)f(x)\,z + (1-r)g(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{x}\,z + \frac{1}{2}x = \frac{2}{x}z + \frac{x}{2}.$$

Diese DGL hat die Lösung $z = x^2\big(\frac{1}{2}\ln(x) + c\big)$, wie in 4.2, Beispiel 4 ermittelt. Rücksubstitution ergibt $y(x) = z(x)^2 = x^4\big(\frac{1}{2}\ln(x) + c\big)^2$.
**Probe:** $y' = 4x^3\,(\frac{1}{2}\ln(x) + c)^2 + x^4 2(\frac{1}{2}\ln(x) + c)\frac{1}{2x} = \frac{4}{x}\,y + x\sqrt{y}$ ✓

**Beispiel 2.** Zu lösen ist die Anfangswertaufgabe $y' = -\frac{1}{x}\,y + \ln(x)\,y^2$ mit $y(1) = -1$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Es ist $y' = f(x)y + g(x)y^r$ mit $f(x) = -\frac{1}{x}$, $g(x) = \ln(x)$ und $r = 2$. Setze $z := y^{1-r} = y^{-1} = \frac{1}{y}$. Im Hinblick auf die Anfangsbedingung sei $y < 0$ vorausgesetzt.
Die lineare DGL $z' = (1-r)f(x)\,z + (1-r)g(x) = \frac{1}{x}z - \ln(x)$ mit der Anfangsbedingung $z(1) = (-1)^{\frac{1}{1-2}} = -1$ hat nach Satz (c) in 4.2 die Lösung $z(x) = e^{\mathcal{A}_0(x)}\Big(-1 + \displaystyle\int_1^x e^{-\mathcal{A}_0(t)}\,b(t)\,dt\Big)$ mit $\mathcal{A}_0(x) = \ln(t)\big|_1^x = \ln(x)$ und $-\mathcal{A}_0(t) = \ln(\frac{1}{t})$ sowie $b(t) = -\ln(t)$. Es folgt

$$\begin{aligned} z(x) &= x\Big(-1 - \int_1^x \frac{1}{t}\ln(t)\,dt\Big) && \text{nach Umkehrbeziehung (3)} \\ &= x\Big(-1 - \int_0^{\ln(x)} u\,du\Big) && \text{nach Substitutionsregel mit } u = \ln(t) \\ &= -x\Big(1 + \frac{\ln(x)^2}{2}\Big). \end{aligned}$$

Die Lösung der Anfangswertaufgabe ist $y(x) = \dfrac{1}{z(x)} = -\dfrac{2}{x(2+\ln(x)^2)}$.

**Probe:** $y = -\frac{2}{x(2+\ln(x)^2)} \Longrightarrow y' = \frac{2\big((2+\ln(x)^2)+x\,2\ln(x)\,\frac{1}{x}\big)}{\big(x(2+\ln(x)^2)\big)^2} = \frac{2}{x^2(\ln(x)^2+2)} + \frac{4\ln(x)}{\big(x(2+\ln(x)^2)\big)^2} = -\frac{1}{x}y + \ln(x)y^2$ (nach Quotientenregel) ✓

Die Bernoulli-DGL geht nach Heuser [13, S. 129] auf Jakob Bernoulli zurück und also nicht, wie in manchen Büchern steht, auf dessen jüngeren Bruder Johann Bernoulli (1667–1748). Letzterer hat die schon in Kapitel 3.1 erwähnte Riccati-DGL $y' = y^2 + x^2$ entdeckt, vgl. [13, S. 69] zur Geschichte der Riccati-DGL.

Jacopo Francesco Riccati 1676–1754

Die **Riccati-DGL** lautet

$$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x).$$

Ist $f(x) \equiv 0$, so ist die DGL linear.

Ist $h(x) \equiv 0$, so ist die DGL eine Bernoulli-DGL mit $r = 2$.

Diese Fälle schließen wir hier also aus.

Die Riccati-DGL ist im Allgemeinen nicht in geschlossener Form lösbar, d. h. eine Lösung lässt sich nicht mittels endlich vieler Integrationen („Quadraturen“) gewinnen. Kennt man aber bereits eine Lösung $y_p(x)$, genannt *partikuläre Lösung*, so kann man alle Lösungen in der Form $y := y_p + u$ angeben, wobei $u$ die Lösungen der Bernoulli-DGL (19) unten durchläuft.

**Satz 4.** *Seien $f, g, h\colon I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, und sei $y_p\colon I \to \mathbb{R}$ eine partikuläre Lösung der Riccati-DGL*

$$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x)\,. \tag{18}$$

*Ist dann $u\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Bernoulli-DGL*

$$u' = \big(2f(x)\,y_p(x) + g(x)\big)u + f(x)u^2, \tag{19}$$

*so ist $y(x) := y_p(x)+u(x)$ eine Lösung von* (18) *für alle $x \in I$. Ist umgekehrt $y\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Riccati-DGL* (18)*, so ist $u(x) := y(x) - y_p(x)$ eine Lösung der Bernoulli-DGL* (19) *für alle $x \in I$.*

*Beweis.* Sei $u\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (19). Für $y := y_p + u$ gilt dann

$$\begin{aligned}
y' &= y_p' + u' \\
&= \Big[f(x)y_p^2 + g(x)y_p + h(x)\Big] + \Big[\big(2f(x)\,y_p + g(x)\big)u + f(x)u^2\Big] \\
&= f(x)\Big(y_p^2 + 2\,y_p u + u^2\Big) + g(x)\Big(y_p + u\Big) + h(x) \\
&= f(x)y^2 + g(x)y + h(x) \qquad \text{da } y = y_p + u\,.
\end{aligned}$$

Also ist $y$ eine Lösung der Riccati-DGL (18). Sei nun umgekehrt $y$ eine Lösung der Riccati-DGL (18), und sei $u := y - y_p$. Dann ist

$$\begin{aligned}
u' &= y' - y_p' \\
&= f(x)y^2 + g(x)y + h(x) - f(x)y_p^2 - g(x)y_p - h(x) \\
&= f(x)\big(y^2 - y_p^2\big) + g(x)(y - y_p) \\
&= f(x)(y - y_p)(y + y_p) + g(x)(y - y_p) = f(x)u(u + 2y_p) + g(x)u \\
&= f(x)u^2 + 2f(x)y_p u + g(x)u = \big(2f(x)y_p + g(x)\big)u + f(x)u^2.
\end{aligned}$$

Also ist $u$ eine Lösung der Bernoulli-DGL (19). □

**Folgerung.** *Ist $y_p\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Riccati-DGL* (18)*, so erhält man alle Lösungen $y\colon I_0 \to \mathbb{R}$ von* (18) *auf einem geeigneten Teilinterintervall $I_0$ von $I$ in der Form $y = y_p + \frac{1}{z}$, wobei $z$ die Lösungen der linearen DGL $z' = -\big(2f(x)\,y_p(x) + g(x)\big)\,z - f(x)$ durchläuft* (vgl. [15, 22. Satz 2].

**Beispiel 3.** Gegeben sei die Riccati-DGL $y' = (1-x)y^2 + (2x-1)y - x$. Es ist $y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x)$ mit $f(x) = 1-x$ und $g(x) = 2x-1$ sowie $h(x) = -x$. Eine partikuläre Lösung ist $y_p(x) = 1$. Also ist die DGL $z' = -\big(2f(x)\,y_p(x) + g(x)\big)z - f(x) = -\big(2(1-x) + 2x - 1\big)z - (1-x) = -z + x - 1$ zu lösen. Deren allgemeine Lösung ist nach (17) in 4.2 mit Hilfe von partieller Integration für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$z(x) = e^{-x} \int e^x (x-1)\,dx = e^{-x}\big(xe^x - 2e^x + c\big) = x - 2 + ce^{-x}.$$

Nach der Folgerung aus Satz 4 können wir nun alle Lösungen in der Form $y(x) = y_p(x) + \dfrac{1}{z(x)} = 1 + \dfrac{1}{x-2+ce^{-x}}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ angeben, und zwar auf allen Intervallen, in denen der Nenner $\neq 0$ ist.

**Probe:** $y = 1 + \frac{1}{x-2+ce^{-x}} \implies (1-x)y^2 + (2x-1)y - x =$ $\Big[(1-x)\big(1 + \frac{2}{x-2+ce^{-x}} + \frac{1}{(x-2+ce^{x})^2}\big)\Big] + \Big[2x - 1 + \frac{2x-1}{x-2+ce^{-x}}\Big] - x =$ $\frac{1}{x-2+ce^{-x}} + \frac{1-x}{(x-2+ce^{-x})^2} = \frac{x-2+ce^{-x}+1-x}{(x-2+ce^{-x})^2} = \frac{-1+ce^{-x}}{(x-2+ce^{-x})^2} = y'$ ✓

## 4.4 Homogene DGL

**Definition.** Sei $D \subset \mathbb{R}^2$. Eine Funktion $h\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *homogen vom Grad* $n$, wenn $h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n h(x,y)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ und $(x,y) \in D$ gilt. Zum Beispiel ist die Funktion $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \frac{y}{x}$ homogen vom Grad 0. Hiermit hängt der Begriff „homogene DGL“ zusammen.

Seien $I, J$ Intervalle in $\mathbb{R}$ und sei $0 \notin I$. Ferner sei $f\colon J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \text{ und } \frac{y}{x} \in J\}$. Eine *homogene DGL* ist von der Form

$$y' = f\Big(\frac{y}{x}\Big) \quad \text{mit } (x,y) \in D\,.$$

Mit der Substitution $z = \frac{y}{x}$ folgt nach der Produktregel

$$z' = \frac{1}{x}\,y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x}\,f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x}\big(f(z) - z\big).$$

Die DGL $z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$ ist eine DGL mit getrennten Variablen, wobei wir annehmen, dass $f(z) \neq z$ ist; denn anderenfalls wird die DGL $y' = \frac{y}{x}$ direkt nach Satz 3 durch $y(x) = ce^{\ln(x)} = cx$ gelöst.

**Spezielle Riccati-DGL:** Die DGL $y' = ay^2 + \dfrac{b}{x^2}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $x > 0$ führt für $y > 0$ durch die Substitution $u = \frac{1}{y}$ zur *homogenen DGL*

$$u' = -\frac{1}{y^2}\,y' = -\frac{1}{y^2}\Big(ay^2 + \frac{b}{x^2}\Big) = -a - b\Big(\frac{u}{x}\Big)^2.$$

**Beispiel 1.** $y' = \frac{1}{4} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$ für $x > 0$. Die Substitution $z = \frac{y}{x}$ ergibt

$$z' = \frac{1}{x}\big(f(z) - z\big) = \frac{1}{x}\Big(\frac{1}{4} + z^2 - z\Big) = \frac{1}{x}\Big(z - \frac{1}{2}\Big)^2.$$

Dies ist eine DGL mit getrennten Variablen, und es folgt

$$-\frac{1}{z - \frac{1}{2}} = \int \frac{1}{(z - \frac{1}{2})^2}\, dz = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln(x) + c$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Auflösen nach $z$ ergibt $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln(x)+c}$ für $x > e^{-c}$. Rücksubstitution ergibt: $y = xz = \frac{1}{2}x - \frac{x}{\ln(x)+c}$.

**Probe:** Aus $y = \frac{1}{2}x - \frac{x}{\ln(x)+c}$ folgt nach Qutientenregel $y' = \frac{1}{2} - \frac{\ln(x)+c-1}{(\ln(x)+c)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln(x)+c} + \frac{1}{(\ln(x)+c)^2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\ln(x)+c}\right)^2 + \frac{1}{4} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{1}{4}$ ✓

**Beispiel 2.** Wir lösen die spezielle Riccati-DGL

$$y' = -\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{x^2} \quad \text{mit} \quad x > 0\,,\ y \neq 0\,,$$

also die DGL $y' = ay^2 + \frac{b}{x^2}$ mit $a = -\frac{1}{4}$ und $b = -1$. Substitution $u = \frac{1}{y}$ führt zur homogenen DGL

$$u' = -a - b\Big(\frac{u}{x}\Big)^2 = \frac{1}{4} + \Big(\frac{u}{x}\Big)^2.$$

Diese hat nach Beispiel 1 die Lösung $u = \frac{x}{2} - \frac{x}{\ln(x)+c} = \frac{x\ln(x)+cx-2x}{2(\ln(x)+c)}$. Rücksubstitution ergibt $y = \frac{1}{u} = \frac{2(\ln(x)+c)}{x\ln(x)+cx-2x}$ für $x > e^{2-c}$.

## 4.5 DGL $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$

mit $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ und $\alpha, \beta, \gamma$ nicht alle 0. Wir unterscheiden fünf Fälle.

**1. Fall:** Für $b = 0 = \beta$ ist die DGL vom Typ $y' = f_1(x)$ mit $f_1(x) = f\left(\frac{ax+c}{\alpha x+\gamma}\right)$ und wird also durch $y(x) = \int f_1(x)\, dx$ gelöst.

**2. Fall:** Für $c = 0 = \gamma$ ist die DGL von der Form $y' = f\left(\frac{ax+by}{\alpha x+\beta y}\right)$ und also eine homogene DGL, die in 4.4 schon behandelt wurde, denn es ist $y' = f_1\left(\frac{y}{x}\right)$ mit $f_1 = f \circ g$ und $g\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{a+b\frac{y}{x}}{\alpha+\beta\frac{y}{x}}$ für $x \neq 0$.

**3. Fall:** Es ist $\alpha = \beta = 0$ und $b, \gamma \neq 0$ und also die DGL von der Form $y' = f(ax + by + c)$. Die Substitution $z = ax + by + c$ ergibt die DGL

$$z' = a + by' = a + bf(z)\,.$$

Dies ist eine DGL mit getrennten Variablen der Form $z' = g(z)$.

**Beispiel.** Es ist $y' = (x+y)^2 = f(ax+by+c)$ mit $a = 1\,,\ b = 1\,,\ c = 0$ und $f(x+y) = (x+y)^2$. Die Substitution $z = x+y$ führt auf die DGL

$$z' = 1 + f(z) = 1 + z^2\,.$$

Nach 4.1 ist $\int \frac{1}{1+z^2}\,dz = \int dx$, also $\arctan(z) = x + C$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Es folgt $z = \tan(x+C)$. Nach Rücksubstitution $y = z - x$ erhält man $y = \tan(x+C) - x\,.$

**Probe.** $y = \tan(x+C) - x \Longrightarrow y' = 1 + \tan^2(x+C) - 1 = (x+y)^2 \ \checkmark$

Ist eine Anfangsbedingung $y(0) = 1$ vorgegeben, so folgt $y(0) = \tan(C) \overset{!}{=} 1$ und also $C = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Die Lösung der Anfangswertaufgabe ist also $y(x) = \tan(x + \frac{\pi}{4}) - x$ für alle $x \in \left]-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.

**4. Fall:** Es ist $\det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = 0$ und $\alpha\,,\ \beta$ nicht beide 0. Dann gibt es eine Zahl $\lambda$ mit $a = \lambda\alpha$ und $b = \lambda\beta\,.$ (Denn es ist $a\beta = b\alpha$ und also $\lambda = \frac{a}{\alpha}$, falls $\alpha \neq 0\,,$ und $\lambda = \frac{b}{\beta}$, falls $\alpha = 0\,.$) Es folgt $\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma} = \frac{\lambda\alpha x+\lambda\beta y+\lambda\gamma+c-\lambda\gamma}{\alpha x+\beta y+\gamma} = \lambda + \frac{c-\lambda\gamma}{\alpha x+\beta y+\gamma}$, was auf den 3. Fall führt.

**5. Fall:** Es ist $\det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \neq 0$. Dann hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

genau eine Lösung $(x_0, y_0)$, nämlich den Schnittpunkt der beiden durch die Gleichungen gegebenen Geraden im $x, y$-Koordinatensystem. Der Schnittpunkt wird durch die Verschiebung

$$t := x - x_0 \qquad \text{und} \qquad u := y - y_0$$

zum Nullpunkt eines neuen Koordinatensystems. In dem neuen System wird eine Lösung $y(x)$ durch die Funktion $u(t) := y(t + x_0) - y_0$ beschrieben, und die DGL wird zu

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= y'(t+x_0) = f\left(\frac{a(t+x_0) + b(u+y_0) + c}{\alpha(t+x_0) + \beta(u+y_0) + \gamma}\right) \\ &= f\left(\frac{at+bu}{\alpha t+\beta u}\right) \quad \text{da } (x_0, y_0) \text{ obiges System löst.} \end{aligned}$$

Damit ist die DGL auf den 2. Fall zurückgeführt.

In 5.1 werden wir das Beispiel $y' = \frac{x-y+1}{x+y+1}$ auf diese Weise lösen und danach zum Vergleich in impliziter Form noch einmal.

## 4.6 Übersichtstabelle

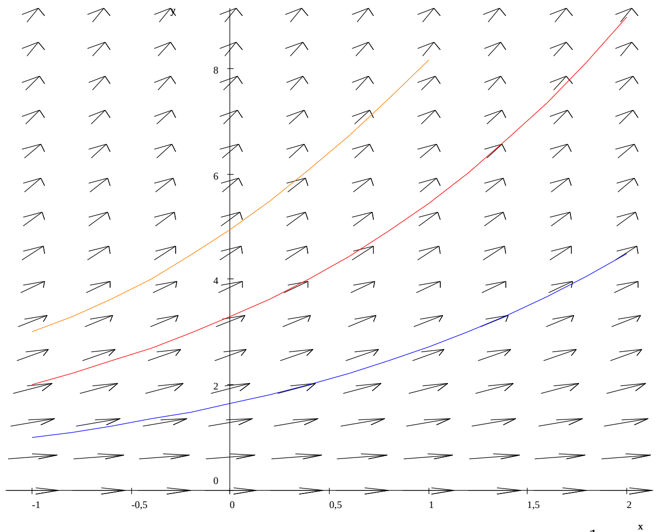
| Typ | DGL | Lösung oder Lösungsweg |
|---|---|---|
| I | $y' = f(x)$ | $y = \int f(x)\,dx$ nach Hauptsatz in 2.1 |
| II | $y' = a(x)\,y$<br>homogene lineare DGL | $y = ce^{\mathcal{A}(x)}$ wobei $\mathcal{A}'(x) = a(x)$ und $c \in \mathbb{R}$ konstant |
| III | $y' = a(x)\,y + b(x)$<br>lineare DGL | $y = e^{\mathcal{A}(x)} \cdot \int e^{-\mathcal{A}(x)}\, b(x)\,dx$<br>wobei $\mathcal{A}'(x) = a(x)$ |
| IV | $y' = f(x)\,y + g(x)\,y^r$<br>$r \neq 1$, Bernoulli-DGL | Substitution: $z = y^{1-r}$ ergibt Typ III:<br>$z' = (1-r)f(x)\,z + (1-r)g(x)$ |
| V | $y' = f(x)\,g(y)\,,$ DGL<br>mit getrennten Variablen | Löse folgende Gleichung nach $y$ auf:<br>$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx$ |
| VI | $y' = g(y)$<br>(Spezialfall von Typ V) | Löse folgende Gleichung nach $y$ auf:<br>$\int \frac{1}{g(y)} dy = x + c$ |
| VII | $y' = f(\frac{y}{x})$<br>homogene DGL | Substitution: $z = \frac{y}{x}$ ergibt Typ V:<br>$z' = \frac{1}{x}\,(f(z) - z)$ |
| VIII | $y' = ay^2 + \frac{b}{x^2}\,,\ a, b \in \mathbb{R}$<br>spezielle Riccati-DGL | Substitution: $u = \frac{1}{y}$ ergibt Typ VII:<br>$u' = -a - b\,(\frac{u}{x})^2$ |
| IX | $y' = f(ax + by + c)$<br>$a, b, c \in \mathbb{R}$ | Substitution: $z = ax + by + c$ ergibt<br>Typ VI: $z' = a + b\,f(z)$ |
| X | $y' = f\big(\frac{ax+by}{\alpha x+\beta y}\big)$<br>$a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ | Setze $f_1 = f \circ g$ mit $g(\frac{y}{x}) = \frac{a+b\frac{y}{x}}{\alpha+\beta\frac{y}{x}}$<br>ergibt Typ VII: $y' = f_1(\frac{y}{x})$ |

## 4.7 Verlauf von Lösungskurven

Wir betrachten eine DGL der Form $y' = f(x, y)$ mit einer stetigen Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ und nennen den Graph einer Lösung $y = y(x)$ eine *Lösungskurve*. Die Steigung der Tangente in jedem Punkt $(x, y(x))$ einer Lösungskurve ist durch $f(x, y(x))$ gegeben, wie man der DGL ansehen kann.

Zu der DGL $y' = f(x, y)$ gehört ein *Richtungsfeld*, das aus den Tripeln $(x, y, f(x, y))$ mit $(x, y) \in D$ besteht. Diese nennt man *Linienelemente*.

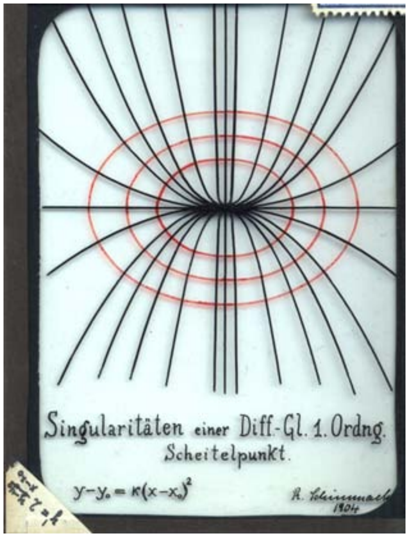
Man skizziert das Richtungsfeld, in dem man in den Punkten $(x, y) \in D$ jeweils ein kleines Geradenstück mit der Steigung $f(x, y)$ einzeichnet. Eine Lösungskurve verläuft dann so durch das Richtungsfeld, dass in jedem ihrer Punkte $(x, y(x))$ das zugehörige Linienelement tangential an der Kurve liegt. Umgekehrt kann man in einfachen Fällen aus dem Richtungsfeld Lösungen erkennen.




Das Richtungsfeld der DGL $y' = \alpha y$ mit $\alpha = \frac{1}{2}$.

Die Pfeile sind Tangenten an den Lösungskurven. Die Form des Richtungsfeldes legt bereits den Lösungsansatz $y(x) = ce^{\alpha x}$ nahe. Auch wenn eine DGL $y' = f(x, y)$ nicht geschlossen lösbar ist, wird durch das Richtungsfeld der ungefähre Verlauf von Lösungskurven veranschaulicht.
Zu einer Schar von Lösungskurven der DGL $y' = f(x, y)$ betrachtet man häufig auch die sog. *Orthogonaltrajektorien*. Diese schneiden die Lösungskurven der Schar in einem rechten Winkel, haben also in jedem Punkt $(x, y) \in D$ mit $f(x, y) \neq 0$ die Tangentensteigung $-\frac{1}{f(x,y)}$ . Die Orthogonaltrajektorien erfüllen daher die DGL $z' = -\frac{1}{f(x,z)}$ . Zum Beispiel sind die Kraftlinien eines ebenen elektrischen Feldes Orthogonaltrajektorien der Äquipotentiallinien, vgl. [13, S. 32 f].

Wir studieren nun noch den Verlauf von Scharen von Lösungskurven und ihren Orthogonaltrajektorien am Beispiel der DGL $y' = \frac{\alpha y}{x}$ für $\alpha = 1, 2, -2$ . Der Punkt $(0, 0)$ ist eine *Singularität* (*singulärer Punkt*) der DGL, d. h. er ist Nullstelle von Zähler und Nenner. Dabei interessieren wir uns auch für den *Typ der Singularität*.


### Scharen von Lösungskurven für $\boldsymbol{y' = \alpha \frac{y}{x}}$ mit $\boldsymbol{\alpha = 1, 2, -2}$

Die DGL $y' = \alpha \frac{y}{x}$ hat für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und für $x \in \mathbb{R}_{<0}$ die allgemeine Lösung $y(x) = cx^\alpha$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

**Probe.** $y = cx^\alpha \Longrightarrow y' = c\alpha x^{\alpha-1} = \alpha \, \frac{cx^\alpha}{x} = \alpha \, \frac{y}{x}$ ✓

Wir erhalten in den beiden durch $x > 0$ und $x < 0$ definierten Halbebenen für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ jeweils folgende Scharen von Lösungskurven.

$\boldsymbol{\alpha = 1}$**:** Die vom singulären Punkt ausgehenden Halbgeraden $y = cx$ .

$\boldsymbol{\alpha = 2}$**:** Die vom singulären Punkt ausgehenden Halbparabeln $y = cx^2$.

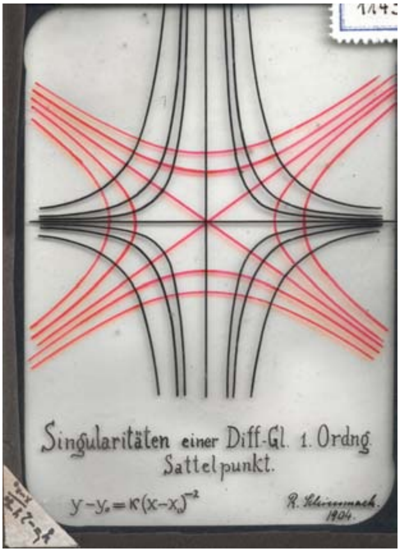
$\boldsymbol{\alpha = -2}$**:** Die Hyperbelzweige $y = c\,\frac{1}{x^2}$ mit den durch $y = 0$ und $x = 0$ gegebenen Geraden als Asymptoten, (s. Dia auf der nächsten Seite). Auch die Asymptote $y = 0$ ist eine Lösung.

**Typ der Singularität** Zur DGL $y' = \frac{\alpha y}{x}$ gehört die sog. *charakteristische Gleichung* $\lambda^2 - (\alpha+1)\lambda + \alpha = 0$ mit den Lösungen $\lambda_{1,2} = \frac{\alpha+1}{2} \pm \sqrt{\frac{(\alpha+1)^2}{4} - \alpha}$ (auf die charakteristische Gleichung kommen wir noch zurück).

$\boldsymbol{\alpha = 1}$**:** Es ist $\lambda_{1,2} = 1$ eine zweifache Lösung. Der singuläre Punkt ist ein sog. *Strahlpunkt.*

$\boldsymbol{\alpha = 2}$**:** Es sind $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 1$ zwei verschiedene reelle Lösungen mit demselben Vorzeichen. Der singuläre Punkt wird *Scheitelpunkt* oder *Knotenpunkt* genannt.

$\boldsymbol{\alpha = -2:}$ Es sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$ zwei verschiedene reelle Lösungen mit unterschiedlichem Vorzeichen. Der singuläre Punkt ist ein *Sattelpunkt.*




### Die DGL $\boldsymbol{y' = \frac{-x}{\alpha y}}$ der Orthogonaltrajektorien für $\boldsymbol{\alpha = 1, 2, -2}$

Die DGL $y' = \frac{-x}{\alpha y}$ hat für $y > 0$ und $y < 0$ nach Typ V in 4.6 die implizit geschriebene Lösung $x^2 + \alpha y^2 = c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}_{>0}$ für $\alpha = 1, 2$ und $c \in \mathbb{R}$ für $\alpha = -2$.

**Probe.** Differenzieren auf beiden Seiten der Gleichung $x^2 + \alpha y^2 = c$ ergibt $2x + 2\alpha y y' = 0$ und also $y' = \frac{-x}{\alpha y}$ ✓

Wir erhalten in der oberen Halbebene $y > 0$ und in der unteren Halbebene $y < 0$ jeweils folgende Scharen von Lösungskurven.

$\boldsymbol{\alpha = 1:}$ Konzentrische Halbkreise mit Radius $\sqrt{c}$ für $c \in \mathbb{R}_{>0}$ .

$\boldsymbol{\alpha = 2:}$ Halbellipsen um den singulären Punkt mit Achsenlänge $\sqrt{c}$ auf der $x$-Achse und $\sqrt{\frac{c}{2}}$ auf der $y$-Achse für $c \in \mathbb{R}_{>0}$ .

$\boldsymbol{\alpha = -2:}$ Hyperbelzweige, die die $x$-Achse in $\sqrt{c}$ und $-\sqrt{c}$ für $c > 0$ treffen. Auch deren Asymptoten sind Lösungen, denn für $c = 0$ folgt $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,x$. Für $c < 0$ folgt $y = \pm\sqrt{\frac{x^2 - c}{2}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und wir erhalten die beiden Scharen von Lösungskurven, die die $y$-Achse in $\sqrt{\frac{-c}{2}}$ und $-\sqrt{\frac{-c}{2}}$ treffen.

**Typ der Singularität:** Zur DGL $y' = -\frac{x}{\alpha y}$ gehört die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + \alpha = 0$ mit den Lösungen $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\alpha}$.

$\boldsymbol{\alpha = 1}$ **und** $\boldsymbol{\alpha = 2}$**:** Die Lösungen $\lambda_{1,2} = \pm i$ bzw. $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}\,i$ sind jeweils konjugiert komplex und rein imaginär. Der singuläre Punkt ist ein *Mittelpunkt*, der von den Kreisen bzw. Ellipsen eingeschlossen wird.

$\boldsymbol{\alpha = -2}$**:** Die beiden Lösungen $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ der charakteristischen Gleichung sind reell und haben unterschiedliches Vorzeichen. Der singuläre Punkt ist also wieder ein Sattelpunkt.

Damit haben wir alle auf den obigen Dias vorkommenden Typen von Singularitäten erfasst.

Die drei Dias sind 1904 von Rudolf Schimmack (1881-1912) erstellt. Er war Assistent bei Felix Klein und Lehrer in Göttingen und hat sich dank der Unterstützung von Klein im Jahr 1911 als Erster in Deutschland in Mathematikdidaktik habilitieren können. Die Dias wurden Anfang des vorigen Jahrhunderts in den Vorlesungen gezeigt. In der unteren linken Ecke steht jeweils die DGL $y' = \alpha\,\frac{y-y_0}{x-x_0}$ mit $\alpha = 1, 2, -2$. Diese DGL hat gemäß Typ V in 4.6 die auf den Dias angegebene Lösung $y - y_0 = \kappa(x - x_0)^\alpha$. Wir haben hier wie im 5. Fall in 4.5 durch Verschiebung die Singularität $(x_0, y_0)$ in den Nullpunkt eines neuen Koordinatensystems gebracht, und dann die DGL $\frac{du}{dt} = \frac{\alpha u}{t}$ gelöst. Durch Rückverschiebung kommt jeweils die von Schimmack angegebene Lösung heraus. Der Typ einer Singularität ändert sich durch das Verschieben nicht.

**Bemerkung zur charakterischen Gleichung:** Zur DGL $y' = \frac{by+dx}{\beta y+\delta x}$, wobei $b, d, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ und $\det(A) \neq 0$ für $A = \begin{pmatrix} b & d \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ gilt, gehört die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - \mathrm{spur}(A)\lambda + \det(A) = 0$. Dabei ist $\mathrm{spur}(A)$ die Summe der Diagonalelemente.
Schreibt man die DGL in der Form $y' = \frac{dx+by}{\delta x+\beta y}$, so bildet man die charakteristische Gleichung gemäß $\lambda^2 - (b+\delta)\lambda + b\delta - d\beta = 0$.

**Beispiel.** Zur DGL $y' = \frac{y+x}{-y+x}$ mit dem Nullpunkt als singulären Punkt gehört die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ mit den konjugiert komplexen, nicht rein imaginären Lösungen $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Man nennt den Nullpunkt dann auch einen *Strudelpunkt*.

Die genannten Typen von Singularitäten finden sich z. B. in [4, Teil IV.IV], [14, § 17], und in einem anderen Kontext z. B. in [13, Nr. 66] und [21, §9,10]. Wir kommen in Abschnitt 9.4 unten noch einmal darauf zurück und interessieren uns dann auch für das Verhalten von Lösungskurven in Nähe einer Singularität.

## 4.8 Aufgaben 7 − 14

**Aufgabe 7.** Man löse für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ die Anfangswertaufgabe

$$y' = -\frac{1}{x^2}\, e^{-y} \quad \text{mit} \quad y(2) = 0$$

und bestätige das Ergebnis durch eine Probe.

**Aufgabe 8.** Sei $I$ ein Intervall in $\mathbb{R}$, und sei $a\colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a(x)$ eine stetige Funktion. Man löse die homogene lineare DGL $y' = a(x)y$ als DGL mit getrennten Variablen wie in 4.1. Dabei ist nach den Fällen $y \in \mathbb{R}_{>0}$ und $y \in \mathbb{R}_{<0}$ zu unterscheiden.

**Aufgabe 9.** Seien $s, a \in \mathbb{R}_{>0}$ Konstanten. Man löse für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ die DGL $y' = \dfrac{ay^2}{sx^2}$ . Kommt dabei tatsächlich die Michaelis-Menten-Funktion $y(x) = \frac{sx}{x+a}$ aus Aufgabe 6 heraus?

**Aufgabe 10.** (Zur Wiederholung) Man berechne mittels Substitution und Partialbruchzerlegung das Integral

$$\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}\, dx\,.$$

(Die Substitution $u = e^x$ ergibt formal $du = e^x\, dx$ und also $dx = u^{-1} du$.)

**Aufgabe 11.** Man löse für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ die Anfangswertaufgabe

$$y' = \cos(x)\, y + \frac{1}{2\sqrt{x}}\, e^{\sin(x)} \quad \text{mit} \quad y(\pi) = 0$$

und bestätige das Ergebnis durch eine Probe.

**Aufgabe 12.** Man löse für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ die Anfangswertaufgabe

$$y' = -\frac{1}{x}\, y + x^2 y^2 \quad \text{mit} \quad y(1) = -1$$

und bestätige das Ergebnis durch eine Probe.

**Aufgabe 13.** Man löse die Anfangswertaufgabe

$$y' = y^2 - (2x+1)y + (1 + x + x^2) \quad \text{mit} \quad y(0) = -1\,.$$

Dabei ist auch das Lösungsintervall anzugeben. (Eine partikuläre Lösung der DGL ist $y_p(x) = x$ .)

**Aufgabe 14.** (Zur Wiederholung) Man löse die Anfangswertaufgabe

$$y' = -\frac{x+3}{(x^2 + 6x + 8)^2} \quad \text{mit} \quad y(0) = \frac{1}{4}\,.$$

Das Lösungsintervall ist dabei anzugeben.

# 5 Implizite DGL

Eine *implizite* DGL 1 .Ordnung ist von der Form $F_1(x, y, y') = 0$ mit einer Funktion $F_1\colon D \to \mathbb{R}$ auf einer Menge $D \subset \mathbb{R}^3$. Auch in Fällen, in denen sich die DGL nach $y'$ auflösen lässt, kann es günstiger sein, sie in impliziter Form zu belassen. Das trifft insbesondere für eine *exakte* DGL zu.

## 5.1 Exakte DGL

**Definition.** Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet (also $D$ offen und zusammenhängend), und seien $P, Q\colon D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Eine DGL der Form

$$P(x, y) + Q(x, y)\, y' = 0 \tag{20}$$

heißt *exakt*, wenn es eine Funktion $F\colon D \to \mathbb{R}$ gibt, die mit stetigen partiellen Ableitungen $F_x := \frac{\partial F}{\partial x}$ und $F_y := \frac{\partial F}{\partial y}$ versehen ist und für die

$$F_x = P \quad \text{sowie} \quad F_y = Q \tag{21}$$

gilt. Eine solche Funktion heißt dann *Stammfunktion* von (20).

**Satz 5.** *Die DGL* (20) *sei exakt und $F$ sei eine Stammfunktion. Dann ist eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion $y = y(x)$ genau dann eine Lösung von* (20)*, wenn $(x, y(x)) \in D$ und $F(x, y(x)) = c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ für alle $x \in I$ gilt.*

*Beweis.* Für die totale Ableitung von $F$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx}\big(x, y(x)\big) &= F_x\big(x, y(x)\big) + F_y\big(x, y(x)\big)\, y' \quad \text{nach Kettenregel} \\ &= P\big(x, y(x)\big) + Q\big(x, y(x)\big)\, y' \quad \text{nach (21).} \end{aligned}$$

Ist nun $y(x)$ eine Lösung von (20), so folgt $\frac{dF}{dx}\big(x, y(x)\big) = 0$ und $F(x, y)$ ist daher konstant. Ist umgekehrt $F(x, y)$ konstant, so ist $\frac{dF}{dx}\big(x, y(x)\big) = 0$, und die obige Rechnung zeigt, dass $y(x)$ eine Lösung von (20) ist. □

**Fazit.** *Wenn $F(x, y)$ eine Stammfunktion der DGL* (20) *ist, so sind alle Lösungen $y = y(x)$ von* (20) *durch die Gleichung $F(x, y) = c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ gegeben. (Diese Gleichung braucht nicht nach $y$ auflösbar zu sein.)*

**Bemerkung.** Wenn $F$ eine Stammfunktion ist und die partiellen Ableitungen $P_y$ sowie $Q_x$ existieren und stetig sind, dann folgt nach dem Satz von Schwarz $F_{xy} = F_{yx}$ (vgl. [9, S. 59]), und (21) ergibt

$$P_y = F_{xy} = F_{yx} = Q_x\,.$$

Wenn $D$ einfach zusammenhängend – z. B. ein offenes Rechteck – ist, so folgt umgekehrt aus der *Integrabilitätsbedingung*

$$P_y = Q_x$$

die Existenz einer Stammfunktion $F$ und damit die Exaktheit der DGL (20). Dies ergibt sich aus einem Satz der Analysis, den wir hier nicht beweisen, vgl. z. B. [12, Satz 182.2].

**Beispiel.** Die DGL $(y - x - 1) + (x + y + 1)y' = 0$ ist auf $\mathbb{R}^2$ exakt, denn für $P(x, y) = y - x - 1$ ist $P_y = 1$ und für $Q(x, y) = x + y + 1$ ist $Q_x = 1$. Nach $y'$ aufgelöst ergibt sich die explizite DGL $y' = \frac{x-y+1}{x+y+1}$ vom Typ, wie er im 5. Fall in 4.5 behandelt worden ist. Diese DGL lösen wir zunächst und danach zum Vergleich die exakte Version.

**Lösung der expliziten DGL $y' = \frac{x-y+1}{x+y+1}$ gemäß 5. Fall in 4.5.**

**1. Schritt:** Das lineare Gleichungssystem $\begin{array}{r} x - y + 1 = \ 0 \\ x + y + 1 = \ 0 \end{array}$ hat die Lösung $(x_0, y_0) = (-1, 0)$. Die Verschiebung $t = x + 1$ (und $u = y$) führt zur DGL $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t - y}{t + y} = \dfrac{1 - \frac{y}{t}}{1 + \frac{y}{t}} = f\big(\dfrac{y}{t}\big)$ vom Typ VII in 4.6.

**2. Schritt:** Substituiere $z = \frac{y}{t}$ und löse die DGL

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{1}{t}\Big(f(z) - z\Big) = \frac{1}{t}\left(\frac{1 - z}{1 + z} - z\right) \\ &= \frac{1}{t}\left(\frac{1 - 2z - z^2}{1 + z}\right) = \frac{-1}{t}\left(\frac{-1 + 2z + z^2}{1 + z}\right) \\ &= \frac{-2}{t}\left(\frac{-1 + 2z + z^2}{2 + 2z}\right) \quad \text{(im Nenner steht die Ableitung des Zählers).} \end{aligned}$$

Gemäß Typ V in 4.6 ist $\displaystyle\int \left(\frac{2 + 2z}{-1 + 2z + z^2}\right) dz = \int \frac{-2}{t}\, dt$. Für Argumente $> 0$ folgt nach Logarithmusregel (vgl. Aufgabe 2)

$$\ln(-1 + 2z + z^2) = -2\ln(t) + c,$$

was $-1 + 2z + z^2 = C\frac{1}{t^2}$ mit einer Konstanten $C > 0$ ergibt. Nach Einsetzen von $z = \frac{y}{t}$ folgt $-1 + 2\dfrac{y}{t} + \dfrac{y^2}{t^2} = C\dfrac{1}{t^2}$ und damit $y^2 + 2ty - t^2 = C$.

**3. Schritt:** Setze $t = x + 1$ ein und erhalte die implizit geschriebene Lösung $y^2 + 2xy + 2y - x^2 - 2x = C_1$ mit $C_1 = C + 1$.

**Lösung der exakten DGL $(y - x - 1) + (x + y + 1)y' = 0$.**
Es ist $P(x, y) = y - x - 1$ und $Q(x, y) = x + y + 1$. Da die DGL exakt ist, gibt es eine Stammfunktion $F(x, y)$. Nach (21) gilt $F_x = y - x - 1$ und also

$$(*) \qquad F(x, y) = \int (y - x - 1)\, dx = yx - \frac{x^2}{2} - x + h(y)$$

mit einer „Störfunktion" $h(y)$, die nicht von $x$ abhängt und hier an die Stelle der Integrationskonstanten tritt. Es folgt

$$\begin{aligned} F_y(x, y) &= x + h'(y) \\ &= Q(x, y) \quad \text{da } F_y(x, y) = Q(x, y) \text{ nach (21) gilt} \\ &= x + y + 1\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $h'(y) = y + 1$, also $h(y) = \frac{y^2}{2} + y$ und damit nach $(*)$

$$F(x, y) = yx - \frac{x^2}{2} - x + h(y) = yx - \frac{x^2}{2} - x + \frac{y^2}{2} + y\,.$$

Nach Satz 5 erhalten wir als Lösung $y^2 + 2xy + 2y - x^2 - 2x = C_2$ mit einer Konstanten $C_2 \in \mathbb{R}$, wie oben schon ermittelt.

**Bemerkung.** 1. Ist die DGL $P(x, y) + Q(x, y)\, y' = 0$ nicht exakt, so kann man versuchen, eine geeignete Funktion $M(x, y)$ so zu bestimmen, dass die DGL $M(x, y)P(x, y) + M(x, y)Q(x, y)y' = 0$ exakt ist und dieselben Lösungen wie die Ausgangs-DGL hat, vgl. z. B. [13, S. 100]. Die Funktion $M(x, y)$ heißt dann *integrierender Faktor* oder *Eulerscher Multiplikator*.

2. Die DGL $P(x, y) + Q(x, y)\, y' = 0$ sei exakt. Dann ist für jeden Punkt $(x_0, y_0) \in D$ mit $Q(x_0, y_0) \neq 0$ die Anfangswertaufgabe mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von $x_0$ eindeutig durch eine Funktion $y = y(x)$ lösbar. Die Lösung ist dann $F(x, y) = F(x_0, y_0)$. Dies folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, wobei an den Definitionsbereich $D$ noch passende Voraussetzungen gestellt werden, vgl. z. B. [13, S. 95].

3. Eine exakte DGL wird auch in der Form $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$ geschrieben, um einen symmetrischen Ausdruck zu erhalten. Manchmal kann es günstiger sein, eine Lösungsfunktion $x(y)$ der DGL

$$P(x, y)\frac{dx}{dy} + Q(x, y) = 0$$

zu ermitteln.

## 5.2 Beispiele für $F(x,y,y')=0$

Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $g\colon I\to\mathbb{R}\,,\ t\mapsto g(t)$ eine streng monotone Funktion, die mit einer stetigen Ableitung versehen sei.

**DGL vom Typ $g(y')-x=0$ :** Die Funktion $g$ besitzt eine stetige Umkehrfunktion $u_g$ , und die Gleichung $g(t)=x$ lässt sich für $x\in g(I)$ nach $t$ auflösen: Es ist $t=u_g(x)$ . Setzen wir $t=y'$ ein, so erhalten wir die DGL $y'=u_g(x)$ und gemäß Typ I in 4.6 die Lösung $y=\int u_g(x)\,dx$ .

**Beispiel 1.** Zur DGL $e^{y'}-x=0$ gehört die durch $g(t)=e^t$ für alle $t\in\mathbb{R}$ definierte Funktion mit der Umkehrfunktion $u_g(x)=\ln(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}_{>0}$ . Die DGL wird also auf $\mathbb{R}_{>0}$ durch $y(x)=\int\ln(x)\,dx=x\ln(x)-x+c$ mit einer Konstanten $c\in\mathbb{R}$ gelöst. (Das Integral wurde schon als Beispiel 1 in Abschnitt 2.4 berechnet.)
**Probe:** $y=x\ln(x)-x+c\Longrightarrow y'=\ln(x)+x\frac{1}{x}-1=\ln(x)\Longrightarrow e^{y'}=x$ ✓

**DGL vom Typ $g(y')-y=0$ :** Dies geht analog. Lösen wir die Gleichung $g(t)=y$ nach $y$ auf, so folgt $t=u_g(y)$ und es ist die DGL $y'=u_g(y)$ vom Typ VI in 4.6 zu lösen.

### Die Clairaut-DGL $xy'+g(y')-y=0$

Alexis Claude Clairaut 1713–1765

Benutze die Methode „Integrieren durch Differenzieren“:
Differenzieren der Clairaut-DGL ergibt $y'+xy''+g'(y')y''-y'=0$ und also $\big(x+g'(y')\big)y''=0$. Im Fall $y''=0$ ist $y'=c$ konstant, und Einsetzen in die Clairaut-DGL ergibt die Geradenschar $\boxed{y=cx+g(c)}$ als Lösung.
Im Fall $x+g'(y')=0$ setzen wir $t:=y'$ und $x=-g'(t)$ in die Clairaut-DGL ein und erhalten $y=-g'(t)t+g(t)$. Es gibt also noch eine *singuläre Lösung* in *Parameterdarstellung*:

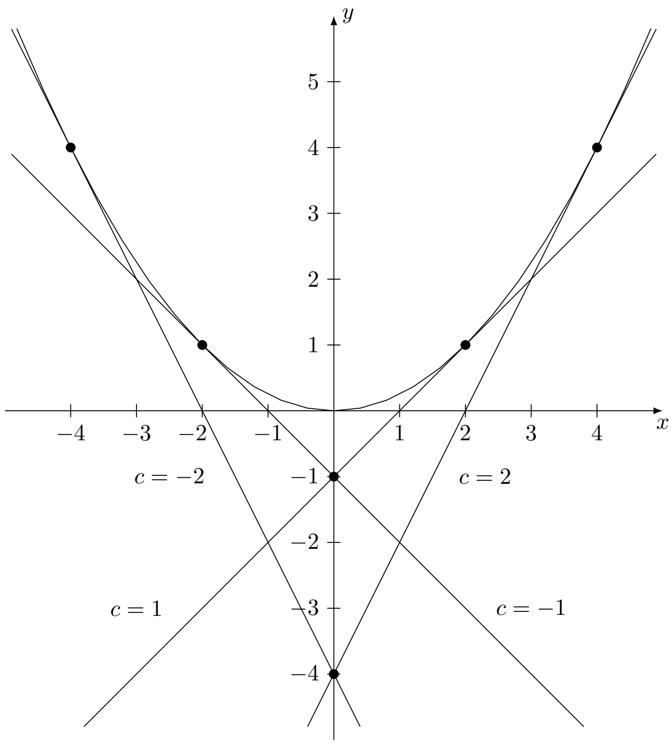
$$x=-g'(t)\quad\text{und}\quad y=-t\,g'(t)+g(t)\quad\text{für}\ \ t\in I\,. \tag{22}$$

Für $c\in I$ sind die Geraden $y(x)=cx+g(c)$ die Tangenten an die Kurve (22). Lässt man auf einer oder zwei Seiten der Kurve (22) ein Endstück weg und ersetzt dieses durch die Halbtangenten in den dadurch entstandenen Endpunkten, so erhält man alle weitere Lösungen, falls $g'$ streng monoton ist, vgl. [15, S. 51-54].

**Beispiel 2.** Wir kommen nun wie am Ende von Abschnitt 3.1 angekündigt zur DGL $xy' - (y')^2 - y = 0$. Sie ist eine Clairaut-DGL mit $g(y') = -(y')^2$. Die allgemeine Lösung ist daher $y(x) = cx + g(c) = cx - c^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. Die singuläre Lösung $y_s$ ist nach (22) durch $x = -g'(t) = 2t$ und $y_s = -t\,g'(t) + g(t) = 2t^2 - t^2 = t^2$ gegeben. Da $t = \frac{1}{2}x$ ist, ergibt sich die Parabel $y_s = t^2 = \frac{1}{4}x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

**Proben:** $y = xc - c^2 \Longrightarrow y' = c \Longrightarrow xy' - (y')^2 - y = xc - c^2 - xc + c^2 = 0$ ✓
und $y_s = \frac{x^2}{4} \Longrightarrow y_s' = \frac{x}{2} \Longrightarrow xy_s' - (y_s')^2 - y_s = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 0$ ✓

Es ist $y(0) = -c^2$. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ geht also die Gerade $y = cx - c^2$ durch den Punkt $(0, -c^2)$. Sie geht auch durch den Berührpunkt mit der Parabel $y_s = \frac{x^2}{4}$, der sich so bestimmt: Die Gleichung $cx - c^2 = \frac{x^2}{4}$ geht nach Multiplikation mit 4 und Umstellen in die Gleichung $x^2 - 4cx + 4c^2 = 0$ mit der Lösung $x_{1,2} = 2c \pm \sqrt{4c^2 - 4c^2} = 2c$ über. Der Berührpunkt ist also der Punkt $(2c, c^2)$.



## 5.3 Aufgaben 15 – 18

Die DGL $2y - x - 5 + (2x + y + 5)\, y' = 0$ ist von der Form

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$$

mit $P(x, y) = 2y - x - 5$ und $Q(x, y) = 2x + y + 5$ . Sie erfüllt die *Integrabilitätsbedingung* $P_y = Q_x$ und ist also exakt, denn es ist $P_y = 2 = Q_x$ . Löst man sie nach $y'$ auf, so erhält man die explizite DGL $y' = \frac{x-2y+5}{2x+y+5}$ .

**Aufgabe 15.** Man löse die DGL

$$y' = \frac{x - 2y + 5}{2x + y + 5}$$

mit der im 5. Fall in Abschnitt 4.5 angegebenen Methode und gebe die Lösung in impliziter Form an.

**Aufgabe 16.** Man löse die exakte DGL

$$2y - x - 5 + (2x + y + 5)\, y' = 0$$

durch Bestimmung einer Stammfunktion. Die Lösung ist ggf. noch umzuformen, so dass sie mit der Lösung aus Aufgabe 15 bis auf eine Konstante übereinstimmt.

**Aufgabe 17.** Man ermittle die allgemeine und die singuläre Lösung der Clairaut-DGL

$$xy' + \frac{1}{2}\,(y')^2 - y = 0\,,$$

bestätige das Ergebnis jeweils durch eine Probe und fertige eine Skizze mit der singulären Kurve und mindestens vier der Lösungsgeraden an.

**Aufgabe 18.** (Zur Wiederholung) Man löse die Anfangswertaufgabe

$$y' = 3x^2y^3 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1\,.$$

Dabei ist auch das Lösungsintervall anzugeben.

# DGL zweiter Ordnung

## 6 Lösungsmethoden für $y'' = f(x, y, y')$

Wir betrachten hier einige DGL-Typen der Ordnung 2, die sich in expliziter Form lösen und (ab 6.2) auf eine DGL 1. Ordnung zurückführen lassen.

### 6.1 DGL $y'' = f(x)$

Die DGL $y'' = f(x)$ hat die Lösung

$$y(x) = \int \Big( \int f(x)\,dx \Big)\,dx\,.$$

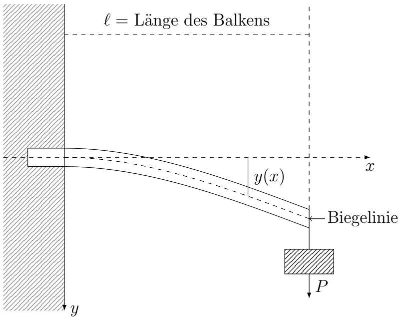
**Beispiel.** Die DGL $y'' = x + \cos(x)$ hat die Lösung

$$\begin{aligned} y(x) &= \int \Big( \int (x + \cos(x))\,dx \Big)\,dx \\ &= \int \Big( \frac{x^2}{2} + \sin(x) + c_1 \Big)\,dx \\ &= \frac{x^3}{6} - \cos(x) + c_1 x + c_2\,. \end{aligned}$$

mit zwei Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Was gilt bei *Anfangsbedingungen* $y(\xi) = \eta_1$ und $y'(\xi) = \eta_2$ ?
Aus $y''(x) = f(x)$ folgt $y'(x) = \eta_2 + \int_\xi^x f(t)\,dt$,
(denn es ist $y'(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + c_1$ mit einer Stammfunktion $F$ von $f$, und mit $F(x) := \int_\xi^x f(t)\,dt$ folgt $y'(x) = \int_\xi^x f(t)\,dt + c_1$ und $y'(\xi) = c_1$, was nach Anfangsbedingung $c_1 = \eta_2$ ergibt).
Es folgt $y(x) = \eta_1 + \int_\xi^x \eta_2\,dt + \int_\xi^x \big( \int_\xi^u f(t)\,dt \big)\,du$ und daher

$$y(x) = \eta_1 + \eta_2(x - \xi) + \int_\xi^x \Big( \int_\xi^u f(t)\,dt \Big)\,du\,.$$




**Beispiel:** Biegung eines Balkens

Ein Balken sei an einem Ende fest eingespannt und am anderen Ende durch eine Kraft $P$ belastet.
Man bestimme die Auslenkung des Balkens.
Sei $E$ das *Elastizitätsmodul*, $I$ das *Flächenmoment* und $EI$ die *Biegesteifigkeit.*

Nimmt man die Biegesteifigkeit als konstant an, so erhält man bei schwacher Biegung die DGL

$$y'' = \frac{P}{EI}\,(\ell - x)\,.$$

An der Einspannstelle ist die Durchbiegung gleich 0 und die Tangente an die Biegelinie waagerecht, was zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$ führt. Die Lösung der Anfangswertaufgabe ist dann

$$\begin{aligned} y(x) &= 0 + 0 + \int_0^x \left( \int_0^u \frac{P}{EI}\,(\ell - t)\,dt \right) du \\ &= \int_0^x \left( \frac{P}{EI} \left( \ell\, t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^u \right) du = \frac{P}{EI} \int_0^x \left( \ell\, u - \frac{u^2}{2} \right) du \\ &= \frac{P}{EI} \left( \frac{\ell\, x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right). \end{aligned}$$

Für $x = \ell$ hat man die größte Durchbiegung $y(\ell) = \frac{P\,\ell^3}{3\,IJ}$ . Vgl. [24, S. 468 f].

## 6.2 DGL $y'' = f(x, y')$

Durch die Substitution $u := y'$ erhalten wir die DGL $u' = f(x, u)$ erster Ordnung. Ist $u(x)$ hiervon eine Lösung, so ist $y = \int u(x)\,dx$ eine Lösung der DGL $y'' = f(x, y')$ .

**Beispiel 1.** $y'' = \frac{1}{x+1}\,y'$ für $x > -1$ . Substitution $u = y'$ ergibt $u' = \frac{1}{x+1}\,u$ . Diese DGL ist vom Typ II in 4.6 und wird durch $u(x) = c_1\,e^{\mathcal{A}(x)}$ mit einer Stammfunktion $\mathcal{A}(x)$ von $\frac{1}{x+1}$ gelöst. Es ist $\mathcal{A}(x) = \int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln(x + 1)$. Dies ergibt $u(x) = c_1(x + 1)$. Daher wird die DGL $y'' = \frac{1}{x+1}\,y'$ durch $y(x) = \int u(x)\,dx = \int c_1(x + 1)\,dx = c_1(\frac{x^2}{2} + x) + c_2$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gelöst.

**Probe:** $y(x) = c_1(\frac{x^2}{2} + x) + c_2 \implies y'(x) = c_1(x + 1) \implies y''(x) = c_1 = \frac{1}{x+1}\,c_1\,(x + 1) = \frac{1}{x+1}\,u(x) = \frac{1}{x+1}\,y'(x)$ .

**Beispiel 2.** Man löse die Anfangswertaufgabe $y'' = \frac{1}{x+1}\, y'$ mit $y(-\frac{1}{2}) = 1$ und $y'(-\frac{1}{2}) = 2$ für $x \in \mathbb{R}_{>-1}$ .

**1. Methode:** Substituiere $u = y'$. Die Anfangswertaufgabe $u' = \frac{1}{x+1}\, u$ mit $u(-\frac{1}{2}) = 2$ hat nach Satz 3 in 4.2 die Lösung $u(x) = 2e^{\mathcal{A}(x)}$ mit

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{x} \frac{1}{t+1}\, dt \\ &= \ln(t+1)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{x} = \ln(x+1) - \ln\Big(\frac{1}{2}\Big) \\ &= \ln(x+1) + \ln(2) = \ln\big(2(x+1)\big) \quad \text{(nach (2) in Kapitel 1)}\end{aligned}$$

Dies ergibt $u(x) = 2e^{\mathcal{A}(x)} = 2(2x+2)$. Nach Anfangsbedingung $y(-\frac{1}{2}) = 1$ folgt $y(x) = 1 + \int_{-\frac{1}{2}}^{x} (4t+4)\, dt = 1 + (2t^2 + 4t)\big|_{-\frac{1}{2}}^{x} = 1 + 2x^2 + 4x - \frac{1}{2} + 2$ und also $y(x) = 2x^2 + 4x + \frac{5}{2}$ .

**2. Methode:** Wir ermitteln mit der Bedingung $u(-\frac{1}{2}) = 2$ wie in der 1. Methode $u(x) = 4x+4$ und berechnen $y(x) = \int (4x+4)\, dx = 2x^2 + 4x + c$. Es ist dann $y(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - 2 + c = -\frac{3}{2} + c \stackrel{!}{=} 1$ , also $c = \frac{5}{2}$, und die Lösung ist $y(x) = 2x^2 + 4x + \frac{5}{2}$ .

**3. Methode:** Wir ermitteln $y'(x) = c_1(x+1)$ und $y(x) = c_1(\frac{x^2}{2} + x) + c_2$ wie in Beispiel 1. Es folgt dann $y(-\frac{1}{2}) = c_1(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}) + c_2 = -\frac{3}{8}\, c_1 + c_2 \stackrel{!}{=} 1$ und $y'(-\frac{1}{2}) = c_1(-\frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{2}\, c_1 \stackrel{!}{=} 2$ . Es ist also $c_1 = 4$ und daher $c_2 = 1 + \frac{3}{8}\, c_1 = \frac{5}{2}$ . Dies ergibt die Lösung $y(x) = 2x^2 + 4x + \frac{5}{2}$ .

## 6.3 DGL $y'' = f(y)$

Sei $y = y(x)$ eine Lösung auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Multipliziere die Gleichung $y''(x) = f(y(x))$ mit $y'(x)$ und integriere auf beiden Seiten. Dann folgt:

$$(*) \qquad \int y'(x)\, y''(x)\, dx = \int f(y(x))\, y'(x)\, dx\,.$$

*Linke Seite:* Es ist $\int y'(x)\, y''(x)\, dx = y'(x)^2 - \int y''(x)\, y'(x)\, dx$ nach partieller Integration und also $\int y''(x)\, y'(x)\, dx = \frac{1}{2}\, y'(x)^2$ .
*Rechte Seite:* Die Substitutionsregel ergibt $\int f(y(x))\, y'(x)\, dx = \int f(y)\, dy$ .

Also wird $(*)$ zu $y'(x)^2 = 2\int f(y)\, dy = 2F(y) + C$ mit einer Stammfunktion $F(y)$ von $f(y)$ und einer passenden Konstanten $C \in \mathbb{R}$ . Die Lösung der DGL $y'' = f(y)$ ist also zurückgeführt auf die Lösung der DGL

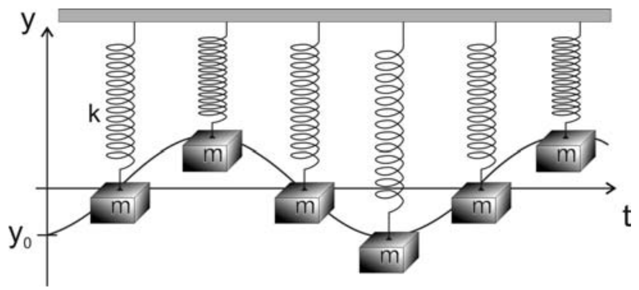
$$(**) \qquad y' = \pm\sqrt{2F(y) + C} \quad \text{vom Typ VI in 4.6.}$$

**Probe:** $y' = \pm\sqrt{2F(y) + C} \implies y'' = \pm\frac{1}{2\sqrt{2F(y)+C}} \cdot 2F'(y) \cdot y' = f(y)$.

Sind Anfangsbedingungen $y(\xi) = \eta_1$ und $y'(\xi) = \eta_2$ mit $\eta_2 \neq 0$ vorgegeben, so sind das Vorzeichen der Wurzel und die Konstante $C$ eindeutig bestimmt. Durch die Bedingung $y(\xi) = \eta_1$ erhält man dann auch eine eindeutig bestimmte Lösung der DGL $y'' = f(y)$. Im Fall $\eta_2 = 0$ braucht keine Eindeutigkeit vorzuliegen.

**Physikalische Deutung der DGL $y'' = f(y)$.** Wir schreiben hier nun, wie in der Physik üblich, $x$ statt $y$ und $t$ statt $x$. Die DGL beschreibt dann die geradlinige Bewegung eines Teilchens mit der Masse $m = 1$ unter der Wirkung einer Kraft $f(x)$, die nur vom Ort $x$ abhängt. Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ stetig und $a \in I$ beliebig. Wir haben oben aus $(*)$ die Gleichung $E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \dfrac{1}{2}\,\dot{x}(t)^2 - \displaystyle\int_a^x f(z)\,dz = E$ mit einer Konstanten $E$ hergeleitet. Hierbei ist $E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}v^2$ (mit Geschwindigkeit $v$) die *kinetische* Energie und (Reibungslosigkeit vorausgesetzt) $E_{\text{pot}} = -\int_a^x f(z)\,dz$ die *potentielle Energie*. Das ist der Energieerhaltungssatz: *Die Summe aus kinetischer und potentieller Energie ist konstant,* $E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = E$, wobei $E$ die *Gesamtenergie* ist. Man spricht deshalb auch von der *Energiemethode*.

**Beispiel.** Sei $y = y(t)$ die Auslenkung eines Massenpunktes der Masse $m$ aus der Ruhelage zur Zeit $t$. Nach dem *Hookeschen* Gesetz ist die Auslenkung proportional zur rücktreibenden Kraft $K$, also $K = -ky$ mit der Federkonstanten $k > 0$. Vernachlässigt man die Reibung, so gilt nach dem *Newtonschen* Gesetz: $my'' = -ky$. In Abhängigkeit von der Zeit ergibt sich folgendes Bild, wobei die $t$-Achse die Ruhelage darstellt.




Wir erhalten die DGL $y'' = -\,\omega^2 y$ mit $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$, die wir hier auf einem Teilintervall lösen. Dazu haben wir nach $(**)$ die DGL $y' = \sqrt{2F(y) + C}$ mit einer Stammfunktion $F(y)$ von $f(y) = -\,\omega^2 y$ zu lösen. Es ist $2F(y) =$

$-2\omega^2 \int y\,dy = -\omega^2 y^2$ und $\sqrt{C - \omega^2 y^2} = \omega\sqrt{\frac{C}{\omega^2} - y^2} = \omega\sqrt{a^2 - y^2}$ mit $a = \frac{\sqrt{C}}{\omega}$. Wir schreiben nun wieder $x$ statt $t$.
Um die DGL $y' = \omega\sqrt{a^2 - y^2}$ zu lösen, ist nach Typ VI in 4.6 die Gleichung

$$\frac{1}{\omega}\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - y^2}}\,dy = x + \frac{\varphi}{\omega}$$

nach $y$ aufzulösen. Dabei ist $\varphi$ eine Konstante $\geqslant 0$. Es folgt

$$\frac{1}{\omega}\arcsin\Big(\frac{y}{a}\Big) = x + \frac{\varphi}{\omega}$$

und $\arcsin(\frac{y}{a}) = \omega x + \varphi$, also

$$y(x) = a\sin(\omega x + \varphi)\,.$$

Der Massenpunkt schwingt periodisch mit *Schwingungsdauer* $T := \frac{2\pi}{\omega}$ zwischen den Maximalausschlägen $-a$ und $a$ hoch und hinunter.

**Bemerkung.** Wird eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft berücksichtigt, so erhält man die DGL $y'' + \frac{r}{m}y' + \omega^2 y = 0$ des „*gedämpften harmonischen Oszillators*" mit einer Reibungskonstanten $r > 0$.

## 6.4 DGL $y'' = f(y, y')$

Sei $y = y(x)$ eine Lösung der DGL $y'' = f(y, y')$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, und sei $y' \neq 0$ auf $I$. Dann besitzt $y(x)$ eine Umkehrfunktion $u_y := x(y)$. Es ist dann $p(y) := y'(x(y))$ eine Funktion von $y$ und $y''(x) = p'(y)y'(x) = p'(y)p(y)$, kurz geschrieben $f(y, p) = y'' = p'p$. Die DGL geht dadurch in die DGL

$$\frac{dp}{dy} = \frac{f(y, p)}{p}$$

erster Ordnung über. Ist eine Lösung $p(y)$ dieser DGL gefunden, so ist noch die DGL $\frac{dy}{dx} = p(y)$ zu lösen.

**Beispiel.** Man löse die Anfangswertaufgabe

$$yy'' = (y')^2$$

mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = 3$.

**1. Schritt.** Es ist $f(y, p) = \frac{p^2}{y}$. Löse also die DGL

$$\frac{dp}{dy} = \frac{p^2}{yp} = \frac{1}{y}\,p$$

vom Typ II in 4.6. Es ist $\mathcal{A}(y) := \int \frac{1}{y}\,dy = \ln(y)$ und $p(y) = c_1 e^{\mathcal{A}(y)} = c_1 y$ für $y > 0$.

**2. Schritt.** Löse die DGL $\frac{dy}{dx} = p(y) = c_1 y$ vom Typ II. Es ist $\mathcal{A}(x) := \int c_1\,dx = c_1 x$ und also $y(x) = c_2 e^{\mathcal{A}(x)} = c_2 e^{c_1 x}$.

**3. Schritt.** Es ist $y(0) = c_2 \overset{!}{=} 1$ und also $y'(x) = c_1 c_2 e^{c_1 x} = c_1 e^{c_1 x}$, was $y'(0) = c_1 \overset{!}{=} 3$ ergibt. Die gesuchte Lösung ist $y(x) = e^{3x}$.

**Probe:** $y = e^{3x} \Longrightarrow y' = 3e^{3x} \Longrightarrow y'' = 9e^{3x} \Longrightarrow yy'' = 9e^{6x} = (y')^2$ ✓

**Bemerkung.** Es kann günstiger sein, die Anfangsbedingung nach dem 1. Schritt einzusetzen und dann bereits $c_1$ zu bestimmen, insbesondere in Fällen, in denen $c_1 = 0$ ist. In obigem Beispiel mit $p(y) = c_1 y$ erhält man $c_1$ dann so: $3 \overset{!}{=} y'(0) = p(y(0)) \overset{!}{=} p(1) = c_1$, also $c_1 = 3$. Im 2. Schritt ist dann $y(x) = c_2 e^{3x}$. Es folgt $1 \overset{!}{=} y(0) = c_2$ und damit die Lösung $y(x) = e^{3x}$.

## 6.5 Aufgaben 19 – 22

**Aufgabe 19.** Man löse für $x > 1$ die Anfangswertaufgabe $y'' = -\frac{2x}{x^2-1}\,y'$ mit $y(2) = -\ln(3)$ und $y'(2) = 2$.

**Aufgabe 20.** Man löse die Anfangswertaufgabe $y^3 y'' = -1$ mit $y'(1) = 1$ und $y(1) = 1$ und bestätige das Ergebnis durch eine Probe.

**Aufgabe 21.** Man löse die Anfangswertaufgabe $yy'' = (y')^2 - y'$ mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = -1$ und bestätige das Ergebnis durch eine Probe.

**Aufgabe 22.** (Zur Wiederholung) Die Zerfallsgeschwindigkeit einer radioaktiven Substanz sei proportional zu der gerade vorhandenen Menge. Die Masse $u(t)$ (in Gramm) der zur Zeit $t \geqslant 0$ vorhandenen Menge der radioaktiven Substanz erfüllt also die DGL $\frac{du}{dt} = -\lambda u$ mit einer positiven Konstanten $\lambda$.

(a) Man bestimme $u(t)$, wenn am Anfang 5 g und nach 10 Minuten 3 g radioaktive Substanz vorhanden ist.

(b) Nach wieviel Minuten werden 90% der Ausgangsmasse zerstrahlt sein?

# 7 Lineare DGL zweiter Ordnung

Wie in Abschnitt 3.2 eingeführt, hat eine lineare DGL zweiter Ordnung die Form $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ und die Normalform

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)\,,$$

mit der wir uns hauptsächlich beschäftigen werden. Zunächst betrachten wir die zugehörige homogene DGL.

## 7.1 DGL $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$

Seien $a_0, a_1 \colon I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Wir betrachten die homogene lineare DGL

$$(*) \qquad y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0\,.$$

**Bemerkung 1.** Die Lösungen $y \colon I \to \mathbb{R}$ von $(*)$ bilden einen Untervektorraum $L_h$ des $\mathbb{R}$-Vektorraums aller Abbildungen $I \to \mathbb{R}$.

*Beweis.* Offensichtlich ist die Nullfunktion $x \mapsto 0$ in $L_h$.
Seien $y, y_1, y_2 \in L_h$. Dann gilt $y_1 + y_2 \in L_h$ und $cy \in L_h$ für alle $c \in \mathbb{R}$, wie aus der Linearität der Ableitung (vgl. Abschnitt 2.2) folgt: Es ist
$(y_1 + y_2)'' + a_1(x)(y_1 + y_2)' + a_0(x)(y_1 + y_2) = y_1'' + y_2'' + a_1(x)(y_1' + y_2') + a_0(x)(y_1 + y_2) = [y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1] + [y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2] = 0$
da $y_1, y_2$ Lösungen von $(*)$ sind. Also ist $y_1 + y_2 \in L_h$.
Analog ist $(cy)'' + a_1(x)(cy)' + a_0(x)cy = c\big(y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y\big) = 0$ und also $cy \in L_h$. □

Hieraus folgt das in [13, 19.1] so genannte

**Superpositionsprinzip.** Jede Linearkombination $c_1y_1 + \cdots + c_my_m$ von Lösungen $y_1, \ldots, y_m \colon I \to \mathbb{R}$ der DGL $(*)$ ist wieder eine Lösung von $(*)$.

Wir werden in Abschnitt 11.3 zeigen, dass $L_h$ die Dimension 2 hat und sich also jede Lösung $y \colon I \to \mathbb{R}$ von $(*)$ eindeutig als Linearkombination

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

zweier linear unabhängiger Lösungen $y_1, y_2$ von $(*)$ schreiben lässt. Wir nennen zwei linear unabhängige Lösungen $y_1, y_2$ von $(*)$ ein *Fundamentalsystem* und schreiben dann die *allgemeine Lösung* in der Form

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \quad \text{für } x \in I\,.$$

Es stellt sich die Frage, wann zwei Lösungen linear unabhängig sind.


Graf Josef Hoëné Wronski 1778–1853

Sind $y_1, y_2 \colon I \to \mathbb{R}$ Lösungen der DGL $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, so ist deren *Wronski-Determinante* definiert durch

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$$

für alle $x \in I$.
Die Wronski-Determinante gibt Auskunft darüber, wann die beiden Lösungen linear unabhängig sind, vgl. Satz 7 unten.

**Bemerkung 2.** Es ist $W'(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{pmatrix}$ für alle $x \in I$, denn es ist $W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$ und also nach Produktregel $W'(x) = y_1'(x)y_2'(x) + y_1(x)y_2''(x) - y_2'(x)y_1'(x) - y_2(x)y_1''(x) = y_1(x)y_2''(x) - y_2(x)y_1''(x)$


Niels Henrik Abel 1802–1829

**Satz 6.** *Seien $y_1, y_2 \colon I \to \mathbb{R}$ Lösungen von $(*)$. Dann erfüllt die Wronski-Determinante $W(x)$ die DGL $W' = -a_1(x)\,W$.*

Die DGL wird nach Satz 3 in Abschnitt 4.2 durch die folgende Formel [1, S. 22, 0.] gelöst.

**Formel von Abel (1827):**

$$W(x) = W(\xi)\, e^{-\int_\xi^x a_1(t)dt}.$$

Aus der Formel folgt: *Ist $W(\xi) \neq 0$ für ein $\xi \in I$, so ist $W(x) \neq 0$ für alle $x \in I$.*

*Beweis.* Da $y_1$, $y_2$ Lösungen von $(*)$ sind, gelten die Gleichungen

$$y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x) = 0\,,$$
$$y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_0(x)y_2(x) = 0\,.$$

Multipliziere die erste Gleichung mit $-y_2(x)$ und die zweite Gleichung mit $y_1(x)$. Addition der Gleichungen ergibt dann
$\big(y_1(x)y_2''(x) - y_2(x)y_1''(x)\big) + a_1(x)\,\big(y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)\big) = 0$ und das ist nichts anderes als die Gleichung $W'(x) + a_1(x)W(x) = 0$. Also ist $W(x)$ eine Lösung der DGL $W' = -a_1(x)\,W$ für alle $x \in I$. □

**Satz 7.** *Seien $y_1, y_2 \colon I \to \mathbb{R}$ zwei Lösungen der DGL $(*)$, und sei $x \in I$. Dann gilt $W(x) \neq 0$ genau dann, wenn $y_1$ und $y_2$ linear unabhängig sind.*

*Beweis.* „$\Longrightarrow$“ Die Funktionen $y_1$ , $y_2$ seien linear abhängig. Dann gibt es $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , die nicht beide 0 sind und für die $c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$ gilt. Also hat das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) &= 0 \\ c_1\, y_1'(x) + c_2\, y_2'(x) &= 0 \end{aligned}$$

eine Lösung $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$, und $W(x)$ ist die Determinante der Koeffizientenmatrix. Es folgt $W(x) = 0$.
„$\Longleftarrow$“ Sei $W(x) = 0$. Dann sind die Spalten der zu $W(x)$ gehörigen Matrix linear abhängige Vektoren in $\mathbb{R}^2$. Mit Hilfe des Eindeutigkeitssatzes, den wir in Abschnitt 11.1 beweisen, folgt dann, dass die Funktionen $y_1, y_2$ linear abhängig sind, vgl. Satz 30 in Abschnitt 11.3. □

**Beispiel 1.** Die DGL $y'' + y = 0$ hat die Lösungen $y_1(x) = \sin(x)$ und $y_2(x) = \cos(x)$ . Es ist

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} \sin(x) & \cos(x) \\ \cos(x) & -\sin(x) \end{pmatrix} = -1 \neq 0\,.$$

Die Lösungen sind also linear unabhängig. Die allgemeine Lösung ist $y(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

**Beispiel 2.** Die DGL $y'' - \frac{x}{x-1} y' + \frac{1}{x-1} y = 0$ mit $x > 1$ hat die Lösungen $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = e^x$. Die Wronski-Determinante erfüllt

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{pmatrix} = xe^x - e^x = (x-1)e^x \neq 0 \quad \text{für } \; x > 1\,.$$

Also ist $y(x) = c_1\, x + c_2\, e^x$ die allgemeine Lösung der DGL für $x > 1$.
Sei nun die Anfangsbedingung $y(3) = 2$ und $y'(3) = 0$ vorgegeben. Da $y'(x) = c_1 + c_2 e^x$ ist, sind $c_1, c_2$ Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} y(3) &= c_1\, 3 + c_2\, e^3 \stackrel{!}{=} 2 \\ y'(3) &= c_1 + \, c_2\, e^3 \; \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

und also folgt $c_1 = 1$ und $c_2 = -e^{-3}$. Die Lösung der Anfangswertaufgabe ist daher $y(x) = x - e^{-3}\, e^x = x - e^{x-3}$.

**Beispiel 3.** Die Airy-DGL $y'' - xy = 0$ ist nicht so leicht zu lösen. Da die Koeffizienten $a_1(x) = 0$ und $a_0(x) = -x$ Potenzreihen um 0 für alle $x \in \mathbb{R}$ sind, gibt es aber eine *Potenzreihenlösung*, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, vgl. [13, Satz 26.1].

Sir George Airy 1801–1892

Wir machen den Ansatz $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit $c_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann ist

$y'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n$

und

$$\begin{aligned} y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n c_n x^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} x^n . \end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL ergibt

$$\begin{aligned} y''(x) - xy(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n = 0 \, . \end{aligned}$$

Da keine Anfangsbedingung vorgegeben ist, sind $c_0$ und $c_1$ frei wählbare Konstanten. Koeffizientenvergleich ergibt $1 \cdot 2 \cdot c_2 = 0$ für $n = 0$ und weiter $2 \cdot 3 \cdot c_3 - c_0 = 0$ für $n = 1$ sowie $3 \cdot 4 \cdot c_4 - c_1 = 0$ für $n = 2$. Wir erhalten ersichtlich die Rekursionsformel

(1) $$c_{n+2} = \frac{c_{n-1}}{(n+1)(n+2)} \quad \text{für } \; n \in \mathbb{N}.$$

Da $c_2 = 0$ ist, folgt $c_5 = 0$ für $n = 3$. Es ist $c_6 = \frac{c_3}{5 \cdot 6} = \frac{c_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{c_0}{2 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 2!}$ für $n = 4$ und $c_7 = \frac{c_4}{6 \cdot 7} = \frac{c_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{c_1}{4 \cdot 7 \cdot 3^2 \cdot 2!}$ sowie $c_8 = 0$. Es ist $c_{3n+2} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

**Lemma.** *Es gilt* $c_{3n} = \dfrac{c_0}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1) \cdot 3^n \cdot n!}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

*Beweis.* Induktion nach $n$: Für $n = 1$ ist $c_3 = \frac{c_0}{2 \cdot 3^1 \cdot 1!}$. Sei nun $c_{3n}$ wie im Lemma gegeben. Zu zeigen ist $c_{3(n+1)} = \frac{c_0}{2 \cdot 5 \cdot \cdot 8 \ldots (3n+2) 3^{n+1} (n+1)!}$. Es ist

$$\begin{aligned} c_{3(n+1)} = c_{(3n+1)+2} &\overset{(1)}{=} \frac{c_{3n+1-1}}{(3n+2)(3n+1+2)} \\ &= \frac{c_{3n}}{(3n+2)(3n+3)} \overset{\text{IV}}{=} \frac{c_0}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1) 3^n \cdot n! \cdot (3n+2)(3n+3)} \\ &= \frac{c_0}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)(3n+2) 3^{n+1} (n+1)!} , \end{aligned}$$

da $3^n \cdot n! \cdot (3n+3) = n! \cdot 3^{n+1} (n+1)$ gilt. □

Analog zeigt man $c_{3n+1} = \dfrac{c_1}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n+1) \cdot 3^n \cdot n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was hier in Aufgabe 60 verlagert wird. Der Ansatz $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ liefert nun ein Fundamentalsystem von Lösungen $y_1(x) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1) \cdot 3^n \cdot n!}$ und $y_2(x) = x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n+1) \cdot 3^n \cdot n!}$, da die zugehörige Wronski-Determinante $W(0) = 1 \neq 0$ ist. Die allgemeine Lösung ist $y(x) = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x)$.

## 7.2 Fundamentalsystem, wenn eine Lösung bekannt ist

Seien $a_0, a_1 \colon I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$.

**Reduktionssatz von d'Alembert.**
*Sei $y_1 \colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL*

$$(*) \qquad y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

*und sei $y_1(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Der Ansatz $y_2(x) = y_1(x)\,u(x)$ mit einer nicht-konstanten Lösung $u(x)$ der DGL $u'' + \big(2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + a_1(x)\big)u' = 0$ ergibt dann eine von $y_1(x)$ linear unabhängige Lösung $y_2 \colon I \to \mathbb{R}$.*

JEAN BAPTISTE LE ROND D'ALEMBERT, 1717–1783

*Beweis.* Sei $y_2 = y_1 u$, also $y_2' = y_1' u + y_1 u'$ und $y_2'' = y_1'' u + 2y_1' u' + y_1 u''$. Der Kürze halber schreiben wir die Argumente $x$ nicht mit. Da $y_1$ eine Lösung von $(*)$ ist, gilt $y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1 = 0$, und es folgt

$$\begin{aligned} y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2 &= y_1'' u + 2y_1' u' + y_1 u'' + a_1(y_1' u + y_1 u') + a_0 y_1 u \\ &= (2y_1' + a_1 y_1)u' + y_1 u''. \end{aligned}$$

Also gilt $y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2 = 0$ genau dann, wenn $\big(2\,\frac{y_1'}{y_1} + a_1\big)u' + u'' = 0$ gilt. Ist $c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$, so ist $(c_1 + c_2 u)y_1 = 0$ und also $c_1 + c_2 u = 0$. Es folgt $c_1 = 0 = c_2$, da $u$ nicht-konstant ist. $\square$

Die DGL $u'' + \Big(2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + a_1(x)\Big)u' = 0$, die im Reduktionssatz auftaucht, ist von der Ordnung 1 in $u'$, und daher wird durch den Satz von d'Alembert die Ordnung der zu lösenden DGL um 1 reduziert. Im Beweis des folgenden Satzes wird die DGL der Ordnung 1 gelöst, und man kann dadurch eine von $y_1$ linear unabhängige Lösung $y_2$ von $(*)$ direkt angeben.

**Satz 8.** *Sei* $y_1 \colon I \to \mathbb{R}$ *eine Lösung mit* $y_1(x) \neq 0$ *für alle* $x \in I$ *der DGL*

$$(*) \qquad y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

*und sei* $\mathcal{A}_1(x)$ *eine Stammfunktion von* $a_1(x)$*. Dann ist die Funktion*

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)}\, e^{-\mathcal{A}_1(x)}\, dx$$

*eine von* $y_1$ *linear unabhängige Lösung von* $(*)$*.*

*Beweis.* Löse die DGL $u'' = a(x)u'$ mit $a(x) = -\Big(2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + a_1(x)\Big)$. Eine Stammfunktion von $a(x)$ ist $\mathcal{A}(x) = -2\ln(|y_1(x)|) - \mathcal{A}_1(x)$, vgl. Aufgabe 2. Also ist

$$u'(x) = e^{\mathcal{A}(x)} = e^{-2\ln(|y_1(x)|) - \mathcal{A}_1(x)} = \frac{1}{y_1^2(x)}\, e^{-\mathcal{A}_1(x)}$$

eine Lösung der DGL $u'' = a(x)u'$. Es folgt $u(x) = \int \frac{1}{y_1^2(x)}\, e^{-\mathcal{A}_1(x)}\, dx$, und nach dem Reduktionssatz ist $y_2(x) = y_1(x)u(x)$ eine von $y_1$ linear unabhängige Lösung von $(*)$. □

**Korollar 1.** *Jede Lösung* $y_2 \colon I \to \mathbb{R}$ *der DGL*

$$(**) \qquad y_1(x)y_2' - y_1'(x)\, y_2 = c\, e^{-\mathcal{A}_1(x)} \quad \textit{mit} \quad c \neq 0$$

*ist von der Form* $y_2(x) = c\, y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)}\, e^{-\mathcal{A}_1(x)}\, dx$ *und daher eine von* $y_1$ *linear unabhängige Lösung von* $(*)$*. Umgekehrt gilt:*
*Jede von* $y_1$ *linear unabhängige Lösung* $y_2 \colon I \to \mathbb{R}$ *der DGL* $(*)$ *ist eine Lösung von* $(**)$ *und daher von der Form* $y_2(x) = c\, y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)}\, e^{-\mathcal{A}_1(x)}\, dx$ *mit einer Konstanten* $c \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ *.*

*Beweis.* Sei $y_2(x)$ eine Lösung von $(**)$. Nach Quotientenregel folgt dann

$$\Big(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\Big)' = \frac{y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x)}{y_1^2(x)} = \frac{c\, e^{-\mathcal{A}_1(x)}}{y_1^2(x)}\, .$$

Integrieren auf beiden Seiten ergibt daher $\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = c \int \frac{e^{-\mathcal{A}_1(x)}}{y_1^2(x)}\, dx$ und also $y_2(x) = c\, y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)}\, e^{-\mathcal{A}_1(x)}\, dx$. Da $c \neq 0$ ist, folgt aus Satz 8, dass $y_2$ eine von $y_1$ linear unabhängige Lösung von $(*)$ ist.
Sei umgekehrt $y_2 \colon I \to \mathbb{R}$ irgendeine von $y_1$ linear unabhängige Lösung von $(*)$. Dann gilt für die beiden Lösungen $y_1$ und $y_2$ die Abelsche Formel, vgl. Satz 6, und es folgt $W(x) := y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x) = c\, e^{-\mathcal{A}_1(x)}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Da $y_1$ und $y_2$ linear unabhängig sind, ist $W(x) \neq 0$ und also $c \neq 0$ nach Satz 7. Wie oben gerade gezeigt, folgt nun $y_2(x) = c\, y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)}\, e^{-\mathcal{A}_1(x)}\, dx$. □

**Beispiel 1.** Gegeben sei die DGL $y'' - (4 + \frac{2}{x})\, y' + (4 + \frac{4}{x})\, y = 0$ für $x > 0$. Man bestimme eine zur Lösung $y_1(x) = e^{2x}$ linear unabhängige Lösung $y_2(x)$ mit verschiedenen Methoden. Dabei sei $a_1(x) := -(4 + \frac{2}{x})$.

Reduktionssatz: Es ist $2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + a_1(x) = 4\frac{e^{2x}}{e^{2x}} - 4 - \frac{2}{x} = -\frac{2}{x}$ und also ist die DGL $u'' = -\big(2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + a_1(x)\big)u' = \frac{2}{x}u'$ vom Typ II in 4.6 zu lösen. Eine spezielle Lösung ist $u'(x) = e^{\mathcal{A}(x)}$ mit einer Stammfunktion $\mathcal{A}(x)$ von $a(x) = \frac{2}{x}$, was $u'(x) = e^{2\ln(x)} = x^2$ ergibt. Es folgt $u(x) = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$ und $y_2(x) = y_1(x)u(x) = e^{2x}\ \frac{x^3}{3}$.

Satz 8: Es ist $\mathcal{A}_1(x) = -\int (4 + \frac{2}{x})\, dx = -\big(4x + \ln(x^2)\big)$ eine Stammfunktion von $a_1(x) = -(4 + \frac{2}{x})$. Es folgt $y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\mathcal{A}_1(x)}\, dx = e^{2x} \int \frac{1}{e^{4x}}\, e^{4x+\ln(x^2)}\, dx = e^{2x} \int x^2\, dx = e^{2x}\ \frac{x^3}{3}$.

Korollar 1: Löse die DGL $y_1(x)y_2' - y_1'(x)y_2 = e^{-\int a_1(x)\, dx}$ für $y_1(x) = e^{2x}$ und $a_1(x) = -(4 + \frac{2}{x})$. Dies ergibt die DGL $e^{2x}y_2' - 2e^{2x}y_2 = e^{\int (4+\frac{2}{x})\, dx}$ und also durch Multiplikation mit $e^{-2x}$ die DGL $y_2' = 2y_2 + e^{2x}e^{\ln(x^2)}$ vom Typ III in 4.6. Es folgt $y_2(x) = e^{2x} \int e^{-2x}e^{2x}x^2\, dx = e^{2x} \int x^2\, dx = e^{2x}\ \frac{x^3}{3}$.

Die Idee für Satz 8 und Korollar 1 ist durch die Bachelor-Arbeit [17] entstanden. Dort wird gezeigt, dass man stets dieselbe Lösung $y_2$ der DGL $(*)$ erhält, wenn man den Reduktionssatz von d'Alembert anwendet oder die DGL $(**)$ nach $y_2'$ auflöst und gemäß Typ III in Tabelle 4.6 löst.

**Beispiel 2.** Man löse die DGL $y'' - \frac{2x}{x^2-1}\, y' + \frac{2}{x^2-1}\, y = 0$ für $x > 1$. Auf die Lösung $y_1(x) = x$ kommt man leicht. Eine Stammfunktion von $a_1(x) = -\frac{2x}{x^2-1}$ ist $\mathcal{A}_1(x) = -\ln\big(x^2 - 1\big)$. Nach Satz 8 ist

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x \int \frac{1}{x^2}\, e^{\ln(x^2-1)}\, dx = x \int \frac{1}{x^2}\big(x^2 - 1\big)\, dx \\ &= x \int \Big(1 - \frac{1}{x^2}\Big)\, dx = x\Big(x + \frac{1}{x}\Big) = x^2 + 1 \end{aligned}$$

eine von $y_1$ linear unabhängige Lösung. Die allgemeine Lösung der DGL lautet also $y(x) = c_1x + c_2(x^2 + 1)$.
**Probe für $\boldsymbol{y_2}$.** Aus $y_2(x) = x^2 + 1 \Longrightarrow y_2'(x) = 2x \Longrightarrow y_2''(x) = 2 \Longrightarrow$ $y_2'' - \frac{2x}{x^2-1}\, y_2' + \frac{2}{x^2-1}\, y_2 = 2 - \frac{4x^2}{x^2-1} + \frac{2x^2+2}{x^2-1} = \frac{2x^2-2-4x^2+2x^2+2}{x^2-1} = 0$ ✓

In einer DGL der Form $v'' + q_0(x)v = 0$, wobei $q_0 \colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion sei, fehlt das zweithöchste Glied $q_1(x)v'$. In diesem Fall verschärft sich Satz 8 und Korollar 1 zu folgendem

**Korollar 2.** *Sei* $v_1\colon I \to \mathbb{R}$ *eine Lösung der DGL* $v'' + q_0(x)v = 0$, *und es gelte* $v_1(x) \neq 0$ *für alle* $x \in I$. *Dann ist die Funktion*

$$v_2(x) = v_1(x) \int \frac{1}{v_1^2(x)}\, dx$$

*eine von* $v_1$ *linear unabhängige Lösung. Umgekehrt ist jede von* $v_1$ *linear unabhängige Lösung der DGL* $v'' + q_0(x)v = 0$ *von der Form* $v_2(x) = c\, v_1(x) \int \frac{1}{v_1^2(x)}\, dx$ *mit einer Konstanten* $c \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ . □

## 7.3 Beseitigen des zweithöchsten Gliedes

Für eine *algebraische Gleichung* $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ führt die Substitution $x = z - \frac{p}{2}$ zu der Gleichung $(z - \frac{p}{2})^2 + p(z - \frac{p}{2}) + q = z^2 + q_0 = 0$ mit $q_0 = -\frac{p^2}{4} + q$. In der Gleichung $z^2 + q_0 = 0$ fehlt das zweithöchste Glied, und aus den Lösungen $z_{1,2} = \pm\sqrt{-q_0}$ erhalten wir dann die Lösungen $x_{1,2} = z_{1,2} - \frac{p}{2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ der Ausgangsgleichung. Wir betrachten hier nun eine lineare DGL, die nicht homogen zu sein braucht, nämlich

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \tag{1}$$

wobei $a_0, a_1, b\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ stetig seien und $a_1$ zudem mit einer stetigen Ableitung versehen sei. Durch eine geeignete Substitution werden wir in Lemma 2 die DGL (1) in die Form $v'' + q_0(x)v = b_1(x)$ bringen.

**Lemma 1.** *Sei* $u(x) = e^{-\frac{1}{2}\mathcal{A}_1(x)}$ *mit einer Stammfunktion* $\mathcal{A}_1(x)$ *von* $a_1(x)$ . *Dann gilt* $2u'(x) + a_1(x)u(x) = 0$ *und*

$$u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x) = q_0(x)u(x)$$

*mit* $q_0(x) := -\frac{1}{2}\, a_1'(x) - \frac{1}{4}\, a_1^2(x) + a_0(x)$ .

*Beweis.* Nach Kettenregel gilt $u'(x) = -\frac{1}{2}a_1(x)u(x)$ . Der Kürze halber schreiben wir nun die Argumente $x$ nicht mit. Es folgt $2u' + a_1u = 0$ und nach Produktregel $u'' = -\frac{1}{2}a_1'u - \frac{1}{2}a_1u' = -\frac{1}{2}a_1'u + \frac{1}{4}a_1^2u$, da $u' = -\frac{1}{2}a_1u$ gilt. Dies ergibt

$$\begin{aligned} u'' + a_1u' + a_0u &= -\frac{1}{2}a_1'u + \frac{1}{4}a_1^2u + a_1\big(-\frac{1}{2}a_1u\big) + a_0u \\ &= -\frac{1}{2}a_1'u - \frac{1}{4}a_1^2u + a_0u \\ &= -\Big(\frac{1}{2}a_1' - \frac{1}{4}a_1^2 + a_0\Big)u \\ &= q_0\, u\,. \end{aligned}$$

□

**Lemma 2.** *Sei $q_0(x)$ definiert wie in Lemma 1. Ist eine Funktion $v\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL*

$$v'' + q_0(x)v = \frac{b(x)}{u(x)} \tag{2}$$

*so ist die Funktion $y(x) := u(x)v(x)$ mit $u(x) = e^{-\frac{1}{2}\mathcal{A}_1(x)}$ eine Lösung der DGL (1). Ist umgekehrt eine Funktion $y\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (1), so ist die Funktion $v(x) := \frac{y(x)}{u(x)}$ eine Lösung von (2).*

*Beweis.* Wir schreiben wieder der Kürze halber die Argumente $x$ nicht mit. Sei $y = uv$ mit einer zweimal differenzierbaren Funktion $v$. Dann ist nach der Produktregel

$$\begin{aligned} y'' + a_1y' + a_0y &= (uv)'' + a_1(uv)' + a_0uv \\ &= u''v + 2u'v' + uv'' + a_1(u'v + uv') + a_0uv \\ &= (u'' + a_1u' + a_0u)v + (2u' + a_1u)v' + uv'' \\ &= q_0u\,v + uv'' \qquad \text{nach Lemma 1.} \\ &= (v'' + q_0v)u\,. \end{aligned}$$

Sei $v$ eine Lösung von (2). Dann ist $v''+q_0v = \frac{b}{u}$ und also $y''+a_1y'+a_0y = b$. Es ist daher $y$ eine Lösung von (1). Ist umgekehrt $y$ eine Lösung von (1), so folgt $b = (v'' + q_0v)u$ und somit $v'' + q_0v = \frac{b}{u}$ . □

**Beispiel 1.** Man löse die DGL $y''+y'+\frac{5}{4}\,y = 0$ . Hier ist $a_1 = 1$ und $a_0 = \frac{5}{4}$ sowie $u(x) = e^{-\frac{1}{2}\mathcal{A}_1(x)} = e^{-\frac{1}{2}x}$ und $q_0 = -\frac{1}{2}\,a_1' - \frac{1}{4}\,a_1^2 + a_0 = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} = 1$. Die DGL $v'' + v = 0$ hat nach Beispiel 1 in 7.1 die linear unabhängigen Lösungen $v_1(x) = \sin(x)$ und $v_2(x) = \cos(x)$. Nach Lemma 2 für $b(x) = 0$ sind die Funktionen $y_1(x) = \sin(x)e^{-\frac{1}{2}x}$ und $y_2(x) = \cos(x)e^{-\frac{1}{2}x}$ Lösungen von (1). Auch sind sie linear unabhängig, wie der folgende Satz zeigt. Die allgemeine Lösung ist also $y(x) = c_1 \sin(x)e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 \cos(x)e^{-\frac{1}{2}x}$.

**Satz 9.** *Wenn die Funktionen $v_1, v_2\colon I \to \mathbb{R}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen für die DGL*

$$v'' + q_0(x)v = 0$$

*bilden, so bilden die Funktionen $y_1(x) = u(x)v_1(x)$ und $y_2(x) = u(x)v_2(x)$ mit $u(x) = e^{-\frac{1}{2}\mathcal{A}_1(x)}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen für die DGL $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ .*

*Wenn umgekehrt die Funktionen $y_1, y_2\colon I \to \mathbb{R}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen für die DGL $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ bilden, so bilden die Funktionen $v_1(x) = \frac{y_1(x)}{u(x)}$ und $v_2(x) = \frac{y_2(x)}{u(x)}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen für die DGL $v'' + q_0(x)v = 0$ .*

*Beweis.* Im Hinblick auf Lemma 2 für $b(x) = 0$ ist jeweils nur noch die lineare Unabhängigkeit der Lösungen zu zeigen. Wir schreiben wieder die Argumente $x$ nicht mit. Es ist

$$\begin{aligned} Y = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} uv_1 & uv_2 \\ (uv_1)' & (uv_2)' \end{pmatrix} \\ &= u\det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ u'v_1 + uv_1' & u'v_2 + uv_2' \end{pmatrix} = u\det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ uv_1' & uv_2' \end{pmatrix} \\ &= u^2 V \quad \text{mit} \quad V = \det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da $u \neq 0$ ist, gilt $V \neq 0$ genau dann, wenn $Y \neq 0$ ist. Aus Satz 7 in 7.1 folgt daher jeweils die behauptete lineare Unabhängigkeit der Lösungen. □

**Beispiel 2.** Man ermittle die allgemeine Lösung der DGL

$$y'' - 8xy' + (16x^2 - 3)y = 0\,.$$

Für $a_1(x) = -8x$ ist $a_1^2(x) = 64x^2$ und $a_1'(x) = -8$. Es folgt

$$q_0(x) = -\frac{1}{2}\,a_1'(x) - \frac{1}{4}\,a_1^2(x) + a_0(x) = 4 - 16x^2 + 16x^2 - 3 = 1\,.$$

Die DGL $v'' + q_0(x)v = v'' + v = 0$ hat die linear unabhängigen Lösungen $v_1(x) = \sin(x)$ und $v_2(x) = \cos(x)$ nach Beispiel 1 in 7.1.
Es ist $\mathcal{A}_1(x) = -4x^2$ eine Stammfunktion von $a_1(x) = -8x$ und also $u(x) = e^{-\frac{1}{2}\mathcal{A}_1(x)} = e^{2x^2}$. Nach Satz 9 bilden die Funktionen $y_1(x) = e^{2x^2}\sin(x)$ und $y_2(x) = e^{2x^2}\cos(x)$ ein Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung ist $y(x) = c_1 e^{2x^2}\sin(x) + c_2 e^{2x^2}\cos(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ und mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Der folgende Satz ist der Bachelorarbeit [26] entnommen. Dort wird gezeigt, dass der Ansatz $q_0(x) = a_0(x)$ zu folgendem Ergebnis führt.

**Satz über die DGL $y'' + \frac{2}{x}y' + a_0(x)y = b(x)$.** *Sei $I$ ein Intervall in $\mathbb{R}_{>0}$ und seien $a_0, b\colon I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Wenn eine Funktion $v\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL*

$$v'' + a_0(x)v = xb(x) \tag{3}$$

*ist, so ist die Funktion $y(x) = \frac{1}{x}v(x)$ eine Lösung der DGL*

$$y'' + \frac{2}{x}y' + a_0(x)y = b(x)\,. \tag{4}$$

*Ist umgekehrt eine Funktion $y\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von* (4)*, so ist die Funktion $v(x) = xy(x)$ eine Lösung von* (3).

*Beweis.* Der Satz folgt aus Lemma 2. Für $a_1(x) = \frac{2}{x}$ ist $u(x) = \frac{1}{x}$ sowie $-\frac{1}{2}a_1'(x) = \frac{1}{4}a_1^2(x)$ und also $q_0(x) = a_0(x)$. □

**Beispiel 3.** Die DGL $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$ hat für $x > 0$ nach Satz 9 und obigem Satz die allgemeine Lösung $y(x) = c_1 \frac{1}{x}\sin(x) + c_2 \frac{1}{x}\cos(x)$, denn $\sin(x)$ und $\cos(x)$ bilden ein Fundamentalsystem für die DGL $v'' + v = 0$.

**Beispiel 4.** Wir lösen die DGL $v'' - (1 + 2\tan^2(x))v = 0$, die [16, 3.C.2.24] entnommen ist, auf dem Intervall $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Es ist $v_1(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ eine Lösung und nach Korollar 2 zu Satz 8 bilden die Funktionen $v_1$ und $v_2$ mit $v_2(x) = \frac{1}{\cos(x)} \int \cos^2(x)\,dx$ ein Fundamentalsystem. Mit Hilfe von partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}\int \cos^2(x)\,dx &= \int (1 - \sin^2(x))\,dx \qquad \text{da} \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1\\ &= x + \sin(x)\cos(x) - \int \cos^2(x)\,dx \qquad \text{und also}\\ \int \cos^2(x)\,dx &= \frac{1}{2}\big(x + \sin(x)\cos(x)\big)\,.\end{aligned}$$

Daher ist $v_2(x) = \frac{1}{\cos(x)}\big(\frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x))\big) = \frac{1}{2}\big(\frac{x}{\cos(x)} + \sin(x)\big)$. Nach Satz 9 und obigem Satz folgern wir hieraus, dass die DGL

$$y'' + \frac{2}{x}y' - (1 + 2\tan^2(x))y = 0$$

die allgemeine Lösung $y(x) = c_1 \frac{1}{x\cos(x)} + c_2\big(\frac{1}{\cos(x)} + \frac{\sin(x)}{x}\big)$ auf $I$ hat.

## 7.4 DGL $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$

Seien $a_1, a_0, b\colon I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Wir betrachten eine inhomogene lineare DGL der Form

$$(**) \qquad y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)\,.$$

Sind $y, y_s\colon I \to \mathbb{R}$ Lösungen dieser DGL, so ist die Differenz $y - y_s$ eine Lösung der *zugehörigen homogenen DGL*

$$(*) \qquad y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0\,,$$

da sich $b(x)$ dann weghebt. Die *allgemeine Lösung* einer inhomogenen DGL $(**)$ ist also die Summe aus einer *speziellen Lösung* $y_s$ von $(**)$ und der allgemeinen Lösung von $(*)$. Sie hat daher die Gestalt

$$y(x) = y_s(x) + c_1\,y_1(x) + c_2\,y_2(x)\,,$$

wobei $y_s(x)$ irgendeine spezielle Lösung von $(*)$ ist, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten sind und $y_1(x)$, $y_2(x)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen für die homogene DGL $(*)$ bilden.

**Bemerkung.** Sei $L_h$ der Vektorraum der Lösungen von $(*)$ gemäß Bemerkung 1 in 7.1, und sei $L_i$ die Menge der Lösungen der inhomogenen DGL $(**)$. Ist $y_s\colon I \to \mathbb{R}$ eine spezielle Lösung von $(**)$, so gilt

$$L_i = y_s + L_h\,.$$

*Beweis.* Nach obigen Ausführungen ist nur $y_s + y_h \in L_i$ für jede Funktion $y_h \in L_h$ zu zeigen. Dies ist aber klar, da $y_s'' + y_h'' + a_1(y_s' + y_h') + a_0(y_s + y_h) = y_s'' + a_1 y_s' + a_0 y_s = b$ für $y_h \in L_h$ gilt. □

Kennt man ein Fundamentalsystem von Lösungen für die homogene DGL $(*)$, so kann man mit der folgenden Methode der *Variation der Konstanten* eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL $(**)$ erhalten.
Man geht von der allgemeinen Lösung $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ von $(*)$ aus und variiert sozusagen die Konstanten $c_1, c_2$, indem man zwei differenzierbare Funktionen $c_1, c_2\colon I \to \mathbb{R}$ so bestimmt, dass

$$(1) \qquad c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \quad \text{und} \quad c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = b(x)$$

gilt. Für die so entstandene Funktion $y_s(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ gilt dann $y_s' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$ und also $y_s'' = c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2''$, was nach der oberen rechten Gleichung $y_s'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + b$ ergibt. Es gilt dann $y_s'' + a_1 y_s' + a_0 y_s = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + b + a_1(c_1 y_1' + c_2 y_2') + a_0(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1(y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) + c_2(y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2) + b = b$, da $y_1, y_2$ Lösungen von $(*)$ sind. Die Funktion $y_s(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ ist also eine Lösung von $(**)$.
Wie man die Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$ bestimmt, geht aus dem Beweis des folgenden Satzes hervor.

**Satz 10.** *Sei $y_1, y_2\colon I \to \mathbb{R}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen für die DGL $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, und sei $W(x)$ die zugehörige Wronski-Determinante. Dann ist*

$$y_s(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)b(x)}{W(x)}\,dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)b(x)}{W(x)}\,dx$$

*eine Lösung der DGL $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$.*

*Beweis.* Die Wronski-Determinante $W(x)$ ist $\neq 0$ für alle $x \in I$, da $y_1$ und $y_2$ linear unabhängig sind, vgl. Satz 7. Die zu $W(x)$ gehörige Matrix ist gerade die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems (1), wenn man es in Matrixform schreibt:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(x) \end{pmatrix}.$$

Dieses System hat nach der Cramerschen Regel genau eine Lösung

$$c_1'(x) = \frac{1}{W(x)} \det \begin{pmatrix} 0 & y_2(x) \\ b(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = -\frac{y_2(x)b(x)}{W(x)},$$

$$c_2'(x) = \frac{1}{W(x)} \det \begin{pmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & b(x) \end{pmatrix} = \frac{y_1(x)b(x)}{W(x)}.$$

Durch Integrieren erhalten wir $c_1(x)$ und $c_2(x)$. Dass $y_s(x)$ die inhomogene DGL löst, haben wir oben nachgerechnet. □

**Beispiel.** Man löse die DGL $y'' + y = \frac{1}{\sin(x)}$ für $x \in ]0,\pi[$. Ein Fundamentalsystem von Lösungen für die homogene DGL $y'' + y = 0$ ist $y_1(x) = \cos(x)$ und $y_2(x) = \sin(x)$. Berechne die Wronski-Determinante: $W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Nach Satz 10 ist

$$\begin{aligned} y_s(x) &= -y_1(x) \int \frac{y_2(x)b(x)}{W(x)}\,dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)b(x)}{W(x)}\,dx \\ &= -\cos(x) \int 1\,dx + \sin(x) \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx \\ &= -x\cos(x) + \sin(x)\ln(\sin(x)) \end{aligned}$$

eine spezielle Lösung der DGL $y''+y = \frac{1}{\sin(x)}$. Die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = -x\cos(x) + \sin(x)\ln(\sin(x)) \; + \; c_1\cos(x) + c_2\sin(x).$$

## 7.5 Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Eine DGL mit variablen Koeffizienten ist häufig nicht durch elementare Funktionen lösbar. Anders ist es bei einer DGL

$$(*) \qquad y'' + a_1\,y' + a_0\,y = 0$$

mit konstanten Koeffizienten $a_0$, $a_1 \in \mathbb{R}$. Hier kann man ein Fundamentalsystem von Lösungen stets direkt angeben, wie der folgende Satz zeigt.

**Satz 11.** *Mit* $q_0 := -\frac{a_1^2}{4} + a_0$ *bilden die folgenden Funktionen* $y_1, y_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jeweils ein Fundamentalsystem von Lösungen für die DGL* $(*)$*.*

**1. Fall** $q_0 < 0$ **.** *Es ist* $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ *und* $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ *mit* $\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{-q_0}$ .

**2. Fall** $q_0 = 0$ **.** *Es ist* $y_1(x) = e^{\alpha x}$ *und* $y_2(x) = x\, e^{\alpha x}$ *mit* $\alpha = -\frac{a_1}{2}$ .

**3. Fall** $q_0 > 0$ **.** *Es ist* $y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ *und* $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ *mit* $\alpha = -\frac{a_1}{2}$ *und* $\beta = \sqrt{q_0}$ .
*(Hierbei sind* $\alpha \pm \beta i$ *die Lösungen der* charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$.*)*

*Beweis.* **Zum 1. Fall:** Für $q_0 < 0$ sind $\lambda_1$ und $\lambda_2$ zwei verschiedene reelle Lösungen der Gleichung $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$. Es ist $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ eine Lösung von $(*)$, da $y_1''(x) + a_1 y_1'(x) + a_0 y_1(x) = \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + a_1\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + a_0 e^{\lambda_1 x} = (\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_0)e^{\lambda_1 x} = 0$ gilt. Analog ist $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ eine Lösung der DGL $(*)$. Die beiden Lösungen sind nach Satz 7 in 7.1 linear unabhängig, denn es ist $W(0) = y_1(0)y_2'(0) - y_1'(0)y_2(0) = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gilt.

**Zum 2. Fall:** Beseitigen des zweithöchsten Gliedes in der DGL $(*)$ führt nach Lemma 2 in 7.3 zu der DGL $v'' = 0$, da $q_0 = 0$ ist. Deren Lösungen $v_1(x) = 1$ und $v_2(x) = x$ bilden ein Fundamentalsystem, denn es ist $W(x) = v_1(x)v_2'(x) - v_1'(x)v_2(x) = 1 \neq 0$. Nach Satz 9 in 7.3 bilden dann die Funktionen $y_1(x) = u(x)v_1(x) = u(x)$ und $y_2(x) = u(x)v_2(x) = u(x)x$ mit $u(x) = e^{-\frac{a_1}{2}x}$ ein Fundamentalssystem für die DGL $(*)$.

**Zum 3. Fall:** Beseitigen des zweithöchsten Gliedes in der DGL $(*)$ führt nach Lemma 2 in 7.3 zu der DGL $v'' + q_0 v = 0$ mit $q_0 > 0$. Sie hat die Lösung $v_1(x) = \cos(\beta x)$ mit $\beta = \sqrt{q_0}$, denn es ist $v_1'(x) = -\beta \sin(\beta x)$ und $v_1''(x) = -\beta^2 \cos(\beta x) = -q_0 v_1(x)$. Analog ist $v_2(x) = \sin(\beta x)$ eine Lösung der DGL $v'' + q_0 v = 0$. Diese Lösungen bilden ein Fundamentalsystem, denn es ist $W(0) = v_1(0)v_2'(0) - v_1'(0)v_2(0) = \beta \neq 0$. Nach Satz 9 in 7.3 bilden dann die Funktionen $y_1(x) = u(x)v_1(x) = u(x)\cos(\beta x)$ und $y_2(x) = u(x)v_2(x) = u(x)\sin(\beta x)$ mit $u(x) = e^{-\frac{a_1}{2}x}$ ein Fundamentalssystem für die DGL $(*)$. □

**Beispiel 1. Schwingungsgleichung**
In Abschnitt 6.3 haben wir die die reibungsfreie Bewegung eines elastisch angebundenen Punktes der Masse $m$ durch die DGL $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ beschrieben, wobei $\omega^2 = \frac{k}{m}$ und $k > 0$ eine Konstante ist. Ist nun noch eine Reibungskraft gegeben, die proportional zur Geschwindigkeit ist, so erhalten wir die DGL

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega^2 x = 0\,,$$

wobei $\rho = \frac{r}{2m}$ mit einer Reibungskonstanten $r > 0$ gilt. Es ist also $\rho > 0$, und es ist $q_0 = -\frac{(2\rho)^2}{4} + \omega^2 = -\rho^2 + \omega^2$. Die obigen Fallunterscheidungen $q_0 < 0$, $q_0 = 0$ und $q_0 > 0$ spiegeln unterschiedliches Schwingungsverhalten wieder, was wir nun näher untersuchen wollen, vgl. z. B. [13, IV.18].

**1. Fall** $\boldsymbol{q_0 = -\rho^2 + \omega^2 < 0}$. Dann ist $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ mit

$$\lambda_{1,2} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega^2}$$

die allgemeine Lösung der DGL $\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega^2 x = 0$.
Die Reibungskraft ist hier im Vergleich zur elastischen Kraft groß. Da $\rho > \sqrt{\rho^2 - \omega^2}$ ist, sind $\lambda_1$ und $\lambda_2$ beide negativ. Es ist also $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, der Punkt nähert sich asymptotisch dem Nullpunkt. Die Geschwindigkeit des Punktes ist $\dot{x}(t) = c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}$ und also im Fall $c_1 \neq 0$ genau dann $0$, wenn $c_1\lambda_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} = -c_2\lambda_2$ gilt. Dies kann höchstens für einen Wert $t$ auftreten, d.h. der Massenpunkt kehrt höchstens einmal seine anfängliche Bewegungsrichtung um und nähert sich dann asymptotisch dem Nullpunkt. Dies ist der *stark gedämpfte Fall.*

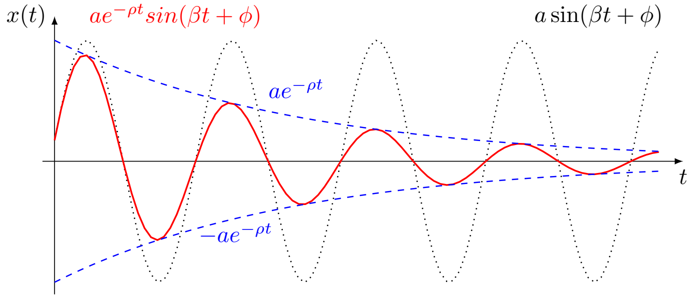
**2. Fall** $\boldsymbol{q_0 = -\rho^2 + \omega^2 = 0}$. Dann ist $x(t) = c_1 e^{-\rho t} + c_2 t e^{-\rho t}$ die allgemeine Lösung der DGL $\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega^2 x = 0$. Wie im 1. Fall gilt hier $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, und es ist $\dot{x}(t) = 0$ für höchstens einen Wert $t$. Der Massenpunkt kehrt also wie im stark gedämpften Fall höchstens einmal seine anfängliche Bewegungsrichtung um und nähert sich dann asymptotisch dem Nullpunkt. Dies ist der *aperiodische Grenzfall.*

**3. Fall** $\boldsymbol{q_0 = -\rho^2 + \omega^2 > 0}$. Mit $\beta := \sqrt{q_0}$ ist dann

$$x(t) = e^{-\rho t}\big(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)\big)$$

die allgemeine Lösung der DGL $\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega^2 x = 0$. Diese kann man, wie unten gezeigt wird, umformen zu $x(t) = a\, e^{-\rho t} \sin(\beta t + \varphi)$ mit $a := \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, was nun aber, im Gegensatz zur ungedämpften Schwingung mit $\rho = 0$ in Abschnitt 6.3, keine reine Sinusschwingung mehr ist. Da hier $\rho > 0$ ist, gilt auch wieder wie im 1. und 2. Fall $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. Aber der Massenpunkt pendelt jetzt ständig um den Nullpunkt herum, allerdings mit abnehmenden Amplituden. Dies ist der *schwach gedämpfte Fall.*

Wir betrachten die Lösung $x(t) = e^{-\rho t}\big(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)\big)$ der DGL $\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega^2 x = 0$ mit $0 < \rho < \omega$. Wenn $c_1 = 0 = c_2$ gilt, bleibt $m$ bewegungslos im Nullpunkt. Sei nun $a := \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \neq 0$. Da $\frac{c_1^2}{a^2} + \frac{c_2^2}{a^2} = 1$ gilt, gibt es genau ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $\frac{c_1}{a} = \sin(\varphi)$ und $\frac{c_2}{a} = \cos(\varphi)$.
Es folgt $x(t) = a\, e^{-\rho t}\big(\sin(\varphi)\cos(\beta t) + \cos(\varphi)\sin(\beta t)\big) = a\, e^{-\rho t}(\sin(\beta t + \varphi))$ nach Additionstheorem $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.




In Beispiel 1 haben wir *freie Schwingungen* eines Massenpunktes betrachtet, und wir kommen nun zu den *erzwungenen Schwingungen*. Der Massenpunkt sei wieder elastisch angebunden, und es wirke wieder eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft. Zusätzlich wirke noch eine äußere Kraft $F(t)$. Es gilt dann die DGL $\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m}$. Wir betrachten nun allgemein die inhomogene DGL

$$(**) \qquad y'' + a_1\, y' + a_0\, y = b(x)$$

mit einer stetigen Funktion $b\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Dann kann man mit Hilfe eines Fundamentalsystems für die homogene DGL $(*)$ die Methode der Variation der Konstanten gemäß Satz 10 in 7.4 benutzen, um eine spezielle Lösung $y_s\colon I \to \mathbb{R}$ von $(**)$ zu ermitteln.
In vielen Fällen kommt man aber auch durch einen passenden Ansatz direkt zu einer speziellen Lösung. Wir betrachten hier drei Fälle.

**1:** Es ist $b(x) = \alpha_1 e^{\nu x}$ mit $\nu, \alpha_1 \in \mathbb{R}$.

**Ansatz.** $y_s(x) = a\, e^{\nu x}$, falls $\nu$ keine Lösung der *charakteristischen Gleichung* $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ ist, und $y_s(x) = a x^r e^{\nu x}$, falls $\nu$ eine $r$-fache Lösung der charakteristischen Gleichung ist mit $r = 1$ oder $r = 2$. Es ist dann die Konstante $a$ zu bestimmen.

**2:** Es ist $b(x)$ ein Polynom vom Grad $m$. Ist $a_0 \neq 0$, so erhält man stets ein Polynom $y_s(x)$ vom Grad $m$ als Lösung von $(**)$:

**Ansatz.** $y_s(x) = s_m x^m + s_{m-1}x^{m-1} + \cdots + s_1 x + s_0$, falls $a_0 \neq 0$, und $y_s(x) = x(s_m x^m + s_{m-1}x^{m-1} + \cdots + s_1 x + s_0)$, falls $a_0 = 0$ und $a_1 \neq 0$. Dies setzt man in $(**)$ ein und ermittelt durch Koeffizientenvergleich mit $b(x)$ die Koeffizienten $s_0, \ldots, s_m$.

**3:** Es ist $b(x) = \alpha_1 \cos(\beta x) + \alpha_2 \sin(\beta x)$ mit $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta \in \mathbb{R}$ und $a_1 \neq 0$.

**Ansatz.** $y_s(x) = b_1 \cos(\beta x) + b_2 \sin(\beta x)$ mit $b_1$, $b_2 \in \mathbb{R}$. Es sind $b_1$ und $b_2$ zu bestimmen.

**Beispiel 2.** (a) Zur DGL $y'' - 4y = 10\,e^{3x}$ gehört die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 4 = 0$ mit den Lösungen $\lambda = \pm 2 \neq 3$. Wir machen den Ansatz $y_s(x) = ae^{3x}$. Dann ist $y_s'(x) = 3ae^{3x}$ und $y_s''(x) = 9ae^{3x}$. Es folgt $y_s''(x) - 4y_s(x) = 9ae^{3x} - 4ae^{3x} = 5ae^{3x} \stackrel{!}{=} 10e^{3x}$ und daher $a = 2$. Es ist also $y_s(x) = 2e^{3x}$ eine spezielle Lösung der DGL $y'' - 4y = 10\,e^{3x}$.

**Probe.** $y_s = 2e^{3x} \Longrightarrow y_s'' - 4y_s = 18\,e^{3x} - 4 \cdot 2e^{3x} = 10\,e^{3x}$ ✓
(b) Man finde eine spezielle Lösung der DGL $y'' - 4y = 8e^{2x}$. Hier ist $\nu = 2$ eine einfache Lösung der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 - 4 = 0$. Wir machen den Ansatz $y_s(x) = axe^{2x}$. Dann ist $y_s'(x) = ae^{2x} + 2axe^{2x}$ und $y_s''(x) = 2ae^{2x} + 2ae^{2x} + 4axe^{2x} = 4ae^{2x} + 4axe^{2x}$. Es folgt $y_s''(x) - 4y_s(x) = 4ae^{2x} + 4axe^{2x} - 4axe^{2x} = 4ae^{2x} \stackrel{!}{=} 8e^{2x}$ und daher $a = 2$. Es ist also $y_s(x) = 2xe^{2x}$.
**Probe.** $y_s = 2xe^{2x} \Longrightarrow y_s'' - 4y_s = 8e^{2x} + 8xe^{2x} - 8xe^{2x} = 8e^{2x}$ ✓

**Beispiel 3.** Es ist eine spezielle Lösung der DGL $y'' + 2y' - 3y = 3x^2 - 4x + 1$ zu bestimmen.
Ansatz: $y_s(x) = s_2x^2 + s_1x + s_0$. Es folgt $y_s'(x) = 2s_2x + s_1$ und $y_s''(x) = 2s_2$ und also $y_s''(x) + 2y_s'(x) - 3y_s(x) = 2s_2 + 2(2s_2x + s_1) - 3(s_2x^2 + s_1x + s_0) = -3s_2x^2 + (4s_2 - 3s_1)x + 2s_2 + 2s_1 - 3s_0 \stackrel{!}{=} 3x^2 - 4x + 1$. Koeffizientenvergleich ergibt $s_2 = -1$, also $-4 - 3s_1 = -4$ und $s_1 = 0$. Daher gilt $-2 - 3s_0 = 1$ und $s_0 = -1$. Es folgt $y_s(x) = s_2x^2 + s_1x + s_0 = -x^2 - 1$.

**Probe.** $y_s = -x^2 - 1 \Longrightarrow y_s' = -2x \Longrightarrow y_s'' = -2 \Longrightarrow y_s'' + 2y_s' - 3y_s = -2 - 4x + 3x^2 + 3 = 3x^2 - 4x + 1$ ✓

**Beispiel 4.** Es ist eine spezielle Lösung der DGL $y'' + y' + y = \sin(2x)$ zu bestimmen.
Ansatz. $y_s(x) = b_1\cos(2x) + b_2\sin(2x)$. Es folgt $y_s'(x) = -2b_1\sin(2x) + 2b_2\cos(2x)$ und $y_s''(x) = -4b_1\cos(2x) - 4b_2\sin(2x)$, also

$$y_s'' + y_s' + y_s = (-3b_1 + 2b_2)\cos(2x) + (-2b_1 - 3b_2)\sin(2x) \stackrel{!}{=} \sin(2x)\,.$$

Es muss daher $-3b_1 + 2b_2 = 0$ und $-2b_1 - 3b_2 = 1$ gelten. Dieses lineare Gleichungssystem hat die Lösungen $b_1 = -\frac{2}{13}$ und $b_2 = -\frac{3}{13}$. Es folgt$y_s(x) = -\frac{2}{13}\cos(2x) - \frac{3}{13}\sin(2x)$.

**Probe.** $y_s = -\frac{2}{13}\cos(2x) - \frac{3}{13}\sin(2x) \Longrightarrow y_s' = \frac{4}{13}\sin(2x) - \frac{6}{13}\cos(2x) \Longrightarrow y_s'' = \frac{8}{13}\cos(2x) + \frac{12}{13}\sin(2x) \Longrightarrow y_s'' + y_s' + y_s = \sin(2x)$ ✓

**Komplexwertige Lösungen**

In Büchern wird meist die DGL $(*)$ durch den Ansatz

$$y(x) = e^{\lambda x} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{und mit einer Konstanten} \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

gelöst. Die Exponentialfunktion im Komplexen wird z. B. im Buch [8] eingeführt. Dort wird auch bewiesen, dass $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

**Lemma.** *Die Funktion $y(x) = e^{\lambda x}$ ist genau dann eine Lösung der DGL*

$$(*) \qquad y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$$

*wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Lösung der* charakterischen Gleichung

$$(**) \qquad \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

*ist. Sind $\lambda_1$ und $\lambda_2$ zwei konjugiert komplexe Lösungen von* (2)*, so sind*

$$y_1(x) = \Re(e^{\lambda_1 x}) \quad \textit{und} \quad y_2(x) = \Im(e^{\lambda_1 x})$$

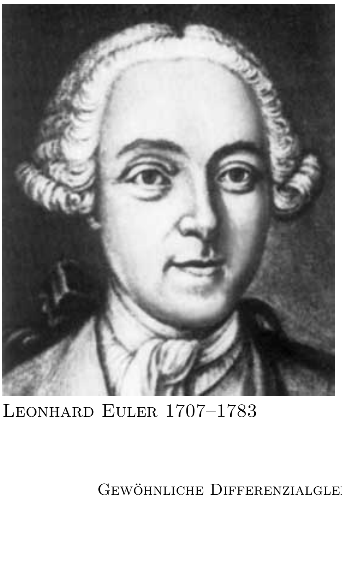
*linear unabhängige reellwertige Lösungen von $(*)$.*

*Beweis.* Die Funktion $y(x) = e^{\lambda x}$ hat die Ableitungen $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ und $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Es folgt

$$y''(x) + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = (\lambda^2 + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda x}.$$

Da $e^{\lambda x} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist also $y(x)$ genau dann eine Lösung von $(*)$, wenn $\lambda$ eine Lösung von $(**)$ ist.
Die letzte Behauptung folgt aus dem 3. Fall von Satz 11 und mit Hilfe der Eulerschen Formel $e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i\sin(\beta x)$. □

## 7.6 Euler-DGL



Leonhard Euler 1707–1783

Die Euler-DGL ist von der Form

$$x^2y'' + a_1xy' + a_0y = b(x)$$

mit $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Sie ist eine DGL mit variablen Koeffizienten, lässt sich aber für $x > 0$ durch die Substitution $x = e^t$, also $t = \ln(x)$, und $y = z(t)$ in eine DGL mit konstanten Koeffizienten überführen: Es ist $y' = \frac{dz}{dt} \cdot t' = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{1}{x}$ und daher $xy' = \frac{dz}{dt}$. Nach Produktregel folgt $y'' = \left(\frac{dz}{dt}\right)' \cdot t' + \frac{dz}{dt} \cdot t'' = \left(\frac{d^2z}{dt^2} \cdot \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x} - \frac{dz}{dt} \cdot \frac{1}{x^2}$, also $x^2y'' = \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}$.

**Fazit.** *Die Funktion $b(x)$ sei für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ definiert. Dann gilt: Wenn $z(t)$ eine Lösung der DGL*

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + (a_1 - 1)\frac{dz}{dt} + a_0\, z = b(e^t) \tag{1}$$

*für alle $t \in \mathbb{R}$ ist, so ist $y(x) = z(\ln(x))$ eine Lösung der Euler-DGL*

$$x^2 y'' + a_1 x y' + a_0\, y = b(x) \tag{2}$$

*für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Wenn umgekehrt $y(x)$ eine Lösung der Euler-DGL (2) ist, so ist $z(t) := y(e^t)$ eine Lösung der DGL (1).*

*Zwei Lösungen $z_1(t)$ und $z_2(t)$ bilden genau dann ein Fundamentalsystem von Lösungen für die zu (1) gehörige homogene DGL, wenn*

$$y_1(x) = z_1(\ln(x)) \quad \textit{und} \quad y_2(x) = z_2(\ln(x))$$

*ein Fundamentalsystem für die zu (2) gehörige homogene Euler-DGL bilden. Dies folgt aus Satz 7, da $W(t) = z_1(t)z_2'(t) - z_1'(t)z_2(t) \neq 0$ ist.*

*Ist $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ die allgemeine Lösung der Euler-DGL*

$$x^2 y'' + a_1 x y' + a_0\, y = 0$$

*für $x > 0$, so ist $u(x) := y(-x)$ deren allgemeine Lösung für $x < 0$.*

**Beispiel 1.** Zu lösen ist die DGL $x^2 y'' - 3xy' + 4y = \ln(x)$ für $x > 0$. Die zugehörige lineare DGL mit konstanten Koeffizienten ist

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - 4\frac{dz}{dt} + 4z = t\,. \tag{3}$$

Es ist $q_0 = 0$, und daher erhalten wir nach Satz 11 die beiden linear unabhängigen Lösungen $z_1(t) = e^{2t}$ und $z_2(t) = te^{2t}$ der zugehörigen homogenen DGL.

Eine spezielle Lösung $z_s(t)$ erhält man durch den Ansatz $z_s(t) = s_1 t + s_0$. Es ist $\frac{dz_s}{dt} = s_1$ und $\frac{d^2 z_s}{dt^2} = 0$ und also $\frac{d^2 z_s}{dt^2} - 4\frac{dz_s}{dt} + 4z_s = -4s_1 + 4s_1 t + 4s_0 = 4s_1 t + 4(-s_1 + s_0) \overset{!}{=} t$. Es folgt $4s_1 = 1$ und $s_1 = \frac{1}{4} = s_0$. Daher ist $z_s(t) = \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}$, und es ist $z(t) = \frac{1}{4}t + \frac{1}{4} + c_1 e^{2t} + c_2 te^{2t}$ die allgemeine Lösung der DGL (3). Wir erhalten $y(x) = z(\ln(x)) = \frac{1}{4}(\ln(x) + 1) + x^2(c_1 + c_2 \ln(x))$ als allgemeine Lösung der Euler-DGL.

Mit $q_1 := -\frac{(a_1-1)^2}{4} + a_0$ bekommt man aus Satz 11 eine Übersicht über alle Lösungen der homogenen Euler-DGL für $x > 0$. Man hat nur $x$ durch $\ln(x)$ in den Lösungen von Satz 11 zu ersetzen und zu bedenken, dass $e^{\lambda \ln(x)} = x^\lambda$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt.

**Korollar zu Satz 11.** *Mit* $q_1 := -\frac{(a_1-1)^2}{4} + a_0$ *bilden die folgenden Funktionen* $y_1, y_2 \colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ *jeweils ein Fundamentalsystem von Lösungen für die homogene Euler-DGL* $x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0.$

**1. Fall $q_1 < 0$.** *Es ist* $y_1(x) = x^{\lambda_1}$ *und* $y_2(x) = x^{\lambda_2}$ *mit* $\lambda_{1,2} = -\frac{a_1-1}{2} \pm \sqrt{-q_1}.$

**2. Fall $q_1 = 0$.** *Es ist* $y_1(x) = x^{\alpha}$ *und* $y_2(x) = \ln(x)\, x^{\alpha}$ *mit* $\alpha = -\frac{a_1-1}{2}$ .

**3. Fall $q_1 > 0$.** *Es ist* $y_1(x) = x^{\alpha}\cos(\beta\ln(x))$ *und* $y_2(x) = x^{\alpha}\sin(\beta\ln(x))$ *mit* $\alpha = -\frac{a_1-1}{2}$ *und* $\beta = \sqrt{q_1}$ .

*(Hierbei sind* $\alpha \pm \beta i$ *die Lösungen der charakteristischen Gleichung* $\lambda^2 + (a_1-1)\lambda + a_0 = 0.$*)*

### Komplexwertige Lösungen der homogenen Euler-DGL

Analog zum Lemma über komplexwertige Lösungen am Ende von Abschnitt 7.5 erhalten wir hier das folgende

**Lemma.** *Eine Funktion* $y \colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C}, x \mapsto x^{\lambda}$ *mit* $\lambda \in \mathbb{C}$ *ist genau dann eine Lösung der Euler-DGL*

$$x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0\,, \tag{4}$$

*wenn* $\lambda$ *eine Lösung der Gleichung*

$$\lambda^2 + (a_1-1)\lambda + a_0 = 0 \tag{5}$$

*ist. Sind* $\lambda_1$ *und* $\lambda_2$ *zwei konjugiert komplexe Lösungen der Gleichung* (5)*, so sind* $y_1(x) = \Re(x^{\lambda_1})$ *und* $y_2(x) = \Im(x^{\lambda_1})$ *linear unabhängige reellwertige Lösungen der Euler-DGL* (4)*.*

*Beweis.* Für $y(x) = x^{\lambda}$ ist $y'(x) = \lambda x^{\lambda-1}$ und $y''(x) = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$. Es folgt $x^2y''(x) + a_1xy'(x) + a_0(x)y(x) = x^2\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + a_1x\lambda x^{\lambda-1} + a_0x^{\lambda} = (\lambda^2-\lambda)x^{\lambda} + a_1\lambda x^{\lambda} + a_0x^{\lambda} = (\lambda^2 + (a_1-1)\lambda + a_0)x^{\lambda}$. Also ist $y(x) = x^{\lambda}$ genau dann eine Lösung von (4), wenn $\lambda$ eine Lösung von (5) ist. Die letzte Behauptung folgt aus dem 3. Fall in obigem Lemma, da $\Re(x^{\lambda_1}) = x^{\alpha}\cos(\beta\ln(x))$ und $\Im(x^{\lambda_1}) = x^{\alpha}\sin(\beta\ln(x))$ gilt. □

## 7.7 Exkurs über die Legendre-DGL

Wir studieren im Folgenden die *Legendre-DGL*

$$(1_n) \qquad (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)\,y = 0$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$. Ihre Lösungen, die man auch *Kugelfunktionen* nennt, spielen eine wichtige Rolle in der Physik.

Dieser Abschnitt ist etwas länger geworden. Die danach folgenden Kapitel sind aber unabhängig davon.

Adrien-Marie Legendre
1752–1833

Zunächst bestimmen wir ein Fundamentalsystem von Lösungen $P_0(x)$ und $Q_0(x)$ der DGL $(1_0)$ und dann mit Hilfe der Rekursionsformel (3) unten ein Fundamentalsystem von Lösungen $P_n(x)$ und $Q_n(x)$ der DGL $(1_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dabei haben wir uns auch Gedanken über die Lösungsintervalle zu machen.

Die DGL $(1_0)$ lautet $(1-x^2)y'' - 2xy' = 0$. Ersichtlich ist $P_0(x) = 1$ eine Lösung für alle $x \in \mathbb{R}$. Um Satz 8 anwenden zu können, bringen wir die DGL $(1_0)$ in die Normalform $y'' - \frac{2x}{1-x^2}\,y' = 0$ für $x \in \,]-1,1[$.
Eine Stammfunktion von $a_1(x) := -\frac{2x}{1-x^2}$ ist $\mathcal{A}_1(x) = \ln(1-x^2)$. Nach Satz 8 ist $Q_0(x) = \displaystyle\int e^{-\mathcal{A}_1(x)}\,dx = \int \frac{1}{1-x^2}\,dx$ eine von $P_0(x) = 1$ linear unabhängige Lösung. Da $1-x^2 = (1-x)(1+x)$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= \int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\Big(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\Big)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\big(-\ln(1-x) + \ln(1+x)\big) = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big) = \ln\Big[\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big] \\ &= \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \qquad \text{für alle } \; x \in \,]-1,1[\,. \end{aligned}$$

Für $x \in \mathbb{R}_{>1}$ und $x \in \mathbb{R}_{<-1}$ ist $\frac{x+1}{x-1} > 0$ und $Q_0(x) := \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ eine Lösung der DGL $(1_0)$.

**Probe:** $Q_0 = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2}\big(\ln(x+1) - \ln(x-1)\big) \Longrightarrow Q_0' = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\big) = \frac{1}{2}\,\frac{x-1-(x+1)}{x^2-1} = \frac{-1}{x^2-1} = \frac{1}{1-x^2}$ und $Q_0'' = \frac{2x}{(1-x^2)^2} \Longrightarrow (1-x^2)Q_0'' - 2xQ_0' = \frac{2x}{1-x^2} - 2x\,\frac{1}{1-x^2} = 0 \qquad \checkmark$

Wir definieren daher

$$Q_0(x) = \begin{cases} \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} & \text{für } x \in \,]-1,1[ \\ \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} & \text{für } x \in \mathbb{R}_{>1} \text{ oder } x \in \mathbb{R}_{<-1} \end{cases}$$

und halten fest, dass in jedem der Fälle $Q_0'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ gilt und $Q_0(x)$ eine Lösung von $(1_0)$ ist. Die DGL $(1_n)$ lässt sich umschreiben zu

$$(2_n) \qquad ((x^2-1)y')' = n(n+1)y\,,$$

denn $((x^2-1)y')' = (x^2-1)y'' + 2xy' = -(1-x^2)y'' + 2xy' \overset{(1_n)}{=} n(n+1)y$.

**Lemma 1.** *Sei $I$ eines der vier Intervalle $\mathbb{R}$, $]-1,1[$, $\mathbb{R}_{>1}$ oder $\mathbb{R}_{<-1}$. Ist $Y_n(x)$ eine Lösung der DGL $(1_n)$ für $x \in I$, so ist*

$$(3) \qquad Y_{n+1}(x) := \frac{x^2-1}{n+1}\,Y_n'(x) + xY_n(x)$$

*eine Lösung der DGL $(1_{n+1})$ für $x \in I$. Es gilt*

$$(4) \qquad Y_{n+1}'(x) = (n+1)Y_n(x) + xY_n'(x)\,.$$

*Beweis.* Wir setzen voraus, dass die DGL $(2_n)$ für $Y_n$ erfüllt ist und also

$$(5_n) \qquad ((x^2-1)Y_n'(x))' = n(n+1)Y_n(x)$$

für alle $x \in I$ gilt. Zunächst zeigen wir (4). Aus $Y_{n+1} := \frac{1}{n+1}(x^2-1)\,Y_n' + xY_n$ folgt $Y_{n+1}' \overset{(5_n)}{=} \frac{1}{n+1}\,n(n+1)Y_n + Y_n + xY_n' = (n+1)Y_n + xY_n'$ und also (4). Um zu zeigen, dass $Y_{n+1}$ eine Lösung der DGL $(1_{n+1})$ ist, haben wir zu zeigen, dass die Gleichung $(5_{n+1})$ für alle $x \in I$ erfüllt ist. Es ist

$$\begin{aligned}
((x^2-1)Y_{n+1}')' &\overset{(4)}{=} \big((x^2-1)((n+1)Y_n + xY_n')\big)' \\
&= (x^2-1)((n+1)Y_n' + Y_n' + xY_n'') + 2x\big((n+1)Y_n + xY_n'\big) \\
&= x\big((x^2-1)Y_n'' + 2xY_n'\big) + \\
&\qquad\qquad (x^2-1)(n+2)Y_n' + 2x(n+1)Y_n \\
&\overset{(5_n)}{=} x\,n(n+1)Y_n \;+\; (x^2-1)(n+2)Y_n' + 2x(n+1)Y_n \\
&= (n+2)(x^2-1)Y_n' + x(n+1)(n+2)Y_n \\
&= (n+1)(n+2)\Big(\frac{x^2-1}{n+1}\,Y_n' + xY_n\Big) \\
&= (n+1)(n+2)Y_{n+1}
\end{aligned}$$

□

Üblicherweise wird die DGL ($1_n$) durch Reihen von Funktionen oder Integralausdrücke gelöst, und daraus werden dann Rekursionsformeln gewonnen. So werden auch die Formeln (3) und (4) in [23, S. 60f ($B.$), ($D.$) und S. 65 ($B.^b$), ($D.^b$)] hergeleitet. Die Idee, die Rekursionsformel (3) als Definition für die Kugelfunktionen zu benutzen, ist dem Vorlesungsskript [6, 4.2] entnommen.
Ausgehend von den oben erhaltenen Lösungen $\boldsymbol{P_0(x)}$ und $\boldsymbol{Q_0(x)}$ der DGL ($1_0$) seien nun $\boldsymbol{P_n(x)}$ und $\boldsymbol{Q_n(x)}$ **Lösungen** der DGL ($1_n$) gemäß Lemma 1 für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Ossian Bonnet 1819–1892

**Formel von Bonnet (1852):** Diese enthält keine Ableitung und eignet sich besonders gut zum rekursiven Berechnen der Funktionen $P_n$ und $Q_n$. Vgl. [3, S. 267 Théorème V]. *Sei $Y_n = P_n$ und $I_0 = \mathbb{R}$ oder sei $Y_n = Q_n$ und $I_0$ ein Intervall, auf dem $Q_0$ definiert ist. Dann gilt*

$$Y_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}\, x\, Y_n(x) - \frac{n}{n+1}\, Y_{n-1}(x)$$

*für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in I_0$.*

*Beweis.* Es ist $Y_n' = \frac{n+1}{x^2-1}\big(Y_{n+1} - xY_n\big)$ und $Y_{n-1}' = \frac{n}{x^2-1}\big(Y_n - xY_{n-1}\big)$ nach (3). Setze dies in $Y_n' \overset{(4)}{=} nY_{n-1} + xY_{n-1}'$ ein und erhalte

$$\tfrac{n+1}{x^2-1}\big(Y_{n+1} - xY_n\big) = nY_{n-1} + x\tfrac{n}{x^2-1}\big(Y_n - xY_{n-1}\big).$$

Es folgt
$(n+1)(Y_{n+1} - xY_n) = (x^2-1)nY_{n-1} + xn(Y_n - xY_{n-1}) = -nY_{n-1} + nxY_n$
und also $(n+1)Y_{n+1} = (2n+1)xY_n - nY_{n-1}$ . □

Wir zeigen nun zunächst, dass die Lösungen $P_n$ und $Q_n$ der DGL ($1_n$) linear unabhängig sind.

**Lemma 2.** *Sei $I_0$ ein Intervall, auf dem $Q_0$ definiert ist, und sei $W_n(x)$ die zu den Lösungen $P_n$ und $Q_n$ von ($1_n$) gehörige Wronski-Determinante. Dann ist $W_n(x) = \frac{1}{1-x^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in I_0$.*
*Insbesondere sind $P_n$ und $Q_n$ auf $I_0$ linear unabhängig für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.*

*Beweis.* Zunächst zeigen wir, dass $W_{n+1}(x) = W_n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Nach Definition ist $W_{n+1}(x) = \det\begin{pmatrix} P_{n+1}(x) & Q_{n+1}(x) \\ P_{n+1}'(x) & Q_{n+1}'(x) \end{pmatrix}$. Einsetzen gemäß (3) und (4) aus Lemma 1 ergibt

$$W_{n+1}(x) = \det \begin{pmatrix} \frac{x^2-1}{n+1} P_n'(x) + xP_n(x) & \frac{x^2-1}{n+1} Q_n'(x) + xQ_n(x) \\ (n+1)P_n(x) + xP_n'(x) & (n+1)Q_n(x) + xQ_n'(x) \end{pmatrix}.$$

Addieren der mit $\frac{-x}{n+1}$ multiplizierten 2. Zeile zur 1. Zeile ergibt

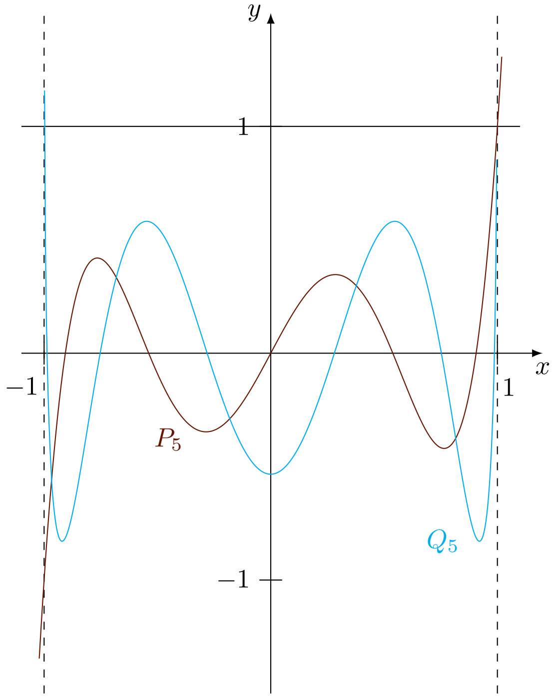
$$W_{n+1}(x) = \det \begin{pmatrix} \frac{-1}{n+1} P_n'(x) & \frac{-1}{n+1} Q_n'(x) \\ (n+1)P_n(x) + xP_n'(x) & (n+1)Q_n(x) + xQ_n'(x) \end{pmatrix}.$$

Addieren der mit $(n+1)x$ multiplizierten 1. Zeile zur 2. Zeile ergibt

$$W_{n+1}(x) = \det \begin{pmatrix} \frac{-1}{n+1} P_n'(x) & \frac{-1}{n+1} Q_n'(x) \\ (n+1)P_n(x) & (n+1)Q_n(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} P_n(x) & Q_n(x) \\ P_n'(x) & Q_n'(x) \end{pmatrix}.$$

Da $P_0(x) = 1$ ist, und wie oben festgehalten wurde, $Q_0'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ gilt, ist $W_0(x) = P_0(x)Q_0'(x) - Q_0(x)P_0'(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Damit ist erste Behauptung gezeigt. Nach Satz 7 in Abschnitt 7.1 sind $P_n$ und $Q_n$ linear unabhängig, da $\frac{1}{1-x^2} \neq 0$ für $x \in I_0$ gilt. □

Wie aus der Definition gemäß (3) ersichtlich wird, sind die Funktionen $P_n(x)$ Polynome vom Grad $n$. Diese werden auch *Legendre-Polynome* oder *Legendre-Funktionen 1. Art* genannt und die Funktionen $Q_n(x)$ *Legendre-Funktionen 2. Art*.




**Die Nullstellen von $P_n$ und $Q_n$ trennen sich:**

Zwischen je zwei hintereinanderfolgenden Nullstellen von $P_n$ liegt genau eine Nullstelle von $Q_n$ und umgekehrt.

Dargestellt für $n = 5$.

Dieses Phänomen folgt aus dem *Sturmschen Trennungssatz*.
Ein Beweis findet sich z. B. in [13, 32.1].

### Legendre-Polynome $P_n$

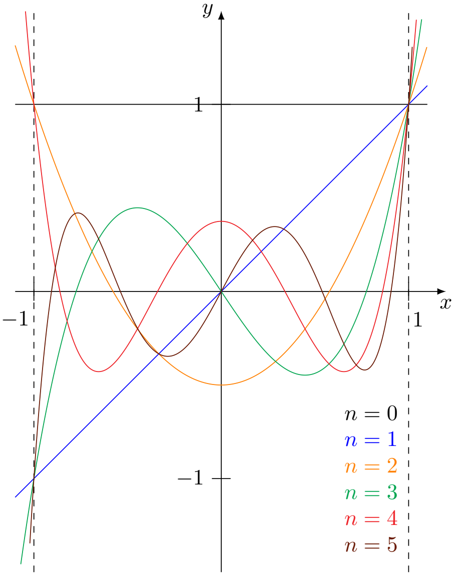
Aus $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$ folgt nach der Formel von Bonnet:

$\boldsymbol{P_2(x)} = \frac{3}{2}xP_1 - \frac{1}{2}P_0 = \boldsymbol{\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}}$

$\boldsymbol{P_3(x)} = \frac{5}{3}xP_2(x) - \frac{2}{3}P_1(x)$
$= \frac{5}{2}x^3 - \frac{5}{6}x - \frac{2}{3}x = \boldsymbol{\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x}$

$\boldsymbol{P_4(x)} = \frac{7}{4}xP_3(x) - \frac{3}{4}P_2(x)$
$= \frac{35}{8}x^4 - \frac{21}{8}x^2 - \frac{9}{8}x^2 + \frac{3}{8}$
$\boldsymbol{= \frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8}}$

$\boldsymbol{P_5(x)} = \frac{9}{5}xP_4(x) - \frac{4}{5}P_3(x)$
$= \frac{63}{8}x^5 - \frac{27}{4}x^3 + \frac{27}{40}x - 2x^3 + \frac{6}{5}x$
$\boldsymbol{= \frac{63}{8}x^5 - \frac{70}{8}x^3 + \frac{15}{8}x}$




Sei $Q_0(x)$ wie oben definiert. Da $Q_0'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ gilt, folgt dann nach (3) in Lemma 1, dass $Q_1(x) = \frac{x^2-1}{1}Q_0'(x) + xQ_0(x) = -1 + xQ_0(x)$ ist.

### Legendre-Funktionen $Q_n$

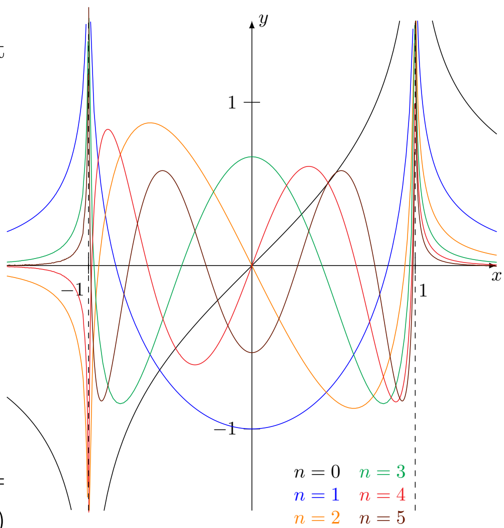
Aus $Q_1(x) = -1+xQ_0(x)$ folgt nach der Formel von Bonnet:

$Q_2(x) = \frac{3}{2}x\,Q_1(x) - \frac{1}{2}Q_0(x)$
$= -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}x^2Q_0(x) - \frac{1}{2}Q_0(x)$
$= -\frac{3}{2}x + P_2(x)Q_0(x)$

$Q_3(x) = \frac{5}{3}x\,Q_2(x) - \frac{2}{3}Q_1(x)$
$= -\frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3} + P_3(x)Q_0(x)$

$Q_4(x) = \frac{7}{4}x\,Q_3(x) - \frac{3}{4}Q_2(x)$
$= -\frac{35}{8}x^3 + \frac{55}{24}x + P_4(x)Q_0(x)$

$Q_5(x) = \frac{9}{5}x\,Q_4(x) - \frac{4}{5}Q_3(x) =$
$-\frac{63}{8}x^4+\frac{49}{8}x^2-\frac{8}{15}+P_5(x)Q_0(x)$




Auch für $n > 5$ ist $Q_n(x)$ von der Form $Q_n(x) = R_n(x) + P_n(x)Q_0(x)$ mit einem „Restpolynom“ $R_n(x)$ vom Grad $n-1$, wie wir noch sehen werden.

Olinde Rodrigues 1797–1851

Die folgende Formel für die Legendre-Polynome $P_n(x)$ geht auf Rodrigues zurück, wie in [11, S. 20 f] dargelegt ist.

**Formel von Rodrigues (1816):** *Es gilt*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\Big((x^2-1)^n\Big)$$

*für* $x \in \mathbb{R}$ *und* $n \in \mathbb{N}_0$.

*Beweis.* Sei $K_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n\big((x^2-1)^n\big)$ mit $D^n := \frac{d^n}{dx^n}$. Wir zeigen $K_n(x) = P_n(x)$ durch Induktion nach $n$.
Es ist $K_0(x) = (x^2-1)^0 = 1 = P_0(x)$, und es gelte $K_m(x) = P_m(x)$ für $0 \leqslant m \leqslant n$. Zu zeigen: $K_{n+1}(x) = P_{n+1}(x)$. Nach Definition ist

$$2^n(n+1)!\,K_{n+1}(x) = \frac{1}{2}D^{n+1}\big((x^2-1)^{n+1}\big),$$

und nach Definition (3) von $P_n(x)$ und Induktionsvoraussetzung ist

$$\begin{aligned} 2^n(n+1)!\,P_{n+1}(x) &= 2^n n!\,(x^2-1)K_n'(x) + 2^n(n+1)!\,xK_n \\ &= (x^2-1)D^{n+1}((x^2-1)^n) + (n+1)xD^n((x^2-1)^n) \end{aligned}$$

Zu zeigen ist also

$$\frac{1}{2}D^{n+1}\big((x^2-1)^{n+1}\big) = (x^2-1)D^{n+1}((x^2-1)^n) + (n+1)xD^n((x^2-1)^n).$$

Nach der Leibniz-Formel, vgl. Aufgabe 67 (A 69), ist

$$\begin{aligned} D^{n+1}\big((x^2-1)^{n+1}\big) &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}D^{n+1-k}\big((x^2-1)^n\big)\cdot D^k(x^2-1) \\ &= D^{n+1}\big((x^2-1)^n\big)(x^2-1) + (n+1)D^n\big((x^2-1)^n\big)2x \\ &\qquad + \frac{(n+1)n}{2}D^{n-1}\big((x^2-1)^n\big)\cdot 2\,. \end{aligned}$$

Andererseits ergibt sich aus A 69:

$$\begin{aligned} D^{n+1}\big((x^2-1)^{n+1}\big) &= D^n\big(D(x^2-1)^{n+1}\big) = D^n\big((n+1)(x^2-1)^n\cdot 2x\big) \\ &\overset{\text{A 69}}{=} 2(n+1)\Big(D^n\big((x^2-1)^n\big)\cdot x + nD^{n-1}\big((x^2-1)^n\big)\Big). \end{aligned}$$

Subtrahiert man die Hälfte dieser Gleichung von der darüber stehenden Gleichung, so erhält man die obige zu zeigende Gleichung. □

**Korollar 1.** *Die Legendre-Polynome $P_n$ haben folgende Eigenschaften.*

i) *Es gilt $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$. Insbesondere ist $P_n$ gerade für gerades $n$ und ungerade für ungerades $n \in \mathbb{N}$, und es ist $P_n(0) = 0$ für ungerades $n$. Ferner gilt $P_n(1) = 1$ und $P_n(-1) = (-1)^n$.*

ii) *$P_n$ hat genau $n$ verschiedene Nullstellen, und diese liegen alle im Intervall $]-1,1[$.*

iii) *Es ist $\int\limits_{-1}^{1} P_n(t)\,dt = 0$ und $\int\limits_{-1}^{1} \frac{t\,P_n(t)}{x-t}\,dt = x \int\limits_{-1}^{1} \frac{P_n(t)}{x-t}\,dt$, wobei $x \neq \pm 1$ in $\mathbb{R}$ sei.*

*Beweis.* **Zu i)** Es ist $P_0(-x) = 1 = (-1)^0 P_0(x)$, und für $0 < m \leqslant n$ gelte $P_m(-x) = (-1)^m P_m(x)$. Hieraus folgt mit Hilfe der Formel von Bonnet

$$\begin{aligned} P_{n+1}(-x) &= \frac{2n+1}{n+1}(-x)P_n(-x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(-x) \\ &= (-1)^{n+1}P_{n+1}(x) \qquad \text{da } (-1)^{n-1} = (-1)^{n+1} \ \text{ gilt.} \end{aligned}$$

Für ungerades $n$ folgt $P_n(0) = -P_n(0)$ und also $P_n(0) = 0$.
Nach (3) ist $P_{n+1}(1) = 0 \cdot P_n'(1) + 1 \cdot P_n(1) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Es folgt nun auch $P_n(-1) = (-1)^n$.

**Zu ii).** Das Polynom $f_n(x) := (x^2-1)^n$ ist vom Grad $2n$. Nach der Formel von Rodrigues ist zu zeigen, dass $f_n^{(n)}(x)$ genau $n$ einfache Nullstellen in $]-1,1[$ hat. Da das Polynom $f_n(x)$ in $x = 1$ und $x = -1$ je eine $n$-fache Nullstelle hat, besitzt $f_n'(x)$ nach dem Satz von Rolle (vgl. z. B. [8, § 16]) eine Nullstelle in $]-1,1[$. Diese ist einfach, weil $f_n'(x)$ vom Grad $2n-1$ ist und $f_n'(x)$ in $x = 1$ und $x = -1$ je eine $(n-1)$-fache Nullstelle hat (und ein Polynom vom Grad $k$ höchstens $k$ Nullstellen hat). Wenn nun $f_n^{(m)}(x)$ genau $m$ einfache Nullstellen für $1 \leqslant m < n$ in $]-1,1[$ hat, so hat $f_n^{(m+1)}(x) = f'\big(f^{(m)}(x)\big)$ nach dem Satz von Rolle genau $m+1$ einfache Nullstellen in $]-1,1[$.

**Zu iii).** Zunächst zeigen wir die Formel

$$(2n+1)\,P_n = P_{n+1}' - P_{n-1}' \tag{6}$$

aus [23, S. 61]: Durch Differenzieren ergibt sich aus der Formel von Bonnet $(n+1)\,P_{n+1}' = (2n+1)P_n + (2n+1)xP_n' - nP_{n-1}'$. Ersetze hierin $P_{n+1}'$ durch $P_{n+1}' \overset{(4)}{=} (n+1)P_n + xP_n'$. Dann folgt

$$(n+1)^2\,P_n + (n+1)xP_n' = (2n+1)P_n + (2n+1)xP_n' - nP_{n-1}'$$

und also $n^2P_n = nxP_n' - nP_{n-1}'$. Kürzen von $n$ und dann Einsetzen von $xP_n' \overset{(4)}{=} P_{n+1}' - (n+1)P_n$ ergibt $nP_n = P_{n+1}' - (n+1)P_n - P_{n-1}'$ und damit die Formel (6). Integriere beide Seiten der Formel (6) und erhalte

$$\int_{-1}^{x} P_n(t)\,dt = \frac{1}{2n+1}\big(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)\big).$$

Einsetzen von $x = 1$ ergibt $\int_{-1}^{1} P_n(t)\,dt = 0$, da $P_m(1) = 1$ nach i) für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt. Hieraus folgt die zweite Behauptung, denn es gilt

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{t\,P_n(t)}{x-t}\,dt &= \int_{-1}^{1} \frac{-(x-t)P_n(t) + xP_n(t)}{x-t}\,dt \\ &= -\int_{-1}^{1} P_n(t)\,dt + x\int_{-1}^{1} \frac{P_n(t)}{x-t}\,dt \\ &= x\int_{-1}^{1} \frac{P_n(t)}{x-t}\,dt \qquad \text{da} \quad \int_{-1}^{1} P_n(t)\,dt = 0\,. \end{aligned}$$ □

### Die Beziehung $Q_n = R_n + P_nQ_0$

Wir definieren Polynome $R_n(x)$ durch $R_0(x) = 0$ und rekursiv durch

$$R_{n+1}(x) := \frac{x^2-1}{n+1}\,R_n'(x) + xR_n(x) - \frac{P_n(x)}{n+1} \tag{7}$$

für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann hat $R_{n+1}$ denselben Grad $n$ wie $P_n$ .

**Hauptsatz.** *Sei $I_0$ ein Intervall, auf dem $Q_0$ definiert ist. Dann gilt*

$$Q_n(x) = R_n(x) + P_n(x)Q_0(x) \tag{$8_n$}$$

*für alle $x \in I_0$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$. Ferner gilt $Q_n(-x) = (-1)^{n+1}Q_n(x)$.*

*Beweis.* Durch Induktion nach $n$. Es ist $Q_0 = 0 + 1\cdot Q_0 = R_0 + P_0\,Q_0$, und es gelte ($8_n$). Da $Q_0'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= \frac{x^2-1}{n+1}\,Q_n' + x\,Q_n \qquad \text{nach Definition (3) von } Q_n \\ &= \frac{x^2-1}{n+1}\Big(R_n' + P_n'Q_0 + \frac{P_n}{1-x^2}\Big) + x(R_n + P_nQ_0) \qquad \text{nach } (8_n) \\ &= R_{n+1} + \Big(\frac{x^2-1}{n+1}P_n' + xP_n\Big)Q_0 \qquad \text{nach Definition (7) von } R_n \\ &= R_{n+1} + P_{n+1}\,Q_0 \qquad \text{nach Definition (3) von } P_n\,. \end{aligned}$$

Es ist $Q_0(-x) = (-1)^1\,Q_0(x)$ und daher folgt $Q_n(-x) = (-1)^{n+1}Q_n(x)$ aus der Formel von Bonnet durch Induktion nach $n$. □

**Korollar 2.** *Die Polynome $R_n(x)$ haben die folgenden Eigenschaften.*

i) $R_n(x)$ *erfüllt die Formel von Bonnet*

$$(n+1)R_{n+1}(x) = (2n+1)\, x\, R_n(x) - n\, R_{n-1}(x)$$

*für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in I_0$.*

ii) *Es gilt* $R_n(-x) = (-1)^{n+1} R_n(x)$ *für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in I_0$.*

iii) $R_n(x)$ *ist eine Lösung der inhomogenen Legendre-DGL*

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)\, y = -2P_n'(x)$$

*Beweis.* **Zu i).** Da $R_n = Q_n - P_n\, Q_0$ gilt und $P_n$ und $Q_n$ die Formel von Bonnet erfüllen, gilt dieses ersichtlich auch für $R_n$.

**Zu ii).** Es ist $R_n(-x) = Q_n(-x) - P_n(-x) \cdot Q_0(-x)$. Da $Q_n(-x) = (-1)^{n+1} Q_n(x)$ und $P_n(-x) \cdot Q_0(-x) = (-1)^n P_n(x) \cdot (-1) Q_0(x)$ gilt, folgt ii).

**Zu iii).** Nach dem Hauptsatz ist $R_n = Q_n - P_n Q_0$, also

$$R_n' = Q_n' - P_n' Q_0 - P_n Q_0' = Q_n' - P_n' Q_0 - P_n\, \frac{1}{1-x^2}\,.$$

Da $Q_n$ und $P_n$ die DGL $(2_n)$ erfüllen und $Q_0'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} ((x^2-1)R_n')' &= ((x^2-1)Q_n')' - ((x^2-1)P_n'Q_0)' + P_n' \\ &= n(n+1)Q_n - ((x^2-1)P_n')'\, Q_0 - P_n') + P_n' \qquad \text{nach } (2_n) \\ &= n(n+1)(Q_n - P_nQ_0) + 2P_n' \qquad \text{nach } (2_n) \\ &= n(n+1)R_n + 2P_n'\,. \end{aligned}$$

Es folgt $(x^2-1)R_n'' + 2xR_n' - n(n+1)R_n = 2P_n'$ und damit iii). □

### Integraldarstellungen für $Q_n$

Sei $I_1$ eines der beiden Intervalle $\mathbb{R}_{<-1}$ oder $\mathbb{R}_{>1}$. Nach Lemma 2 ist $P_n(x)Q_n'(x) - Q_n(x)P_n'(x) = \frac{1}{1-x^2}$, und da $P_n(x)$ keine Nullstellen in $I_1$ hat, folgt $\left(\frac{Q_n(x)}{P_n(x)}\right)' = \frac{P_n(x)Q_n'(x) - Q_n(x)P_n'(x)}{P_n^2(x)} = -\frac{1}{P_n^2(x)(x^2-1)}$ für $x \in I_1$. Integrieren auf beiden Seiten ergibt die Darstellung (vgl. [23, S. 73])

$$Q_n(x) = -P_n(x) \int \frac{1}{P_n^2(x)(x^2-1)} \qquad \text{für } x \in I_1\,.$$

Eine weitere Integraldarstellung ist von Neumann [22, S. 24]. In [23, S. 1], geht er noch einmal darauf ein und definiert Kugelfunktionen als Lösungen der DGL $(1_n)$. Er schreibt dann:

„*Und zwar bezeichne ich als Kugelfunction* erster Art*: $P_n(x)$ dasjenige particulare Integral, welches für $x = 1$ endlich bleibt und für $x = \infty$ unendlich groß wird; andrerseits als Kugelfunction* zweiter Art*: $Q_n(x)$ dasjenige, welches für $x = 1$ unendlich groß wird und für $x = \infty$ verschwindet.*"
(Mit Integral ist hierbei eine Lösung gemeint.)

Franz Neumann 1798-1895

**Formel von Neumann (1848)**

*Sei $I_1$ eines der beiden Intervalle $\mathbb{R}_{<-1}$ oder $\mathbb{R}_{>1}$. Dann gilt*

$$Q_n(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{P_n(t)}{x-t}\, dt$$

*für jedes $x \in I_1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ .*

*Beweis.* Durch Induktion nach $n$. Nach Definition ist $Q_0(x) = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ für $x \in I_1$. Es gilt $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{P_0(t)}{x-t}\, dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{x-t}\, dt = -\frac{1}{2}\ln|x-t|\Big|_{t=-1}^{t=1} = -\frac{1}{2}\big(\ln|x-1| - \ln|x+1|\big) = \frac{1}{2}\big(\ln|x+1| - \ln|x-1|\big) = \frac{1}{2}\ln\big(\frac{x+1}{x-1}\big) = Q_0(x)$.

I.V.: Es gelte $Q_m(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{P_m(t)}{x-t}\, dt$ für $0 < m \leqslant n$. Zu zeigen ist, dass $Q_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{P_{n+1}(t)}{x-t}\, dt$ gilt. Wir nutzen die Formel von Bonnet und die Linearität des Integrals aus. Es gilt.

$$\begin{aligned}
Q_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{n+1}\, x\, Q_n(x) - \frac{n}{n+1}\, Q_{n-1}(x) \qquad \text{(Formel von Bonnet)}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2n+1}{n+1}\, x \int_{-1}^{1} \frac{P_n(t)}{x-t}\, dt - \frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1} \frac{P_{n-1}(t)}{x-t}\, dt\right) \qquad \text{(I.V.)}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2n+1}{n+1}\int_{-1}^{1} \frac{t\, P_n(t)}{x-t}\, dt - \frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1} \frac{P_{n-1}(t)}{x-t}\, dt\right) \qquad \text{(Kor.1.iii)}\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left(\frac{\frac{2n+1}{n+1}\, tP_n(t) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(t)}{x-t}\right) dt\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{P_{n+1}(t)}{x-t}\, dt \qquad \text{(Formel von Bonnet).}
\end{aligned}$$

□

**Bemerkung.** 1. Im Zusammenhang mit Kettenbrüchen tritt die Kugelfunktion $Q_0(x)$ für $x > 1$ schon bei Gauß auf, vgl. dazu [18, S. 63]. Auch geht die Bezeichnung „Kugelfunction“ auf Gauß zurück, wie in [11, S. 7] dargelegt ist.

2. Mit den obigen Betrachtungen sind die Legendre-Funktionen bei Weitem nicht abgehandelt, vgl. z. B. [11], [18] und [23].

3. Die Legendre-DGL ist allgemeiner definiert als

$$(1_\lambda) \qquad (1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda+1)\,y = 0$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Diese wird durch Potenzreihen gelöst, vgl. [13, (26.30)] für $|x| < 1$ sowie [27, §25] und [15, S. 206] für $|x| > 1$.

## 7.8 Aufgaben 23 – 32

**Aufgabe 23.** Man löse für $x > 0$ die Anfangswertaufgabe

$$y'' + \left(2 + \frac{3}{x}\right) y' + \left(1 + \frac{3}{x}\right) y = 0 \ \text{ mit } y(2) = 0 \text{ und } y'(2) = e^{-2},$$

indem zunächst eine zur Lösung $y_1(x) = e^{-x}$ linear unabhängige Lösung $y_2(x)$ mit Satz 8 bestimmt wird und die allgemeine Lösung angegeben wird.

**Aufgabe 24.** Man bestimme ein Fundamentalsystem von Lösungen und gebe die allgemeine Lösung an für die DGL

(a) $y'' - 4xy' + (4x^2 - 3)y = 0$ . Es ist dabei Satz 9 zu verwenden.

(b) $y'' + \frac{2}{x}y' - y = 0$ für $x > 0$. Es ist dabei der “Satz über die DGL $y'' + \frac{2}{x}y' + a_0(x)y = b(x)$” in Abschnitt 7.3 zu verwenden.

**Aufgabe 25.** Man bestimme mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten die allgemeine Lösung der DGL $y'' - \frac{4}{x}\,y' + \frac{6}{x^2}\,y = x^2 \sin(x)$ für $x > 0$. *Hinweis:* Es ist $y_1(x) = x^2$ eine Lösung der zugehörigen homogenen DGL, so dass Satz 8 genutzt werden kann.

**Aufgabe 26.** (Zur Wiederholung) Man löse für $x > 0$ die Anfangswertaufgabe $y' + \frac{y}{x} = e^{2x}$ mit $y(2) = 0$.

**Aufgabe 27.** Man löse die Anfangswertaufgabe $y'' - 3y' + 2y = 4x + 12e^{-x}$ mit $y(0) = 6$ und $y'(0) = -1$.
(Man erhält eine spezielle Lösung der DGL durch Addition von speziellen Lösungen von $y'' - 3y' + 2y = 4x$ und $y'' - 3y' + 2y = 12e^{-x}$.)

**Aufgabe 28.** Man löse die Anfangswertaufgabe

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{25}{4}\cos(x)$$

mit $y(0) = -\frac{1}{4}$ und $y'(0) = 1$.

**Aufgabe 29.** Sei $I$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ und seien $f, g, h\colon I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, wobei $f$ auch differenzierbar sei. Es gelte $f(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Man zeige:

(a) Ist eine Funktion $u\colon I \to \mathbb{R}$ mit $u(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ eine Lösung der linearen DGL $u'' - \Big(\frac{f'(x)}{f(x)} + g(x)\Big)u' + f(x)\,h(x)u = 0$, so ist $y(x) := -\frac{u'(x)}{u(x)f(x)}$ eine Lösung der Riccati-DGL

$$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x)\,.$$

(b) Ist umgekehrt eine Funktion $y(x)$ eine Lösung der Riccati-DGL, so ist $u(x) := e^{-\int f(x)y(x)\,dx}$ eine Lösung $> 0$ der obigen linearen DGL.

**Aufgabe 30.** (Zur Wiederholung) Man löse die Anfangswertaufgabe $y'' = 8\,(y')^{3/4}$ mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = 1$.

**Aufgabe 31.** Man bestimme für $x > 0$ die allgemeine Lösung der Euler-DGL $x^2y'' + 5xy' + 5y = 0$.

**Aufgabe 32.** In 4.7 haben wir die DGL $y' = \frac{ay}{x}$ und ihre Singularitäten für $a = 1, 2, -2$ studiert. Durch Differenzieren erhalten wir $y'' = \frac{ay'x - ay}{x^2}$ und damit die Euler-DGL

$$x^2y'' - axy' + ay = 0\,.$$

Man gebe für $a = 1, 2, -2$ jeweils ein Fundamentalsystem von Lösungen für die Euler-DGL auf dem Intervall $\mathbb{R}_{>0}$ an.

# DGL höherer Ordnung

## 8 Lineare DGL höherer Ordnung

Wir betrachten hier, wie in Abschnitt 3.2 eingeführt, eine lineare DGL der Ordnung $n \geqslant 2$ in Normalform, also eine DGL

$$(**) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)\, y = b(x)$$

mit stetigen Funktionen $a_0, \ldots, a_{n-1}, b\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$.

### 8.1 Homogene DGL

In diesem Abschnitt betrachten wir die zu $(**)$ gehörige homogene DGL

$$(*) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)\, y = 0\,.$$

Analog wie für $n = 2$ gezeigt, bilden die Lösungen von $(*)$ einen Vektorraum $L_h$, und es gilt das Superpositionsprinzip. Wir werden in Abschnitt 11.3 zeigen, dass $L_h$ die Dimension $n$ hat und sich also jede Lösung $y\colon I \to \mathbb{R}$ von $(*)$ eindeutig als Linearkombination $y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$ von $n$ linear unabhängigen Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ von $(*)$ mit Konstanten $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ schreiben lässt. Wir nennen dann $y_1, \ldots, y_n$ ein *Fundamentalsystem* von Lösungen von $(*)$ und schreiben dann die *allgemeine Lösung* in der Form $y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$ für $x \in I$. Wie im Fall $n = 2$ gibt die Wronski-Determinante

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Auskunft über die lineare Unabhängigkeit. Für $n = 2$ haben wir gesehen, dass aus $W(\xi) \neq 0$ für ein $\xi \in I$ folgt: $W(x) \neq 0$ für alle $x \in I$.

Dazu haben wir gezeigt, dass $W(x)$ die DGL $W' = -a_1(x)\,W$ erfüllt und dafür zunächst $W'(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x)\end{pmatrix}$ berechnet. So gehen wir hier im Fall $n \geqslant 2$ auch vor.

**Hilfssatz.** *Es ist* $W'(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x)\end{pmatrix}$.

*Beweis.* Wir benutzen die Bezeichnung $(\varphi_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ für die zur Wronski-Determinante $W(x)$ gehörende Matrix. Nach der Leibniz-Formel für die Determinante ist $W(x) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot\varphi_{1\,\sigma(1)}\cdot\dots\cdot\varphi_{n\,\sigma(n)}$. Aus der Produktregel folgt

$$\begin{aligned} W'(x) = &\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot\varphi'_{1\,\sigma(1)}\cdot\varphi_{2\,\sigma(2)}\cdot\dots\cdot\varphi_{n\,\sigma(n)} \\ &+ \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot\varphi_{1\,\sigma(1)}\cdot\varphi'_{2\,\sigma(2)}\cdot\dots\cdot\varphi_{n\,\sigma(n)} \\ &+ \dots + \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot\varphi_{1\,\sigma(1)}\cdot\dots\cdot\varphi_{n-1\,\sigma(n-1)}\cdot\varphi'_{n\,\sigma(n)} \\ = &\; W_1 + W_2 + \dots + W_n\,, \end{aligned}$$

wobei $W_k$ die Determinante der Matrix ist, die aus $(\varphi_{ij})$ entsteht, indem man die $k$-te Zeile nach $x$ differenziert und die übrigen Zeilen unverändert lässt, $k = 1, \dots, n$. Für $k < n$ hat $W_k$ zwei gleiche Zeilen, sodass $W_k = 0$ für $k < n$ gilt. Es folgt $W'(x) = W_n$ und damit die Behauptung. □

**Satz 12.** *Seien $y_1, \dots, y_n\colon I \to \mathbb{R}$ Lösungen der DGL $(*)$. Dann erfüllt ihre Wronski-Determinante $W(x)$ die DGL*

$$W' = -a_{n-1}(x)\,W.$$

*Insbesondere: Ist $W(\xi) \neq 0$ für ein $\xi \in I$, so ist $W(x) \neq 0$ für alle $x \in I$.*

*Beweis.* Wir lösen die DGL $(*)$ nach $y^{(n)}$ auf und erhalten in Summenschreibweise $y^{(n)} = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) y^{(j)}$ mit $y^{(0)} = y$. Da $y_1(x), \dots, y_n(x)$ Lösungen sind, folgt $y_k^{(n)}(x) = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) y_k^{(j)}(x)$ für $k = 1, \dots n$. Dies in die letzte Zeile von $W'(x)$ eingesetzt, ergibt

$$W'(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ -\sum\limits_{j=0}^{n-1} a_j(x) y_1^{(j)}(x) & \dots & -\sum\limits_{j=0}^{n-1} a_j(x) y_n^{(j)}(x) \end{pmatrix}.$$

Nummeriere die Zeilen beginnend bei 0. Für jedes $k = 0, \dots, n-2$, für das $a_k(x) \neq 0$ gilt, addiere man das $a_k(x)$-fache der $k$-ten Zeile zur letzten Zeile. Dann folgt $W'(x) = -a_{n-1}(x)\, W(x)$. Nach Satz 3 in Abschnitt 4.2 ist nun $W(x) = W(\xi)\, e^{-\int_\xi^x a_{n-1}(t)\, dt}$ für alle $x \in I$. Ist also $W(\xi) \neq 0$ für ein $\xi \in I$, so gilt $W(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. □

**Satz 13.** *Seien $y_1, \dots, y_n \colon I \to \mathbb{R}$ Lösungen der DGL $(*)$, und sei $x \in I$. Dann gilt $W(x) \neq 0$ genau dann, wenn $y_1, \dots, y_n$ linear unabhängig sind.*

*Beweis.* „$\Longrightarrow$" Die Funktionen $y_1 \dots, y_n$ seien linear abhängig. Dann gibt es $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, die nicht alle 0 sind und für die $c_1 y_1 + \dots + c_n y_n = 0$ gilt. Also hat das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1\, y_1(x) + \dots + c_n\, y_n(x) &= 0 \\ c_1\, y_1'(x) + \dots + c_n\, y_n'(x) &= 0 \\ \dots \quad \dots \quad & \dots \\ c_1\, y_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n\, y_n^{(n-1)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

eine Lösung $(c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$, und $W(x)$ ist die Determinante der Koeffizientenmatrix. Es folgt $W(x) = 0$.
„$\Longleftarrow$" Sei $W(x) = 0$. Dann sind die Spalten der zu $W(x)$ gehörigen Matrix linear abhängige Vektoren in $\mathbb{R}^n$. Mit Hilfe des Eindeutigkeitssatzes, den wir in Abschnitt 11.1 beweisen, folgt dann, dass die Funktionen $y_1, \dots, y_n$ linear abhängig sind, vgl. Satz 30 in Abschnitt 11.3. □

### Fundamentalsystem, wenn eine Lösung bekannt ist

Im Fall $n = 2$ hatten wir in Satz 8 aus dem Reduktionssatz von d'Alembert gefolgert: Wenn eine Lösung $y_1 \colon I \to \mathbb{R}$ der DGL $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ mit $y_1(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ bereits bekannt ist, so ist eine von $y_1(x)$ linear unabhängige Lösung $y_2(x)$ durch $y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)}\, e^{-\mathcal{A}_1(x)}\, dx$ mit einer Stammfunktion $\mathcal{A}_1(x)$ von $a_1(x)$ gegeben.

Ohne Beweis geben wir hier die Verallgemeinerung für $n \geqslant 2$ des Reduktionssatzes von d'Alembert aus Abschnitt 7.2 an, vgl. z. B. [13, 23.1]:

**Reduktionssatz von d'Alembert für die Ordnung $n$.** *Sei $y_1 : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL*

$$(*) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0$$

*und sei $y_1(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Ferner sei*

$$b_j(x) = \frac{1}{y_1(x)} \left( \binom{n}{j} y_1^{(n-j)}(x) + \sum_{k=j}^{n-1} \binom{k}{j} a_k(x) y_1^{(k-j)}(x) \right) \text{ für } j = 1, \ldots, n\,.$$

*Sind $v_2(x), \ldots, v_n(x)$ linear unabhängige Lösungen der DGL*

$$v^{(n-1)} + b_{n-1}(x)\, v^{(n-2)} + \cdots + b_2(x)\, v' + b_1(x)\, v = 0$$

*und ist $u_k(x) = \int v_k(x)\, dx$ für $k = 2, \ldots, n$, so sind die Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_n \colon I \to \mathbb{R}$ mit $y_k(x) = y_1(x) u_k(x)$ für $k = 2, \ldots, n$ linear unabhängige Lösungen der DGL $(*)$.*

**Reduktionssatz von d'Alembert für die Ordnung 3.** *Sei $y_1 : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL $y''' + a_2(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0$, und sei $y_1(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Ferner seien*

$$b_1(x) = 3\frac{y_1''(x)}{y_1(x)} + 2a_2(x)\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + a_1(x) \quad \text{und} \quad b_2(x) = 3\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + a_2(x)\,.$$

*Sind $v_2$, $v_3 \colon I \to \mathbb{R}$ linear unabhängige Lösungen der DGL*

$$v'' + b_2(x)\, v' + b_1(x)\, v = 0$$

*und gilt $u_2(x) = \int v_2(x)\, dx$ und $u_3(x) = \int v_3(x)\, dx$, so sind die Funktionen $y_1, y_2, y_3 \colon I \to \mathbb{R}$ mit $y_2(x) = y_1(x) u_2(x)$ und $y_3(x) = y_1(x) u_3(x)$ drei linear unabhängige Lösungen der DGL $y''' + a_2(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0$.*

**Beispiel.** Man bestimme die allgemeine Lösung der DGL

$$y''' - \frac{3}{x} y'' + \frac{6}{x^2} y' - \frac{6}{x^3} y = 0$$

für $x > 0$. Es ist $y_1(x) = x$ eine Lösung auf dem Intervall $I = \mathbb{R}_{>0}$. Um die Koeffizienten $b_1(x)$ und $b_2(x)$ zu berechnen, schreiben wir die DGL als $y''' + a_2(x)\, y'' + a_1(x)\, y' - \frac{6}{x^3}\, y = 0$ mit $a_2(x) = -\frac{3}{x}$ und $a_1(x) = \frac{6}{x^2}$.
Dann ist $b_1(x) = 3\frac{y_1''(x)}{y_1(x)} + 2a_2(x)\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + a_1(x) = -\frac{6}{x^2} + \frac{6}{x^2} = 0$ und $b_2(x) = 3\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + a_2(x) = \frac{3}{x} - \frac{3}{x} = 0$.

Zu lösen ist nun die DGL $v'' + b_2(x)\, v' + b_1(x)\, v = 0$, also die DGL $v'' = 0$. Diese hat die linear unabhängigen Lösungen $v_2(x) = 1$ und $v_3(x) = x$. Es ist $u_2(x) = \int v_2(x)\, dx = \int 1\, dx = x$ und $u_3(x) = \int v_3(x)\, dx = \int x\, dx = \frac{x^2}{2}$. Nach dem Reduktionssatz sind $y_1(x) = x$ sowie $y_1(x)u_2(x) = x^2$ und $y_1(x)u_3(x) = \frac{x^3}{2}$ linear unabhängige Lösungen der Ausgangs-DGL. Deren allgemeine Lösung ist also $y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$.

## 8.2 Inhomogene DGL

Wir verallgemeinern nun die Methode der *Variation der Konstanten* aus Abschnitt 7.4, um eine spezielle Lösung $y_s(x)$ der inhomogenen DGL

$$(**) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = b(x)$$

mit stetigen Funktionen $a_0, \ldots, a_{n-1}, b\colon I \to \mathbb{R}$ aufzufinden. Dazu geht man von der allgemeinen Lösung $y_h(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$ der zugehörigen homogenen DGL aus und variiert sozusagen die Konstanten, indem man $n$ differenzierbare Funktionen $c_1, \ldots, c_n\colon I \to \mathbb{R}$ so bestimmt, dass

$$c_1'(x) y_1^{(k)} + \cdots + c_n'(x) y_n^{(k)} = 0 \quad \text{für} \quad k = 0, \ldots, n-2$$

und

$$c_1'(x) y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n'(x) y_n^{(n-1)} = b(x)$$

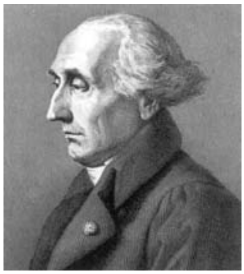
gilt. Wie man nachrechnet, ist dann

$$y_s(x) = c_1(x) y_1(x) + \cdots + c_n(x) y_n(x)$$

eine spezielle Lösung von $(**)$, da $y_1, \ldots, y_n$ Lösungen der homogenen DGL sind. Die allgemeine Lösung von $(**)$ ist

$$y(x) = y_s(x) + y_h(x) = y_s(x) + c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x).$$

Die Methode der *Variation der Konstanten* ist von Lagrange. Man bestimmt die Funktionen $c_1(x), \ldots, c_n(x)$, indem man die obigen Bedingungsgleichungen als lineares Gleichungssystem in Matrixform schreibt. Dann ist die Determinante der Koeffizientenmatrix gerade die Wronski-Determinante, und diese ist $\neq 0$, weil $y_1, \ldots, y_n$ linear unabhängig sind. Daher hat das Gleichungssystem genau eine Lösung $c_1'(x), \ldots, c_n'(x)$.



Joseph Louis Lagrange, 1736–1813

Man erhält diese Lösung mit Hilfe der Cramerschen Regel für das System

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(x) \end{pmatrix}$$

und daraus die Funktionen $c_1(x), \dots, c_n(x)$ durch Integrieren.

### Spezielle Lösungen im Fall konstanter Koeffizienten

Wir betrachten nun eine inhomogene DGL

$$(+) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0\, y = b(x)$$

mit konstanten Koeffizienten $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Wie für $n = 2$ in Abschnitt 7.5 kommt man in vielen Fällen in Abhängigkeit von $b(x)$ auch ohne Variation der Konstanten durch einen passenden Ansatz direkt zu einer speziellen Lösung, vgl. auch [13, Tab. 16.1]. Die zur DGL (+) gehörige homogene DGL hat die *charakteristische Gleichung*

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0\,.$$

Wir betrachten hier wieder drei Fälle.

**1:** Es ist $b(x) = \alpha_1 e^{\nu x}$ mit $\nu\,, \alpha_1 \in \mathbb{R}$.

**Ansatz.** $y_s(x) = a\, e^{\nu x}$, falls $\nu$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist, und $y_s(x) = a x^r e^{\nu x}$, falls $\nu$ eine $r$-fache Lösung der charakteristischen Gleichung ist. Es ist dann die Konstante $a$ zu bestimmen.

**2:** Es ist $b(x) \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom vom Grad $m$. Ist $a_0 \neq 0$, so erhält man stets ein Polynom $y_s(x)$ vom Grad $m$ als Lösung von (+).

**Ansatz.** $y_s(x) = s_m x^m + s_{m-1}x^{m-1} + \dots + s_1 x + s_0$, falls $a_0 \neq 0$, und $y_s(x) = x^r(s_m x^m + s_{m-1}x^{m-1} + \dots + s_1 x + s_0)$, falls 0 eine $r$-fache Lösung der charakteristischen Gleichung ist. Die Koeffizienten $s_0, s_1, \dots, s_m$ sind durch Koeffizientenvergleich zu bestimmen.

**3:** Es ist $b(x) = \alpha_1 \cos(\beta x) + \alpha_2 \sin(\beta x)$ mit $\alpha_1\,,\ \alpha_2\,,\ \beta \in \mathbb{R}$.

**Ansatz.** $y_s(x) = b_1 \cos(\beta x) + b_2 \sin(\beta x)$ mit $b_1\,,\ b_2 \in \mathbb{R}$, falls $i\beta$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist. Im Fall, dass $i\beta$ eine $r$-fache Lösung der charakteristischen Gleichung ist, mache man den Ansatz $y_s(x) = x^r\big(b_1 \cos(\beta x) + b_2 \sin(\beta x)\big)$. Es sind $b_1$ und $b_2$ zu bestimmen.

## 8.3 Fundamentalsystem bei konstanten Koeffizienten

Wir betrachten die homogene DGL

$$(*) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ und deren *charakteristische Gleichung*

$$(1) \qquad \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Der Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ mit einer Lösung $\lambda \in \mathbb{C}$ der charakteristischen Gleichung führt stets zu einer Lösung von $(*)$:

**Lemma.** *Die Funktion $y(x) = e^{\lambda x}$ ist genau dann eine Lösung der DGL $(*)$, wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Lösung der charakteristischen Gleichung* (1) *ist.*

*Beweis.* Die Funktion $y(x) = e^{\lambda x}$ hat die Ableitungen $y^{(k)}(x) = \lambda^k e^{\lambda x}$ für $k = 0, \ldots, n$, wobei $y^{(0)} = y$ ist. Es folgt

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0\, y(x) = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0)e^{\lambda x}.$$

Da $e^{\lambda x} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist also $y(x)$ genau dann eine Lösung von $(*)$, wenn $\lambda$ eine Lösung von (1) ist. □

Wie findet man ein Fundamentalsystem von reellwertigen Lösungen für die DGL $(*)$? Wenn die charakterische Gleichung lauter verschiedene reelle Lösungen besitzt, ist dies einfach zu beantworten.

**Bemerkung.** Wenn die charakteristische Gleichung (1) lauter verschiedene reelle Lösungen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ hat, so sind die Funktionen

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \ldots, y_n(x) = e^{\lambda_n x}$$

linear unabhängige Lösungen von $(*)$.

*Beweis.* Aufgrund des Lemmas ist nur noch lineare Unabhängigkeit zu zeigen. Nach den Sätzen 12 und 13 in Abschnitt 8.1 genügt es zu zeigen, dass $W(0) \neq 0$ gilt. Da $y_k^{(j)}(0) = \lambda_k^j$ für $j = 0, \ldots, n-1$ und $k = 1, \ldots, n$ gilt, ist $W(0)$ gerade die sog. *Vandermonde-Determinante*, und es folgt

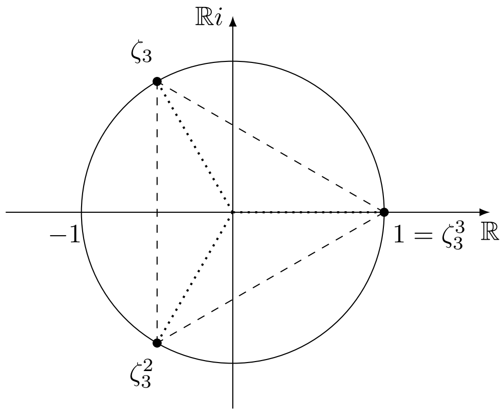
$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{k>\ell} (\lambda_k - \lambda_\ell) \neq 0\,,$$

denn $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sind paarweise verschieden nach Voraussetzung. □

Ein Beweis ohne Benutzung der Vandermonde-Determinante folgt unten noch.
Wir betrachten nun drei einfache Beispiele, bei denen die charakteristische Gleichung mehrfache Lösungen oder nicht-reelle Lösungen hat.

| DGL | charakteristische Gleichung | Fundamentalsystem |
|---|---|---|
| $y''' = 0$ | $\lambda^3 = 0$<br>0 ist dreifache Lösung | $e^{0x},\ xe^{0x},\ x^2e^{0x}$ |
| $y''' - y'' = 0$ | $\lambda^3 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 1) = 0$<br>0 zweifache, 1 einfache Lösung | $e^{0x},\ xe^{0x},\ e^{1x}$ |
| $y''' - y = 0$ | $\lambda^3 - 1 = 0$<br>$\lambda_1 = 1$ & konj. kompl. Lösungen | $e^{1x}$, ?, ? |

Die charakteristische Gleichung $\lambda^3 - 1 = 0$ der DGL $y''' - y = 0$ hat die Lösungen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ . Die drei Lösungen der Gleichung $\lambda^3 - 1 = 0$ heißen *dritte Einheitswurzeln*. Setzt man $\zeta_3 := \lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$, so ist $\zeta_3^2 = \lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ und $\zeta_3^3 = 1$ .




Man findet $\lambda_{2,3}$ zum Beispiel durch Polynomdivision

$$\begin{array}{l} (\lambda^3 - 1) : (\lambda - 1) = \lambda^2 + \lambda + 1 \\ \underline{-(\lambda^3 - \lambda^2)} \\ \qquad \lambda^2 - 1 \\ \qquad \underline{-(\lambda^2 - \lambda)} \\ \qquad\qquad \lambda - 1 \end{array}$$

Und die Gleichung $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ wird durch $\lambda_{2,3}$ gelöst.

Analog wie in Satz 11 in Abschnitt 7.5 bilden also die Funktionen

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\Big) \quad \text{und} \quad y_3(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\Big)$$

ein Fundamentalsystem von reellwertigen Lösungen für die DGL $y''' - y = 0$.

### Ein Kalkül für Differentialoperatoren

Wir haben an obigen Beispielen gesehen, dass die Lösungen der DGL $(*)$ davon abhängen, wie das *charakteristische Polynom*

$$P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k\lambda^k$$

mit $a_n = 1$ und $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ im Polynomring $\mathbb{C}[\lambda]$ in Linearfaktoren zerfällt. Um zu einem allgemeinen Ergebnis zu kommen, führen wir Cauchy folgend ein Kalkül für „Differentialoperatoren" $D = \frac{d}{dx}$ ein, vgl. [15, § 21]. Wir betrachten *lineare Differentialausdrücke*

$$P(D) = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k \quad \text{mit} \quad D^0 = 1\,,$$

wobei mit den Potenzen $D^k$ gerechnet wird wie mit Potenzen von Zahlen oder von Veränderlichen. Für diese Ausdrücke wird eine Addition und eine Multiplikation analog wie bei Polynomen eingeführt: Für $P(D) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k D^k$ und $Q(D) = \sum\limits_{j=0}^{m} b_j D^j$ sei $P(D) + Q(D) = \sum_{k=0}^{\max(m,n)}(a_k + b_k)D^k$, wobei $b_{m+1} = \cdots = b_n = 0$ sei, falls $m < n$, und $a_{n+1} = \cdots = a_m = 0$ sei, falls $n < m$. Ferner wird definiert

$$P(D)\cdot Q(D) = \sum_{\ell=0}^{n+m}\Big(\sum_{k=0}^{\ell} a_k b_{\ell-k}\Big)D^\ell\,. \tag{2}$$

Es gelten dann das Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz für die Addition und die Multiplikation. Der Operator $P(D)$ wird nun auf eine $n$-mal differenzierbare Funktion $y\colon I \to \mathbb{C}$ wie folgt angewendet. Es sei

$$P(D)y = \big(\sum_{k=0}^{n} a_k D^k\big)y = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dx^k}y = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}.$$

Dabei ist $I$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ und die Ableitung einer komplexwertigen Funktion $y\colon I \to \mathbb{C}$ ebenso definiert wie für eine reellwertige Funktion.

In dieser Schreibweise wird die DGL $(*)$ zu dem Ausdruck $\boxed{P(D)\,y = 0}$.
Für die Addition gilt $\big(P(D) + Q(D)\big)y = P(D)y + Q(D)y$, und für die Multiplikation ergibt sich aus der Linearität der Ableitung folgende Formel:

$$\big(P(D)Q(D)\big)y = P(D)\big(Q(D)y\big). \tag{3}$$

**Beweis von (3).**

$$\begin{aligned}
\big(P(D)Q(D)\big)y &= \sum_{\ell=0}^{n+m}\Big(\sum_{k=0}^{\ell} a_k b_{\ell-k}\Big)D^\ell y \quad \text{nach Definition (2)}\\
&= \sum_{\ell=0}^{n+m}\Big(\sum_{k+j=\ell} a_k b_j D^{k+j} y\Big) = \sum_{\ell=0}^{n+m}\Big(\sum_{k+j=\ell} a_k D^k (b_j D^j y)\Big)\\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k D^k \Big(\sum_{j=0}^{m} b_j D^j y\Big) = P(D)\big(Q(D)y\big)\,. \quad \square
\end{aligned}$$

Wir beweisen nun noch zwei Hilfssätze, um dann ein Fundamentalsystem von Lösungen für die DGL $(*)$ angeben zu können. Dabei orientieren wir uns an der Darstellung in [9].

**Hilfssatz 1.** *Sei $f\colon I \to \mathbb{C}$ eine $k$-mal differenzierbare Funktion und $\mu \in \mathbb{C}$. Dann gilt $(D-\mu)^k\big(f(x)e^{\mu x}\big) = f^{(k)}(x)\,e^{\mu x}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.*

*Beweis.* Die Behauptung folgt durch Induktion nach $k$. Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei $k > 0$ und $(D-\mu)^{k-1}(f(x)e^{\mu x}) = f^{(k-1)}(x)\,e^{\mu x}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
(D-\mu)^k\big(f(x)e^{\mu x}\big) &= (D-\mu)(D-\mu)^{k-1}\big(f(x)\,e^{\mu x}\big)\\
&= (D-\mu)\big(f^{(k-1)}(x)\,e^{\mu x}\big) \quad \text{nach Induktionsvor.}\\
&= D\big(f^{(k-1)}(x)\,e^{\mu x}\big) - \mu f^{(k-1)}(x)\,e^{\mu x}\\
&= f^{(k)}(x)e^{\mu x} + f^{(k-1)}(x)\mu e^{\mu x} - \mu f^{(k-1)}(x)e^{\mu x}\\
&= f^{(k)}(x)\,e^{\mu x}\,. \qquad \square
\end{aligned}$$

**Hilfssatz 2.** *Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion, und seien $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ mit $\mu \neq \nu$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt dann $(D-\mu)^k\big(g(x)e^{\nu x}\big) = h(x)\,e^{\nu x}$, wobei $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion mit* $\operatorname{grad}(h) = \operatorname{grad}(g)$ *ist.*

*Beweis.* Beachte, dass sich durch Ableiten eines Polynoms der Grad erniedrigt. Für $k = 1$ ist $h(x) = g'(x) + (\nu-\mu)g(x)$ und $\operatorname{grad}(h) = \operatorname{grad}(g)$, denn aus der Produktregel folgt

$$\begin{aligned}
(D-\mu)(g(x)\,e^{\nu x}) &= g'(x)e^{\nu x} + \nu g(x)e^{\nu x} - \mu g(x)\,e^{\nu x}\\
&= \big(g'(x) + (\nu-\mu)g(x)\big)e^{\nu x}
\end{aligned}$$

Induktion $(k-1) \to k$ ergibt $(D-\mu)^k\big(g(x)e^{\nu x}\big) = (D-\mu)\big(\tilde{g}(x)e^{\nu x}\big)$, wobei $\tilde{g}$ eine Polynomfunktion mit $\operatorname{grad}(\tilde{g}) = \operatorname{grad}(g)$ ist. Mit $h(x) := \tilde{g}'(x) + (\nu-\mu)\tilde{g}(x)$ folgt analog wie oben $(D-\mu)\big(\tilde{g}(x)e^{\nu x}\big) = h(x)e^{\nu x}$ und damit Hilfssatz 2. □

### Fundamentalsystem für die DGL $P(D)y = 0$

**Satz 14.** *Das Polynom $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \in \mathbb{R}[\lambda]$ habe $r$ paarweise verschiedene Nullstellen $\lambda_j \in \mathbb{C}$ mit den Vielfachheiten $k_j$ für $j = 1, \ldots, r$. Es gelte also*

$$P(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda-\lambda_r)^{k_r}$$

*in $\mathbb{C}[\lambda]$. Dann besitzt die DGL $P(D)y = 0$ die $n$ über $\mathbb{C}$ linear unabhängigen Lösungen $\boxed{y_{mj}(x) := x^m e^{\lambda_j x}}$ mit $1 \leqslant j \leqslant r$ und $0 \leqslant m \leqslant k_j - 1$.*

*Ist $\lambda_j = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\beta \neq 0$ eine $k_j$-fache Nullstelle von $P(\lambda)$, so ist auch $\lambda_{j+1} = \alpha - i\beta$ eine $k_j$-fache Nullstelle von $P(\lambda)$. Man tauscht dann jeweils das entsprechende Paar $y_{mj}(x)$, $y_{m,j+1}(x)$ von komplexwertigen Lösungen der DGL durch die Lösungen $x^m\, e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ und $x^m\, e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ aus und erhält auf diese Weise ein reellwertiges Fundamentalsystem von Lösungen.*

*Beweis.* **1. Teil** Zu zeigen ist, dass $y_{mj}(x) = x^m e^{\lambda_j x}$ eine Lösung ist. Für jedes $j = 1, \ldots, r$ ist $P(\lambda)$ von der Form $P(\lambda) = Q_j(\lambda)(\lambda-\lambda_j)^{k_j}$ mit einem Polynom $Q_j(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$. Es folgt

$$\begin{aligned} P(D)y_{mj}(x) &= \big(Q_j(D)(D-\lambda_j)^{k_j}\big)y_{mj}(x) \\ &= Q_j(D)\big((D-\lambda_j)^{k_j}\, y_{mj}(x)\big) \quad \text{nach (3)} \\ &= Q_j(D)\big((D^{k_j}x^m)e^{\lambda_j x}\big) \text{ nach Hilfssatz 1 mit } f(x) = x^m \\ &= 0 \quad \text{da } k_j > m \text{ und also } D^{k_j}x^m = 0\,. \end{aligned}$$

**2. Teil** Zu zeigen ist, dass die Lösungen $y_{mj}(x) = x^m e^{\lambda_j x}$ mit $1 \leqslant j \leqslant r$ und $0 \leqslant m \leqslant k_j - 1$ linear unabhängig über $\mathbb{C}$ sind.

Sei $\sum\limits_{j=1}^{r}\sum\limits_{m=0}^{k_j-1} c_{mj}\, y_{mj}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und mit $c_{mj} \in \mathbb{C}$. Dann gilt $\sum\limits_{j=1}^{r} g_j(x)e^{\lambda_j x} = 0$, wobei $g_j(x) = \sum\limits_{m=0}^{k_j-1} c_{mj}\, x^m$ gilt. Zu zeigen ist also, dass die Polynome $g_j(x)$ identisch 0 sind, denn dann sind auch alle Koeffizienten $c_{mj} = 0$. Für $r = 1$ folgt $g_1(x) = 0$ aus $g_1(x)e^{\lambda_1 x} = 0$.

Induktionschritt $(r-1) \to r$: Ist ein $g_j$ identisch 0, so sind wir fertig. Anderenfalls wenden wir den Operator $(D-\lambda_r)^{k_r}$ auf $\sum_{j=1}^{r} g_j(x)\, e^{\lambda_j x} = 0$ an. Für den $r$-ten Summanden gilt dann

$$(D-\lambda_r)^{k_r}(g_r(x)e^{\lambda_r x}) = g_r^{(k_r)}(x)\, e^{\lambda_r x} = 0$$

nach Hilfssatz 1 und da $\mathrm{grad}(g_r) < k_r$ ist. Für $j = 1, \ldots, r-1$ ist $\lambda_j \neq \lambda_r$, und nach Hilfssatz 2 folgt $(D-\lambda_r)^{k_r}(g_j(x)e^{\lambda_j x}) = h_j(x)\, e^{\lambda_j x}$, wobei $h_j$ ein Polynom mit $\mathrm{grad}(h_j) = \mathrm{grad}(g_j)$ ist. Wir erhalten also

$$\sum_{j=1}^{r-1} h_j(x)\, e^{\lambda_j x} = 0\,,$$

wobei $\mathrm{grad}(h_j) \leqslant k_j - 1$ gilt und die $h_j(x)$ nicht identisch verschwinden. Das ist ein Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung.

**3. Teil** Seien $u(x) := x^m e^{(\alpha+i\beta)x}$ und $v(x) := x^m e^{(\alpha-i\beta)x}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\beta \neq 0$ zwei der im Satz angegebenen Lösungen der DGL $P(D)y = 0$. Dann gilt nach der Eulerschen Formel

$$u(x) = x^m e^{\alpha x} e^{i\beta x} = x^m e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x))$$

und analog $v(x) = x^m e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i \sin(\beta x))$ Nach dem Superpositionsprinzip, das auch für komplexwertige Lösungen gilt, sind dann

$$\frac{1}{2}(u(x)+v(x)) = x^m e^{\alpha x}\cos(\beta x) \text{ und } \frac{1}{2i}(u(x)-v(x)) = x^m e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

zwei reellwertige Lösungen. Nach dem Austauschlemma (vgl. z. B. [7, 1.5.4]) kann man nun $u(x)$ gegen $x^m e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ und $v(x)$ gegen $x^m e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ austauschen und erhält dabei wieder ein Fundamentalssystem. □

**Beispiel 1.** Man bestimme ein Fundamentalsystem von Lösungen für die DGL $y^{(4)} + 5\,y'' - 36\,y = 0$. Die charakteristische Gleichung $\lambda^4 + 5\lambda^2 - 36 = 0$ hat die Lösungen $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3i$, $\lambda_4 = -3i$, denn es ist

$$\begin{aligned} \lambda^4 + 5\lambda^2 - 36 &= (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 + 9) \\ &= (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 3i)(\lambda + 3i) \end{aligned}$$

Wir erhalten nun die vier linear unabhängigen reellwertigen Lösungen der DGL: $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = e^{-2x}$, $y_3(x) = \cos(3x)$, $y_4(x) = \sin(3x)$.

**Beispiel 2.** Man bestimme ein Fundamentalsystem von Lösungen für die DGL $y''' - 4y'' + 9y' - 10y = 0$. Es ist die Gleichung $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 9\lambda - 10 = 0$ zu lösen. Durch Probieren findet man die Lösung $\lambda_1 = 2$. Es ist

$$(\lambda^3 - 4\lambda^2 + 9\lambda - 10) : (\lambda - 2) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

und es ist $\lambda^2-2\lambda+5 = (\lambda-(1+2i))(\lambda-(1-2i))$ . Also gilt $\lambda^3-4\lambda^2+9\lambda-10 = (\lambda-2)(\lambda-(1+2i))(\lambda-(1-2i))$ . Wir erhalten damit die linear unabhängigen Lösungen $y_1(x) = e^{2x},\ y_2(x) = e^x\cos(2x),\ y_3(x) = e^x\sin(2x)$ .

## 8.4 Euler-DGL

Wir betrachten die homogene Euler-DGL

$$(1) \qquad a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 xy' + a_0 y = 0$$

mit $a_0,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$. Dann führt für $x > 0$ der Ansatz $y(x) = x^\lambda$ mit einer Lösung $\lambda \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$(2) \qquad a_n\lambda(\lambda-1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-n+1) + \cdots + a_2\lambda(\lambda-1) + a_1\lambda + a_0 = 0$$

stets zu einer Lösung der Euler-DGL (1), denn es gilt:

**Lemma.** *Eine Funktion* $y\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C}, x \mapsto x^\lambda$ *mit* $\lambda \in \mathbb{C}$ *ist genau dann eine Lösung der Euler-DGL* (1)*, wenn* $\lambda$ *eine Lösung der Gleichung* (2) *ist.*

*Beweis.* Für $y(x) = x^\lambda$ ist $y'(x) = \lambda x^{\lambda-1}$ und $y''(x) = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$ und weiter bis $y^{(n)} = \lambda(\lambda-1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-n+1)x^{\lambda-n}$. Setzt man dies in die linke Seite von (1) ein, sieht man, dass man $x^\lambda$ ausklammern kann und dass (1) genau dann für $y(x) = x^\lambda$ erfüllt ist, wenn $\lambda$ eine Lösung von (2) ist. □

Es sei nun $a_n = 1$. Wie kommt man zu einem Fundamentalsystem von Lösungen für die DGL (1) ? Man sortiert die linke Seite von (2) nach Potenzen von $\lambda$ und bringt (2) also in die Form $\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + a_0 = 0$. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Lösung von (2). Dann ist $z(t) = e^{\lambda t}$ für $t \in \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL

$$(3) \qquad \frac{d^n z}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1}z}{dt^{n-1}} + \cdots + b_1\frac{dz}{dt} + a_0 z = 0$$

nach dem Lemma in Abschnitt 8.3, und $z(\ln(x)) = e^{\lambda\ln(x)} = x^\lambda$ ist eine Lösung von (1) nach obigem Lemma. Hat man also gemäß Satz 14 ein (reellwertiges) Fundamentalsystem von Lösungen $z_\ell(t)$ mit $\ell = 1,\dots,n$ für die DGL (3) ermittelt, so erhält man durch $z_\ell(\ln(x))$ mit $\ell = 1,\dots,n$ ein Fundamentalsystem für die Euler-DGL (1) für $x > 0$. Im Fall einer inhomogenen DGL $a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 xy' + a_0 y = b(x)$ mit einer stetigen Funktion $b(x)$, die für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ definiert sei, ermittelt man für die DGL $\frac{d^n z}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1}z}{dt^{n-1}} + \cdots + b_1\frac{dz}{dt} + a_0 z = b(e^t)$ eine spezielle Lösung $z_s(t)$ und erhält eine spezielle Lösung $y_s(x) = z_s(\ln(x))$ der inhomogenen Euler-DGL für $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

**Euler-DGL für $n = 3$** Wir betrachten die Euler-DGL

$$a_3x^3y''' + a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0. \tag{4}$$

Mit dem Ansatz $y(x) = x^\lambda$ kann man die Gleichung (2) ermitteln: Man setzt $y'(x) = \lambda x^{\lambda-1}$, $y''(x) = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$, $y'''(x) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}$ in (4) ein, erhält $\big(a_3\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + a_2\lambda(\lambda-1) + a_1\lambda + a_0\big)x^\lambda = 0$ und also $a_3\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + a_2\lambda(\lambda-1) + a_1\lambda + a_0 = 0$.
Setzt man hierin $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda$ und $\lambda(\lambda-1) = \lambda^2 - \lambda$ ein und sortiert nach Potenzen von $\lambda$, so folgt

$$a_3\lambda^3 + (a_2 - 3a_3)\lambda^2 + (2a_3 - a_2 + a_1)\lambda + a_0 = 0 \tag{5}$$

und das ist die Gleichung (2) für $n = 3$. Je nach den folgenden vier Fällen erhält man für $x > 0$ mit Hilfe von Satz 14 folgendes Fundamentalsystem von Lösungen $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ der DGL (4) mit $a_3 = 1$. Auch in (5) sei nun $a_3 = 1$.

1. Die Gleichung (5) hat drei verschiedene Lösungen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Dann ist $y_1(x) = x^{\lambda_1}$, $y_2(x) = x^{\lambda_2}$, $y_3(x) = x^{\lambda_3}$.
2. Die Gleichung (5) hat eine einfache Lösung $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ und eine doppelte Lösung $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann ist $y_1(x) = x^{\lambda_1}$, $y_2(x) = x^{\lambda_2}$, $y_3(x) = \ln(x)x^{\lambda_2}$.
3. Die Gleichung (5) hat eine dreifache Lösung $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $y_1(x) = x^\lambda$, $y_2(x) = \ln(x)\,x^\lambda$, $y_3(x) = \ln^2(x)\,x^\lambda$.
4. Die Gleichung (5) hat eine Lösung $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ und zwei konjugiert komplexe Lösungen $\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\beta \neq 0$. Dann ist $y_1(x) = x^{\lambda_1}$, $y_2(x) = x^\alpha\cos(\beta\ln(x))$, $y_3(x) = x^\alpha\sin(\beta\ln(x))$.

Im Fall einer inhomogenen Euler-DGL

$$x^3y''' + a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = b(x) \tag{6}$$

mit einer stetigen Funktion $b(x)$, die für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ definiert sei, ermittelt man für die DGL $\frac{d^3z}{dt^3} + (a_2 - 3)\frac{d^2z}{dt^2} + (2 - a_2 + a_1)\frac{dz}{dt} + a_0z = b(e^t)$ eine spezielle Lösung $z_s(t)$ und erhält eine spezielle Lösung $y_s(x) = z_s(\ln(x))$ von (6) für $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

## 8.5 Aufgaben 33 – 36

**Aufgabe 33.** Gegeben seien die inhomogene DGL

$$y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

und drei linear unabhängige Lösungen $y_1(x)$, $y_2(x)$ und $y_3(x)$ der zugehörigen homogenen DGL. Dann führt die Methode der „Variation der Konstanten“ zu einer speziellen Lösung

$$y_s(x) = c_1(x)\,y_1(x) + c_2(x)\,y_2(x) + c_3(x)\,y_3(x)$$

der inhomogenen DGL, wenn $c_1'(x)$, $c_2'(x)$, $c_3'(x)$ das folgende lineare Gleichungssystem lösen:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ c_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}.$$

(a) Man leite mit Hilfe der Cramerschen Regel jeweils eine Formel für $c_1'(x)$, $c_2'(x)$ und $c_3'(x)$ her.

(b) Man ermittle eine spezielle Lösung

$$y_s(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + c_3(x)y_3(x)$$

der DGL $y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = 2x$ für $x > 0$ mit Hilfe von (a) und nutze dabei aus, dass $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$ und $y_3(x) = x^3$ drei linear unabhängige Lösungen der zugehörigen homogenen DGL sind. Das Ergebnis ist durch eine Probe zu bestätigen.

**Aufgabe 34.** (Zur Wiederholung) Man betrachte die auf $I = ]0, \pi[$ definierte DGL

$$(*) \qquad y'' + 3\cot(x)y' - 2y = 0.$$

(a) Man bestätige durch eine Probe, dass $(*)$ auf $I$ die Lösung $y_1(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$ besitzt und bestimme mit Hilfe von Satz 8 die allgemeine Lösung.

(b) Man löse die Anfangswertaufgabe $(*)$ mit $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ und $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$.

**Aufgabe 35.** Man ermittle jeweils ein Fundamentalsystem von Lösungen für die DGL

(a) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$

(b) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

(c) $y''' - 5y'' + 9y' - 5y = 0$

(d) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

**Aufgabe 36.** Man bestimme für $x > 0$ die allgemeine Lösung der DGL

$$x^3y''' - 4x^2y'' + 13xy' - 13y = x^2.$$

# DGL-Systeme

Wir betrachten explizite DGL-Systeme mit $n$ Gleichungen 1. Ordnung, wie in den Abschnitten 3.3 und 3.4 eingeführt.

## 9 DGL-Systeme mit zwei Gleichungen

Ein explizites DGL-System mit 2 Gleichungen 1. Ordnung hat die Form

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2) \end{aligned}$$

wobei $f_1, f_2 \colon D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einer Menge $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ sind. Lösungen sind wie gewohnt stets auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ anzugeben. In Vektorschreibweise hat das obige System die Form

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y})$$

wobei $\vec{f} \colon D \to \mathbb{R}^2$, $(x, \vec{y}\,) \mapsto \big(f_1(x, \vec{y}\,), f_2(x, \vec{y}\,)\big)$ mit $\vec{y} = (y_1, y_2)$ gelte. Es ist $\vec{y}\,' = (y_1', y_2')$. Wir betrachten hier lineare 2×2-Systeme sowie autonome 2×2-Systeme, bei denen die Variable $x$ nicht explizit auftritt.

### 9.1 Lineare 2×2-Systeme

Seien $a_{jk} \colon I \to \mathbb{R}$ für $j, k = 1, 2$ stetige Funktionen. Wir betrachten hier zunächst ein *homogenes lineares System*

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)\, y_1 + a_{12}(x)\, y_2 \\ y_2' &= a_{21}(x)\, y_1 + a_{22}(x)\, y_2\,. \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise hat das System die Form

(1) $$\vec{y}\,' = A(x)\, \vec{y}$$

mit $A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Die Lösungen $\vec{y}\colon I \to \mathbb{R}^2$ von (1) bilden einen 2-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum $L_h$, wie wir in 11.2 zeigen werden. Die *allgemeine Lösung* lässt sich daher schreiben als

$$\vec{y}_h(x) = c_1\vec{y}(x) + c_2\vec{z}(x)\,,$$

wobei $\vec{y}$ und $\vec{z}$ linear unabhängige Lösungen sind und also ein *Fundamentalsystem* für das System (1) bilden. Wie bisher sind $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten.

**Definition.** Sind $\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$ und $\vec{z}(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}$ Lösungen des Systems (1), so ist deren *Wronski-Matrix* $Y(x)$ für $x \in I$ definiert als $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & z_1(x) \\ y_2(x) & z_2(x) \end{pmatrix}$.

**Satz 15.** *Seien $\vec{y}, \vec{z}\colon I \to \mathbb{R}^2$ zwei Lösungen des Systems* (1)*, und sei $x \in I$. Dann gilt* $\det(Y(x)) \neq 0$ *genau dann, wenn $\vec{y}$ und $\vec{z}$ linear unabhängig sind.*

*Beweis.* „$\Longrightarrow$“ Wenn $\det(Y(x)) \neq 0$ gilt, hat die Wronski-Matrix $Y(x)$ den Rang 2, und also sind die Spaltenvektoren $\vec{y}(x)$ und $\vec{z}(x)$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^2$. Hieraus folgt, dass auch die Funktionen $\vec{y}$ und $\vec{z}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind, denn sei $c_1\vec{y} + c_2\vec{z} = \vec{0}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$c_1\vec{y}(x) + c_2\vec{z}(x) = \vec{0}$$

und also $c_1 = 0 = c_2$ , da $\vec{y}(x)$ und $\vec{z}(x)$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^2$ sind.
„$\Longleftarrow$“ Seien nun umgekehrt die Funktionen $\vec{y}$ und $\vec{z}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$. Dann ist nicht so leicht zu zeigen, dass die Vektoren $\vec{y}(x)$ und $\vec{z}(x)$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^2$ sind und also $\det(Y(x)) \neq 0$ gilt. Wir werden dies in Satz 29 in Abschnitt 11.2 allgemeiner gleich für $n\times n$-Systeme beweisen. □

**Bemerkung 1.** Seien $\vec{y}, \vec{z}\colon I \to \mathbb{R}^2$ zwei Lösungen der DGL (1), und sei $Y(x)$ deren Wronski-Matrix für ein $x \in I$. Mit komponentenweiser Differenziation gilt dann $Y'(x) = A(x)Y(x)$, wie man durch entsprechende Matrizenmultiplikation sofort bestätigt. Man kann dann auch mit Hilfe dieser Matrixgleichung die Probe für die beiden Lösungen simultan machen.

**Beispiel 1.** Das System $\vec{y}\,' = A(x)\,\vec{y}$ mit $A(x) = \begin{pmatrix} 6x^{-1} & -3x^{-1} \\ 2x^{-1} & x^{-1} \end{pmatrix}$ hat für $x > 0$ die linear unabhängigen Lösungen $\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} x^3 \\ x^3 \end{pmatrix}$ und $\vec{z}(x) = \begin{pmatrix} 3x^4 \\ 2x^4 \end{pmatrix}$, wie wir unten noch mehrmals ermitteln werden. Die Probe bestätigt dies:
$A(x)Y(x) = \begin{pmatrix} 6x^{-1} & -3x^{-1} \\ 2x^{-1} & x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^3 & 3x^4 \\ x^3 & 2x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 & 12x^3 \\ 3x^2 & 8x^3 \end{pmatrix} = Y'(x)$ ✓

### Inhomogene lineare Systeme

Wir betrachten nun ein System der Form

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)\, y_1 + a_{12}(x)\, y_2 + b_1(x) \\ y_2' &= a_{21}(x)\, y_1 + a_{22}(x)\, y_2 + b_2(x) \end{aligned}$$

wobei $a_{jk}$ , $b_j \colon I \to \mathbb{R}$ für $j, k = 1, 2$ stetige Funktionen sind. In Matrixschreibweise hat das System die Form

$$\vec{y}\,' = A(x)\,\vec{y} + \vec{b}(x)\,. \tag{2}$$

In Analogie zu Satz (b) in Abschnitt 4.2 über die Lösungen der linearen DGL $y' = a(x)y + b(x)$ erhalten wir hier, wiederum mit der *Methode der Variation der Konstanten*, das folgende Ergebnis.

**Satz 16.** *Gegeben sei ein Fundamentalsystem von Lösungen $\vec{z}_1, \vec{z}_2 \colon I \to \mathbb{R}^2$ für das zu* (2) *gehörige homogene System, und sei $Y(x)$ dessen Wronski-Matrix. Dann ist jede Lösung $\vec{y} \colon I \to \mathbb{R}^2$ des Systems* (2) *von der Form*

$$\vec{y}(x) = Y(x) \cdot \int Y(x)^{-1}\, \vec{b}(x)\, dx\,. \tag{3}$$

*Beweis.* Nach Satz 15 ist $Y(x)$ invertierbar. Die Funktion $\vec{u} \colon I \to \mathbb{R}^2$ mit $\vec{u}(x) = Y(x) \cdot \int Y(x)^{-1}\, \vec{b}(x)\, dx$ ist eine Lösung von (2), denn aus der Produktregel folgt

$$\begin{aligned} \vec{u}\,'(x) &= Y'(x) \int Y(x)^{-1}\, \vec{b}(x)\, dx + Y(x) \cdot Y(x)^{-1}\, \vec{b}(x) \\ &= A(x) Y(x) \int Y(x)^{-1}\, \vec{b}(x)\, dx + \vec{b}(x) \quad \text{(vgl. Bemerkung 1)} \\ &= A(x)\vec{u}(x) + \vec{b}(x)\,. \end{aligned}$$

Sei $\vec{y}(x)$ irgendeine Lösung von (2), und sei $\vec{c}(x) = Y(x)^{-1}\vec{y}(x)$. Dann ist $\vec{y}(x) = Y(x)\vec{c}(x)$ mit einer differenzierbaren Funktion $\vec{c} \colon I \to \mathbb{R}^2$, und es folgt nach Produktregel

$$\begin{aligned} \vec{y}\,'(x) &= Y'(x)\vec{c}(x) + Y(x)\vec{c}\,'(x) \\ &= A(x)Y(x)\vec{c}(x) + Y(x)\vec{c}\,'(x) \\ &= A(x)\,\vec{y}(x) + Y(x)\vec{c}\,'(x). \end{aligned}$$

Da $\vec{y}\,'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{b}(x)$ gilt, folgt $Y(x)\vec{c}\,'(x) = \vec{b}(x)$ und also $\vec{c}\,'(x) = Y(x)^{-1}\vec{b}(x)$. Dies ergibt $\vec{c}(x) = \int Y(x)^{-1}\vec{b}(x)\, dx$ und damit die Behauptung, da $\vec{y}(x) = Y(x)\vec{c}(x)$ gilt. □

**Bemerkung 2.** Die *allgemeine Lösung* des Systems (2) hat die Gestalt

$$\vec{y}_{\text{allg}}(x) = \vec{y}_s(x) + c_1\vec{y}(x) + c_2\vec{z}(x)\,,$$

wobei $\vec{y}_s\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems (2) ist und $\vec{y}$, $\vec{z}\colon I \to \mathbb{R}^2$ ein Fundamentalsystem von Lösungen für das zugehörige homogene System (1) bilden.

**Beispiel 2.** Man ermittle für $x > 0$ die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{6}{x}\,y_1 - \frac{3}{x}\,y_2 - x^4 \\ y_2' &= \frac{2}{x}\,y_1 + \frac{1}{x}\,y_2\,. \end{aligned}$$

Wie in Beispiel 1 ist $Y(x) = \begin{pmatrix} x^3 & 3x^4 \\ x^3 & 2x^4 \end{pmatrix}$. Es folgt

$$Y(x)^{-1} = \frac{-1}{x^7}\begin{pmatrix} 2x^4 & -3x^4 \\ -x^3 & x^3 \end{pmatrix}$$

und $Y(x)^{-1}\,\vec{b}(x) = \begin{pmatrix} 2x^4 & -3x^4 \\ -x^3 & x^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{-3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix}$. Dies ergibt $\vec{y}_s(x) = Y(x)\int Y(x)^{-1}\,\vec{b}(x)\,dx = \begin{pmatrix} x^3 & 3x^4 \\ x^3 & 2x^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \int 2x\,dx \\ \int -1\,dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 & 3x^4 \\ x^3 & 2x^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x^5 \\ -x^5 \end{pmatrix}$ und die allgemeine Lösung

$$\vec{y}_{\text{allg}}(x) = \begin{pmatrix} -2x^5 \\ -x^5 \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} x^3 \\ x^3 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 3x^4 \\ 2x^4 \end{pmatrix} \quad \text{für} \;\; x > 0\,.$$

Setzen wir oben nach Integrieren Konstanten, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^3 & 3x^4 \\ x^3 & 2x^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^2 + c_1 \\ -x + c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x^5 + x^3c_1 - 3x^5 + 3x^4c_2 \\ x^5 + x^3c_1 - 2x^5 + 2x^4c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2x^5 + x^3c_1 + 3x^4c_2 \\ -x^5 + x^3c_1 + 2x^4c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2x^5 \\ -x^5 \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} x^3 \\ x^3 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 3x^4 \\ 2x^4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und also direkt die allgemeine Lösung, was aber nichts Neues bringt.
Es sei nun eine Anfangsbedingung $\vec{y}(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vorgegeben. Dann ist $\vec{y}(1) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + c_1 + 3c_2 \\ -1 + c_1 + 2c_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Es ist also das Gleichungssystem $c_1 + 3c_2 = 4$ und $c_1 + 2c_2 = 2$ zu lösen. Es folgt $c_2 = 2$ und $c_1 = -2$, was die Lösung der Anfangswertaufgabe $\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} -2x^5 \\ -x^5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} x^3 \\ x^3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3x^4 \\ 2x^4 \end{pmatrix}$ für $x > 0$ ergibt.

Satz 16 setzt die Kenntnis eines Fundamentalsystems von Lösungen für das homogene System (1) voraus. Wie findet man aber ein solches? Das schwierig und braucht i. Allg. nicht zu gelingen. Wir stellen nun verschiedene Lösungsmöglichkeiten vor.

## 9.2 Fundamentalsystem, wenn eine Lösung bekannt ist

**Satz 17.** *Sei $\vec{y}\colon I \to \mathbb{R}^2, x \mapsto \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$ eine bereits bekannte Lösung des Systems $\vec{y}\,' = A(x)\vec{y}$ mit $A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix}$, und es sei $y_1(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Ferner sei*

$$u(x) = \int \frac{a_{12}(x)}{y_1(x)}\, e^{\mathcal{A}(x)}\, dx$$

*mit einer Stammfunktion $\mathcal{A}(x)$ von $a(x) := a_{22}(x) - a_{12}(x)\frac{y_2(x)}{y_1(x)}$. Dann ist die Funktion $\vec{z}\colon I \to \mathbb{R}^2$ mit $\vec{z}(x) = u(x)\,\vec{y}(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\mathcal{A}(x)} \end{pmatrix}$ eine zweite von $\vec{y}$ linear unabhängige Lösung von (1).*

*Beweis.* Wir setzen $v(x) := e^{\mathcal{A}(x)}$. Dann ist $v'(x) = a(x)e^{\mathcal{A}(x)} = a(x)v(x)$ und $v(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Der Kürze halber schreiben wir nun die Argumente $x$ nicht mehr mit und zeigen zunächst, dass $\vec{z} = u\vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$ eine Lösung von (1) ist. Nach Produktregel und der Voraussetzung $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ folgt $\vec{z}\,' = u'\vec{y} + u\vec{y}\,' + \begin{pmatrix} 0 \\ v' \end{pmatrix} = u'\vec{y} + uA\vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ v' \end{pmatrix}$. Ferner ist $A\vec{z} = uA\vec{y} + A\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$. Um $\vec{z}\,' = A\vec{z}$ zu zeigen, genügt es also zu zeigen, dass $u'\vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ v' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$ ist. Wir rechnen nun nach, dass tatsächlich $A\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} - u'\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ v' \end{pmatrix}$ gilt. Es ist $A\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} - u'\vec{y} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} - \frac{a_{12}}{y_1}\, v\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12}v \\ a_{22}v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{12}v \\ a_{12}\frac{y_2}{y_1}v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ av \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v' \end{pmatrix}$. Es ist $\det(Y) = \det\begin{pmatrix} y_1 & uy_1 \\ y_2 & uy_2 + v \end{pmatrix} = y_1 v \neq 0$, und also sind $\vec{y}$ und $\vec{z}$ nach Satz 15 linear unabhängig. □

**Beispiel 3.** Man ermittle für $x > 0$ die allgemeine Lösung des Systems $\vec{y}\,' = A(x)\,\vec{y}$ mit $A(x) = \begin{pmatrix} 6x^{-1} & -3x^{-1} \\ 2x^{-1} & x^{-1} \end{pmatrix}$ und nutze dabei aus, dass $\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} x^3 \\ x^3 \end{pmatrix}$ eine bereits bekannte Lösung ist.

Es ist $a(x) := a_{22}(x) - a_{12}(x)\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = x^{-1} - (-3x^{-1})\frac{x^3}{x^3} = \frac{4}{x}$ und also folgt $\mathcal{A}(x) = \int \frac{4}{x}\,dx = 4\ln(x) = \ln(x^4)$. Dies ergibt $e^{\mathcal{A}(x)} = x^4$ und

$$u(x) = \int \frac{a_{12}(x)}{y_1(x)}\, e^{\mathcal{A}(x)}\, dx = -3\int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^3}\cdot x^4\, dx = -3x\,.$$

Es ist dann $\vec{z}(x) = u(x)\,\vec{y}(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\mathcal{A}(x)} \end{pmatrix} = -3x\begin{pmatrix} x^3 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x^4 \\ -2x^4 \end{pmatrix}$.

Die allgemeine Lösung ist also $y_h(x) = c_1\begin{pmatrix} x^3 \\ x^3 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 3x^4 \\ 2x^4 \end{pmatrix}$.

## 9.3 Rückführung auf eine DGL 2. Ordnung

Wir betrachten das homogene lineare System

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)\,y_1 + a_{12}(x)\,y_2 \\ y_2' &= a_{21}(x)\,y_1 + a_{22}(x)\,y_2\,, \end{aligned}$$

mit stetigen Funktionen $a_{jk}\colon I \to \mathbb{R}$ für $j,k = 1,2$. Gesucht sind zwei linear unabhängige Lösungen $\vec{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}$ und $\vec{\psi}(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$. Es ist dann $\vec{y}_h(x) = c_1\vec{\varphi}(x) + c_2\vec{\psi}(x)$ die allgemeine Lösung für $x \in I$. Je nach Bauart des Systems könnte die Rückführung auf eine DGL 2. Ordnung zum Auffinden von $\vec{\varphi}$ und $\vec{\psi}$ führen.

**DGL in $y_1$** Löse die erste DGL des Systems nach $y_2$ auf und bilde $y_2'$. Setze diese Ausdrücke für $y_2$ und $y_2'$ in die zweite DGL ein und *erhalte eine DGL 2. Ordnung für $y_1$*. Sind $\varphi_1(x)$ und $\psi_1(x)$ Lösungen dieser DGL, so setze $y_1 = \varphi_1(x)$ in den Ausdruck für $y_2$ ein und erhalte $y_2 = \varphi_2(x)$. Setze $y_1 = \psi_1(x)$ in den Ausdruck für $y_2$ ein und erhalte $y_2 = \psi_2(x)$. (Bei dieser Methode muss $a_{12}(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ sein.)

**oder DGL in $y_2$** Löse die zweite DGL des Systems nach $y_1$ auf und bilde $y_1'$. Setze diese Ausdrücke für $y_1$ und $y_1'$ in die erste DGL ein und *erhalte eine DGL 2. Ordnung für $y_2$*. Sind $\varphi_2(x)$ und $\psi_2(x)$ Lösungen dieser DGL, so setze $y_2 = \varphi_2(x)$ in den Ausdruck für $y_1$ ein und erhalte $y_1 = \varphi_1(x)$. Setze $y_2 = \psi_2(x)$ in den Ausdruck für $y_1$ ein und erhalte $y_1 = \psi_1(x)$. (Hier muss $a_{21}(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ sein.)

Wenn dann $\varphi_1(x)$ und $\psi_1(x)$ (oder $\varphi_2(x)$ und $\psi_2(x)$) linear unabhängig sind, so sind auch $\vec{\varphi}(x)$ und $\vec{\psi}(x)$ linear unabhängig.

**Beispiel 4.** Gegeben sei für $x > 0$ das homogene lineare DGL-System

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{6}{x}\,y_1 - \frac{3}{x}\,y_2 \\ y_2' &= \frac{2}{x}\,y_1 + \frac{1}{x}\,y_2\,. \end{aligned}$$

Löse die erste Gleichung nach $y_2$ auf. Dies ergibt $y_2 = 2y_1 - \frac{x}{3}y_1'$ und $y_2' = 2y_1' - \frac{1}{3}y_1' - \frac{x}{3}y_1'' = \frac{5}{3}y_1' - \frac{x}{3}y_1''$.
Setze die beiden Ausdrücke für $y_2$ und $y_2'$ in die zweite DGL ein und erhalte $\frac{5}{3}y_1' - \frac{x}{3}y_1'' = \frac{2}{x}\,y_1 + \frac{2}{x}y_1 - \frac{1}{3}y_1' = \frac{4}{x}y_1 - \frac{1}{3}y_1'$. Multiplikation mit $-3x$ und Umstellen ergibt die Euler-DGL

$$x^2y_1'' - 6xy_1' + 12y_1 = 0.$$

Dazu gehört die charakteristischen Gleichung $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$ mit den Lösungen $\lambda_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{-q_1}$ mit $q_1 = -\frac{49}{4} + 12 = -\frac{1}{4}$. Es ist also $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 3$, woraus sich nach dem Korollar zu Satz 11 in 7.6 die Lösungen $\varphi_1(x) = x^4$ und $\psi_1(x) = x^3$ der Euler-DGL ergeben.
Setze $y_1 = \varphi_1(x) = x^4$ in $y_2 = 2y_1 - \frac{x}{3}y_1'$ ein. Dann folgt $y_2 = \varphi_2(x) = 2x^4 - \frac{x}{3}4x^3 = \frac{2}{3}x^4$. Setze $y_1 = \psi_1(x) = x^3$ in $y_2 = 2y_1 - \frac{x}{3}y_1'$ ein. Dann folgt $y_2 = \psi_2(x) = 2x^3 - \frac{x}{3}3x^2 = x^3$. Wir erhalten das Fundamentalssystem von Lösungen $\vec{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} x^4 \\ \frac{2}{3}x^4 \end{pmatrix}$ und $\vec{\psi}(x) = \begin{pmatrix} x^3 \\ x^3 \end{pmatrix}$ und damit die allgemeine Lösung $\vec{y}_h(x) = c_1 \begin{pmatrix} x^3 \\ x^3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3x^4 \\ 2x^4 \end{pmatrix}$ des Systems, vgl. Beispiele $1, 2, 3$.

### Lineare 2×2-Systeme mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten ein homogenes lineares System

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}\,y_1 + a_{12}\,y_2 \\ y_2' &= a_{21}\,y_1 + a_{22}\,y_2\,. \end{aligned}$$

mit Koeffizienten $a_{jk} \in \mathbb{R}$ für $j, k = 1, 2$ und $a_{12} \neq 0$. Dieses System kann dann durch Rückführung auf eine lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten gelöst werden. Wir lösen die erste DGL nach $y_2$ auf und erhalten $y_2 = \frac{1}{a_{12}}(y_1' - a_{11}\,y_1)$. Es folgt $y_2' = \frac{1}{a_{12}}(y_1'' - a_{11}\,y_1')$. Diese beide Ausdrücke für $y_2$ und $y_2'$ setzen wir in die zweite DGL ein und erhalten $\frac{1}{a_{12}}(y_1'' - a_{11}\,y_1') = a_{21}\,y_1 + a_{22}(\frac{1}{a_{12}}(y_1' - a_{11}\,y_1))$. Dies ergibt die DGL

$$y_1'' - (a_{11} + a_{22})y_1' + (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})y_1 = 0$$

und also die DGL $y_1'' - \mathrm{spur}(A)y_1' + \det(A)y_1 = 0$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ die Koeffizientenmatrix des Systems ist. Diese DGL kann nun gemäß Satz 11 in Abschnitt 7.5 gelöst werden, und dann kann fortgefahren werden, wie am Anfang dieses Abschnitts beschrieben.

Man kann aber auch die ermittelte allgemeine Lösung der DGL 2. Ordnung in $y_2 = \frac{1}{a_{12}}(y_1' - a_{11}\, y_1)$ einsetzen. Das geht dann so:

Sei $y_1(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x)$ die allgemeine Lösung der DGL

$$y_1'' - (a_{11} + a_{22})y_1' + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y_1 = 0\,.$$

Setze diese in $y_2 = \frac{1}{a_{12}}y_1'(x) - \frac{a_{11}}{a_{12}}\, y_1(x)$ ein. Es folgt

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \frac{1}{a_{12}}\big(c_1u_1'(x) + c_2u_2'(x)\big) - \frac{a_{11}}{a_{12}}\big(c_1u_1(x) + c_2u_2(x)\big) \\ &= c_1\,\frac{u_1'(x) - a_{11}u_1(x)}{a_{12}} + c_2\,\frac{u_2'(x) - a_{11}u_2(x)}{a_{12}}\,, \end{aligned}$$

und $\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$ ist die allgemeine Lösung des Systems. Diese Methode lässt sich direkt auf eine Anfangswertaufgabe und ein inhomogenes System erweitern, vgl. [13] § 47.

**Beispiel 5.** Ermittle die allgemeine Lösung des Systems $\vec{y}\,' = A\,\vec{y}$ mit $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

**1. Schritt.** Löse die DGL $y_1'' - \mathrm{spur}(A)y_1' + \det(A)y_1 = 0$. Es ist $\mathrm{spur}(A) = -3 - 1 = -4$ und $\det(A) = 3 + 1 = 4$. Also ist die DGL $y_1'' + 4y_1' + 4y_1 = 0$ zu lösen. Nach Satz 11 ist $q_0 = -\frac{a_1^2}{4} + a_0 = 4 - 4 = 0$ und also $y_1(x) = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$ die allgemeine Lösung der DGL.

**2. Schritt.** Setze $y_1(x)$ und $y_1'(x) = -2c_1e^{-2x} + c_2e^{-2x} - 2c_2xe^{-2x}$ in die Gleichung $y_2(x) = \frac{1}{a_{12}}y_1'(x) - \frac{a_{11}}{a_{12}}\, y_1(x) = -y_1'(x) - 3y_1(x)$ ein.

**3. Schritt.** Erhalte die Lösung
$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} e^{-2x} \\ -e^{-2x} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} xe^{-2x} \\ -(1+x)e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

## 9.4 Autonome 2×2-Systeme

Ein explizites *autonomes* 2×2-*System* ist von der Form

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2) \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2) \end{aligned}$$

mit Funktionen $f_1, f_2 \colon D \to \mathbb{R}$ auf einer Menge $D \subset \mathbb{R}^2$. Das System wird *autonom* genannt, weil die unabhängige Variable $x$ nicht explizit auftritt. Beispiele für autonome Systeme sind die homogenen linearen Systeme mit konstanten Koeffizienten. Ein Beispiel für ein nicht-lineares autonomes System wird durch das folgende Modell gegeben.

**Räuber-Beute-Modell** Diese Modell ist von A. J. Lotka (1880-1949) und V. Volterra (1860-1940) unabhängig gefunden worden und wird daher auch *Lotka-Volterra-Räuber-Beute-Modell* genannt.
Eine Beutepopulation $b$ verfüge über einen ständigen Nahrungsvorrat, und eine Räuberpopulation $r$ lebe ausschließlich von der Beute $b$. Wäre keine Beute da, würde sich $r$ nach dem Gesetz $r'(t) := \frac{dr}{dt} = -\rho\, r(t)$ mit der Zeit $t$ vermindern, wobei $\rho > 0$ eine Konstante ist. Wären keine Räuber da, würde $b$ gemäß $b'(t) = \beta\, b(t)$ mit einer Konstanten $\beta > 0$ wachsen. Durch Begegnungen von $b$ mit $r$ kommt es aber zu einer Zunahme von $r$ und einer Abnahme von $b$ mit Änderungsraten, die jeweils als proportional zu $br$ angenommen werden können. Es ergibt sich also das DGL-System

$$\begin{aligned} r' &= -\rho\, r + \alpha\, rb \\ b' &= \beta\, b - \gamma\, rb \end{aligned}$$

mit Konstanten $\rho, \alpha, \beta, \gamma > 0$. Beginnen die Wechselwirkungen zwischen $b$ und $r$ zur Zeit $t_0 = 0$ und sind $b_0, r_0$ die Anfangsbestände $> 0$, so erhält man die Bestände zur Zeit $t > 0$ als Lösung des Systems mit den Anfangsbedingungen $r(0) = r_0$ und $b(0) = b_0$. Im nächsten Kapitel zeigen wir, dass das System eine Lösung besitzt und dass diese Lösung durch die Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt ist. Ein Problem ist es aber, die Lösung auch konkret anzugeben. Das ist hier nicht in geschlossener Form möglich, sondern man ist auf numerische Lösungsverfahren angewiesen. Auf solche Verfahren werden wir in Abschnitt 10.7 kurz eingehen. Aber auch ohne eine Lösung zu kennen, kann man Aussagen zum Verlauf von Lösungskurven machen, wie sich noch zeigen wird.
Da die Räuberpopulation $r$ eine Verminderung der Beutepopulation $b$ erzeugt, wird mit der Zeit nicht mehr genug Beutevorrat da sein, und es vermindert sich dann $r$, was wiederum zum Wachsen von $b$ beiträgt. So ergeben sich periodische Schwankungen in der Räuber- und Beutepopulation. Dass diese Periodizität durch das Modell tatsächlich gegeben ist, hat Volterra 1931 bewiesen, vgl. [13, Nr. 64]. Dort ist der Beweis wiedergegeben.

### Stationäre Punkte und Phasen-DGL

Wie in der Literatur bei autonomen Systemem gebräuchlich, bezeichnen wir nun die unabhängige Variable mit dem Buchstaben $t$ und schreiben ein autonomes System in der Form

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x,y) \\
\dot{y} &= g(x,y)\,.
\end{aligned} \tag{23}
$$

Dabei ist $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ und analog für $y$. Die Funktionen $f(x,y)$ und $g(x,y)$ seien auf $\mathbb{R}^2$ definiert und mit stetigen partiellen Ableitungen nach $x$ und $y$ versehen. Ferner seien Anfangsbedingungen

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{und} \quad y(t_0) = y_0$$

vorgegeben. Dadurch ist das System (23) eindeutig lösbar, wie im nächsten Kapitel gezeigt wird. Die Lösung $t \mapsto (x(t), y(t))$ lässt sich auffassen als Parameterdarstellung $x = x(t)$ und $y = y(t)$ einer Kurve in der $xy$-Ebene durch den Punkt $(x_0, y_0)$. Eine solche Kurve wird *Trajektorie* oder *Phasenkurve* oder auch *Integralkurve* des Systems (23) genannt. Eine Trajektorie besitzt eine *Orientierung* gemäß wachsender Parameterwerte $t$. Die Gesamtheit der Trajektorien des Systems (23) nennt man ein *Phasenporträt.*

**Lemma.** *Durch jeden Punkt* $(x_0, y_0)$ *der xy-Ebene geht genau eine Trajektorie des Systems (23), und diese hat eine wohlbestimmte Orientierung.*

*Beweis.* Sei $x = x_1(t), y = y_1(t)$ eine weitere Trajektorie, die durch $(x_0, y_0)$ geht, für die also $x_1(t_1) = x_0$ und $y_1(t_1) = y_0$ mit einem $t_1 \in \mathbb{R}$ gilt. Dann ist durch $x_c = x_1(t + c)$, $y_c = y(t + c)$ mit $c = t_1 - t_0$ eine Lösung von (23) mit $x_c(t_0) = x_0$ und $y_c(t_0) = y_0$ gegeben. Da die Lösung von (23) dadurch eindeutig bestimmt ist, folgt $x(t) = x_1(t + c)$, $y(t) = y_1(t + c)$, und die Orientierung ist dieselbe. □

**Definition.** Ein Punkt $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ heißt *stationärer Punkt* des Systems (23), wenn $f(\xi, \eta) = 0 = g(\xi, \eta)$ gilt. Ein stationärer Punkt wird auch *kritischer Punkt* oder *Gleichgewichtspunkt* oder *Ruhelage* des Systems genannt.

Ist $(\xi, \eta)$ ein stationärer Punkt, so ist die konstante Funktion $t \mapsto (\xi, \eta)$ eine Lösung des Systems (23), und diese ist die einzige Lösung, die den Wert $(\xi, \eta)$ annimmt. Man nennt die Lösung dann eine *stationäre Lösung.* Die zugehörige Trajektorie schrumpft auf den Punkt $(\xi, \eta)$ zusammen.

Wie kann man die Trajektorien bestimmen? Wenn $x(t)$ in einem Intervall umkehrbar ist, also dort eine Umkehrfunktion $t(x)$ besitzt, dann kann man $y(t) = y(t(x))$ als Funktion von $x$ auffassen, und Ableiten von $y$ nach $x$ ergibt nach der Kettenregel und der Umkehrregel $(y \circ t)'(x) = y'(t(x))t'(x) = \dot{y}(t)\frac{1}{\dot{x}(t)}$ . Man erhält dann also zum System (23) die *Phasen-DGL*

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}\,. \tag{24}$$

Die Phasen-DGL (24) ist für $f(x, y) \neq 0$ definiert. Durch die Lösungen von (24) werden die Trajektorien des Systems (23) bestimmt. Wenn $y(t)$ in einem Intervall umkehrbar ist, so erhält man analog: $\frac{dx}{dy} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$, falls $g(x, y) \neq 0$ gilt, und man kann damit ebenfalls die Trajektorien des Systems (23) bestimmen. Ein stationärer Punkt des Systems (23) ist eine *Singularität* der Phasen-DGL (24), d. h. er ist eine Nullstelle von deren Zähler und deren Nenner. Umgekehrt ist eine Singularität der Phasen-DGL (24) ein stationärer Punkt des Systems (23).

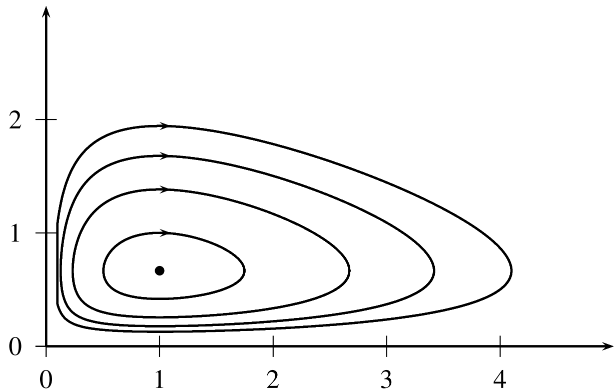
**Beispiel 1.** Wir schreiben das obige Räuber-Beute-Modell in der Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\rho\, x + \alpha\, xy \\ \dot{y} &= \beta\, y - \gamma\, xy \end{aligned}$$

mit Konstanten $\rho, \alpha, \beta, \gamma > 0$. Es seien Anfangsbedingungen $x(0) > 0$ und $y(0) > 0$ gegeben. Der Punkt $(0, 0)$ ist ein stationärer Punkt, der aber für das Modell keine Rolle spielt. Für $x > 0$ gilt $-\rho\, x + \alpha\, xy = 0$ genau dann, wenn $y = \frac{\rho}{\alpha}$ ist. Und für $y > 0$ gilt $\beta\, y - \gamma\, xy = 0$ genau dann, wenn $x = \frac{\beta}{\gamma}$ ist. Wir erhalten also den stationären Punkt $\left(\frac{\beta}{\gamma}, \frac{\rho}{\alpha}\right)$ und eine stationäre Lösung mit $x(t) = \frac{\beta}{\gamma}$, und $y(t) := \frac{\rho}{\alpha}$ für $t > 0$. Die Phasen-DGL (24) lautet

$$y' = \frac{\beta\, y - \gamma\, xy}{-\rho\, x + \alpha\, xy} = \frac{(\beta - \gamma x)y}{x(-\rho + \alpha y)} = \frac{\beta - \gamma x}{x} \cdot \frac{y}{-\rho + \alpha y}$$

und ist also eine DGL mit getrennten Variablen. Gemäß Typ V in Tabelle 4.6 hat sie die implizit geschriebene Lösung $-\rho \ln(y) + \alpha y - \beta \ln(x) + \gamma x = c$ für $x > 0$, $y > 0$. Durch den *Scharparameter* $c$ erhalten wir ein Phasenporträt zum Modell, ohne dessen Lösungen bestimmt zu haben. Hier ist ein Bild für $\rho = 2$, $\alpha = 3$, $\beta = \gamma = 1$ und $c = 4$, $4.5$, $5$, $5.5$.



**Beispiel 2.** In Abschnitt 6.3 haben wir eine ungedämpfte Schwingung durch die DGL $\ddot{x} = -\omega^2 x$ und deren Lösung $x(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$ beschrieben. Zu dieser DGL 2. Ordnung gehört das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= -\omega^2 x\end{aligned}$$

mit der Lösung $x(t) = a\sin(\omega t + \varphi),\ \ y(t) = \dot{x}(t) = a\omega\cos(\omega t + \varphi)$, vgl. die Bemerkung in Abschnitt 3.3. Der Nullpunkt $(0,0)$ ist der einzige stationäre Punkt. Die Phasen-DGL $y' = \frac{-\omega^2 x}{y}$ hat gemäß Typ V in Tabelle 4.6 die impliziten Lösungen $y^2 + \omega^2 x^2 = c$. Das Phasenporträt besteht also aus konzentrischen Ellipsen um den Nullpunkt, was man natürlich auch an der angegebenen Lösung des Systems ablesen kann.

### Stationäre Punkte und Stabilität

Man interessiert sich für das Verhalten von Lösungen in der Nähe einer stationären Lösung, oder anders gesagt für den Verlauf von Trajektorien in der Nähe eines stationären Punktes.
Wir gehen wieder von dem autonomen System (23) aus und nennen einen stationären Punkt $(\xi,\eta)$ des Systems *stabil*, wenn jede Trajektorie, die in einen gewissen Kreis $K_\delta$ um $(\xi,\eta)$ eingedrungen ist, mit wachsendem $t$ stets in einem Kreis $K_\varepsilon \supset K_\delta$ verbleibt. Genauer definiert man, vgl. [13, Nr. 65.3]:

**Definition.** Ein stationärer Punkt $(\xi,\eta)$ des Systems (23) heißt *stabil*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft gibt: Falls eine Lösung $x(t)$, $y(t)$ die Ungleichung $\big(x(t_1) - \xi\big)^2 + \big(y(t_1) - \eta\big)^2 < \delta^2$ für ein $t = t_1$ erfüllt, so gilt $\big(x(t) - \xi\big)^2 + \big(y(t) - \eta\big)^2 < \varepsilon^2$ für alle $t \geqslant t_1$.
Ein stationärer Punkt $(\xi,\eta)$ des Systems (23) heißt *asymptotisch stabil*, wenn er stabil ist und es ein $r > 0$ mit der folgenden Eigenschaft gibt: Falls eine Lösung $x(t)$, $y(t)$ die Ungleichung $\big(x(t_1) - \xi\big)^2 + \big(y(t_1) - \eta\big)^2 < r^2$ für ein $t = t_1$ erfüllt, so ist $\lim\limits_{t\to\infty}\big(x(t), y(t)\big) = (\xi,\eta)$.
Ein stationärer Punkt $(\xi,\eta)$ des Systems (23) heißt *instabil*, wenn er nicht stabil ist.

Wir betrachten nun ein homogenes lineares System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by\\ \dot{y} &= cx + dy\end{aligned} \tag{25}$$

mit konstanten Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Für die Matrix $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gelte $\det(A) \neq 0$. Dann ist der Punkt $(0,0)$ der einzige stationäre Punkt, und 0 ist kein Eigenwert. Die Eigenwerte der Matrix $A$ sind die Lösungen $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{C}$ der *charakteristischen Gleichung*

$$\lambda^2 - \operatorname{spur}(A)\lambda + \det(A) = 0.$$

In Abhängigkeit von den Eigenwerten erhält man das folgende Ergebnis.

**Satz 18.** 1. *Sei $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$ ein zweifacher reeller Eigenwert. Ist $\lambda > 0$, so ist der stationäre Punkt $(0,0)$ instabil. Ist $\lambda < 0$, so ist der stationäre Punkt $(0,0)$ asymptotisch stabil.*

2. *Seien $\lambda_1,\ \lambda_2$ zwei verschiedene reelle Eigenwerte, die beide dasselbe Vorzeichen haben. Sind $\lambda_1,\ \lambda_2 < 0$, so ist $(0,0)$ asymptotisch stabil. Sind $\lambda_1,\ \lambda_2 > 0$, so ist $(0,0)$ instabil.*

3. *Sind $\lambda_1,\ \lambda_2$ zwei verschiedene reelle Eigenwerte mit unterschiedlichem Vorzeichen, so ist $(0,0)$ instabil.*

4. *Sind $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ rein imaginär, so ist $(0,0)$ stabil.*

5. *Seien $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{C}$ konjugiert komplex und nicht rein imaginär, also $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\neq 0}$. Ist $\alpha < 0$, so ist $(0,0)$ asymptotisch stabil. Ist $\alpha > 0$, so ist $(0,0)$ instabil.*

*Beweis.* Da $\det(A) \neq 0$ ist, sind $b$ und $d$ nicht beide $0$. Sei $b \neq 0$. Wie am Ende des vorherigen Abschnitts ausgeführt, löst man die erste DGL nach $y$ auf und kommt zur DGL

$$(*) \qquad \ddot{x} - \operatorname{spur}(A)\dot{x} + \det(A)x = 0.$$

Deren Lösungen $x(t)$ sind in Satz 11 in Abschnitt 7.5 angegeben. Sie bilden jeweils die erste Komponente der gesuchten Lösungen des Systems. Die zweite Komponente $y(t)$ erhält man dann durch Einsetzen von $x(t)$ in die Gleichung $y(t) = \frac{1}{b}\big(\dot{x}(t) - ax(t)\big)$. Falls $b = 0$ ist, so kann man durch Auflösen der zweiten DGL des Systems nach $x$ jeweils analog schließen.

**Zu 1.** Nach Satz 11 hat die DGL $(*)$ die linear unabhängigen Lösungen $x_1(t) = e^{\lambda t}$ und $x_2(t) = te^{\lambda t}$. Die zweiten Komponenten ergeben sich dann als $y_1(t) = \frac{1}{b}(\lambda - a)e^{\lambda t}$ und $y_2(t) = \frac{1}{b}(1 + \lambda t - at)e^{\lambda t}$. Ist $\lambda > 0$, so gibt es unbeschränkte Lösungen, und der Punkt $(0,0)$ ist also instabil. Ist $\lambda < 0$, so erfüllt die allgemeine Lösung des Systems die Kriterien für asymptotische Stabilität, da die Exponentialfunktion $e^t$ für $t \to \infty$ schneller als $t$ wächst.

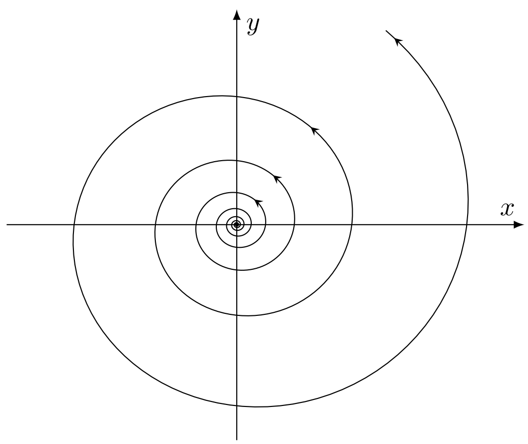
**Zu 2. und 3.** Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig. Sind $\vec{v}_1 \in \mathbb{R}^2$ und $\vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ Eigenvektoren zu $\lambda_1$ und $\lambda_2$, so bilden die Vektoren $\vec{x}(t) = \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}$ und $\vec{y}(t) = \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen für das System (25), denn es ist $\dot{\vec{x}}(t) = \lambda_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} = A\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} = A\vec{x}(t)$, und analog $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$. (Für die Begriffe Eigenwert und Eigenvektor vgl. auch Abschnitt 12.1 unten.) Im 2. Fall schließt man nun analog wie unter 1. Im 3. Fall gibt es unbeschränkte Lösungen, sodass der Punkt $(0,0)$ instabil ist.

**Zu 4. und 5.** Nach Satz 11 hat die DGL $(*)$ die linear unabhängigen Lösungen $x_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ und $x_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$. Die zweite Komponenten $y_1(t)$ und $y_2(t)$ ergibt sich dann jeweils durch Einsetzen von $x_1(t)$ und von $x_2(t)$ in die Gleichung $y(t) = \frac{1}{b}\big(\dot{x}(t) - ax(t)\big)$. Dies ergibt $y_1(t) = \frac{1}{b}\big(\alpha\cos(\beta t) - \beta\sin(\beta t) - a\cos(\beta t)\big)e^{\alpha t}$ und als 2. Komponente von $x_2(t)$ den Ausdruck $y_2(t) = \frac{1}{b}\big(\alpha\sin(\beta t) + \beta\cos(\beta t) - a\sin(\beta t)\big)e^{\alpha t}$. Im 4. Fall ist $\alpha = 0$ und man sieht, dass die allgemeine Lösung stabil ist. Ist $\alpha > 0$, so gibt es unbeschränkte Lösungen, und ist $\alpha < 0$, so kann man analog wie im 1. Fall schließen. □

**Beispiel 3.** Wir betrachten das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \ln(2)x - 2\pi y\\ \dot{y} &= 2\pi x + \ln(2)y\end{aligned}$$

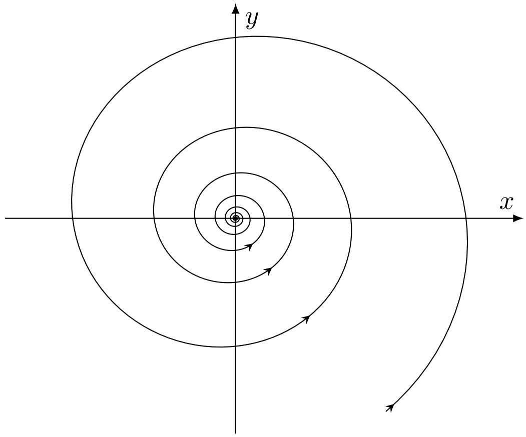
mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $y(0) = 0$. Die charakteristische Gleichung der Matrix $\begin{pmatrix}\ln(2) & -2\pi\\ 2\pi & \ln(2)\end{pmatrix}$ ist $\lambda^2 - 2\ln(2)\lambda + \ln(2)^2 + 4\pi^2 = 0$. Die Eigenwerte sind $\lambda_{1,2} = \ln(2) \pm 2\pi i$. Der stationäre Punkt $(0,0)$ ist daher nach Satz 18.5 instabil.



Im diesem Fall wird stationäre Punkt ein *Strudelpunkt* genannt. Die Lösung der Anfangswertaufgabe ist durch $x(t) = 2^t \cos(2\pi t)$ und $y(t) = 2^t \sin(2\pi t)$ gegeben. Erhöht sich $t$ um 1, so dreht sich die zugehörige Trajektorie durch den Punkt $(1, 0)$ offenbar einmal durch den Ursprung. Gleichzeitig wird der Radius aber durch den Vorfaktor $2^t$ verdoppelt. Die Trajektorie ist eine nach außen gerichtete Spirale.
Um einen stabilen Strudelpunkt zu erhalten, genügt es, einige Vorzeichen zu verändern. Das System lautet dann

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\ln(2)x - 2\pi y\\ \dot{y} &= 2\pi x - \ln(2)y\,.\end{aligned}$$

Die Koeffizientenmatrix hat die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = -\ln(2) \pm 2\pi i$. Der Strudelpunkt ist also nach Satz 18.5 asymptotisch stabil.




Die Spirale geht nach innen. Die Lösung der Anfangswertaufgabe mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $y(0) = 0$ ist nun $x(t) = 2^{-t}\cos(2\pi t)$, $y(t) = 2^{-t}\sin(2\pi t)$. Erhöht sich $t$ um 1, so dreht sich die Kurve einmal um den Ursprung und halbiert währenddessen ihren Radius.

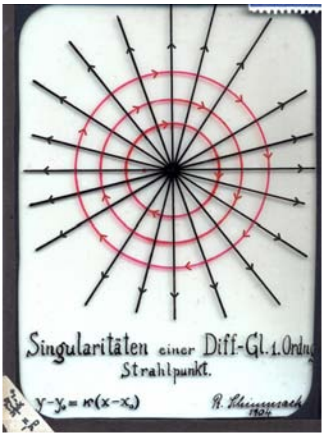
**Bemerkung.** Die Phasen-DGL des Systems (25) hat die Form

$$y' = \frac{dy + cx}{by + ax}.$$

Sie hat als einzige Singularität den Punkt $(0, 0)$, wobei eine Singularität der DGL dadurch definiert ist, dass sie Nullstelle von Zähler und Nenner ist. Der Phasen-DGL ordnen wir wie in Abschnitt 4.7 die Matrix $B := \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$

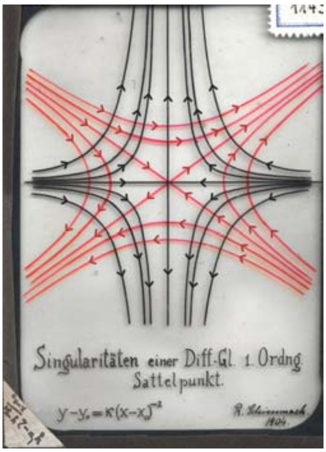
zu. Da $\operatorname{spur}(B) = \operatorname{spur}(A)$ und $\det(B) = \det(A)$ ist, läuft es auf dasselbe hinaus, ob wir den Typ der Singularität der Phasen-DGL oder den Typ des stationären Punktes des Systems bestimmen.

Die drei Dias von R. Schimmack in Abschnitt 4.7 stellen die Phasenporträts zu den Systemen $\begin{array}{l}\dot{x} = x\\ \dot{y} = \alpha y\end{array}$ und $\begin{array}{l}\dot{x} = \alpha y\\ \dot{y} = -x\end{array}$ für $\alpha = 1, 2, -2$ dar. Die dort angegebenen Lösungen sind jeweils die Lösungen der zugehörigen Phasen-DGL. Mit Hilfe der dort erfolgten Bestimmung des jeweiligen Typs der Singularitäten und Satz 18 können wir die stationären Punkte der beiden Systeme auf Stabilität untersuchen.





Strahlpunkt, Scheitelpunkt und Sattelpunkt sind instabil, und der Mittelpunkt der Kreise und Ellipsen ist stabil.



Wir haben hier den Fall $\det(A) = 0$ nicht betrachtet. Berücksichtigt man auch noch diesen Fall, so gibt es insgesamt 14 Typen von Phasenporträts für das System (25), vgl. z. B. [21, Kap. 9, § 9.5 und § 10.3 Beispiel 1].

## 9.5 Aufgaben 37 – 40

**Aufgabe 37.** Man ermittle für $x > 0$ mit Hilfe von Satz 16 die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= -\frac{1}{x(x^2+1)}\, y_1 + \frac{1}{x^2(x^2+1)}\, y_2 + \frac{1}{x} \\ y_2' &= -\frac{x^2}{x^2+1}\, y_1 + \frac{2x^2+1}{x(x^2+1)}\, y_2 + 1\,. \end{aligned}$$

Zunächst ist ein Fundamentalsystem von Lösungen für das zugehörige homogene System mit Hilfe von Satz 17 zu ermitteln und dabei auszunutzen, dass $\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems ist.

**Aufgabe 38.** (Zur Wiederholung) Man löse für $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ die Anfangswertaufgabe

$$y'' + 4\tan(x)y' + (6\tan^2(x) + 3)y = 0$$

mit $y(0) =$ und $y'(0) = 1$. Dabei soll zuerst Satz 9 benutzt werden, um die obige DGL in eine DGL $v'' + qv = 0$ mit einer Konstanten $q$ zu überführen.

**Aufgabe 39.** Man ermittle für $x > 0$ die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= x\, y_2 + x^5\, e^x \\ y_2' &= \frac{8}{x^3}\, y_1 + 4x^3\, e^x\ , \end{aligned}$$

indem zunächst das zugehörige homogene System auf eine Euler-DGL in $y_1$ zurückgeführt wird.

**Aufgabe 40.** Eine radioaktive Substanz mit der Zerfallskonstanten $\lambda_1 > 0$ zerfällt in eine radioaktive Substanz, die dann ihrerseits mit einer Zerfallskonstanten $\lambda_2 > 0$ zerfällt. Dieses Zerfallsverhalten wird durch das System

$$\begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= -\lambda_1 m_1 \\ \frac{dm_2}{dt} &= -\lambda_2 m_2 + \lambda_1 m_1 \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $m_1(0) = M$ und $m_2(0) = 0$ beschrieben, wobei $M$ die Menge der ersten Substanz zu Beginn des Zerfalls sei. Man löse die so entstandene Anfangswertaufgabe.

# 10 Existenz- und Eindeutigkeitssätze

In Abschnitt 4.1 haben wir gesehen, dass die DGL $y' = f(x)g(y)$ stets lösbar ist, wenn die rechte Seite stetig ist. Dies gilt auch allgemein für eine DGL $y' = f(x, y)$. Wir haben aber in der Bemerkung am Schluss des Abschnitts 4.1 gesehen, dass die Anfangswertaufgabe $y' = f(x)g(y)$ mit $y(x_0) = y_0$ nicht immer eindeutig lösbar ist. Hier setzen wir nun eine *Lipschitz-Bedingung* voraus und zeigen den *Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf* für ein explizites DGL-System $\vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y})$ mit der Anfangsbedingung $\vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$. Der Beweis liefert dann auch ein Verfahren zur näherungsweisen Lösung des Systems.
Für die Definition des Systems und seiner Lösung vgl. Abschnitt 3.3. Wir verwenden hier als Norm stets die Maximumnorm

$$\|\vec{v}\,\| := \max(|v_1|, \dots, |v_n|)$$

für einen Vektor $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Menge

$$Q := \{(x, \vec{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |x - \xi| \leqslant a\,,\ \|\vec{y} - \vec{\eta}\,\| \leqslant b\}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, die im Beweis eine zentrale Rolle spielt, ein *Quader mit Mittelpunkt* $(\xi, \vec{\eta})$. Für $n = 1$ stellt der Quader ein Rechteck dar.

## 10.1 Lipschitz-Bedingung

Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $\vec{f}\colon D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion.

RUDOLF LIPSCHITZ
1832-1903

**Definition.** Die Funktion $\vec{f}$ genügt einer *Lipschitz-Bedingung* in $D$, wenn es eine reelle Zahl $L > 0$ gibt so, dass

$$\|\vec{f}(x, \vec{y}) - \vec{f}(x, \vec{z})\| \leqslant L\|\vec{y} - \vec{z}\|$$

für alle $(x, \vec{y})$, $(x, \vec{z}) \in D$ gilt. Die Zahl $L$ heißt *Lipschitz-Konstante.* Man sagt, dass $\vec{f}$ *lokal* einer Lipschitz-Bedingung in $D$ genüge, falls jeder Punkt $(\xi, \vec{\eta}) \in D$ eine Umgebung $U$ besitzt so, dass $\vec{f}$ in $D \cap U$ einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Im letzten Fall hängt die Lipschitz-Konstante dann jeweils von $U$ ab.

**Satz 19.** *Sei $D$ eine offene Menge in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und*

$$\vec{f}\colon D \to \mathbb{R}^n,\ (x, \vec{y}) \mapsto \big(f_1(x, \vec{y}\,), \dots, f_n(x, \vec{y}\,)\big)$$

*bezüglich $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ partiell differenzierbar mit stetigen partiellen Ableitungen. Dann erfüllt $\vec{f}$ lokal eine Lipschitz-Bedingung.*

*Beweis.* Sei $(\xi, \vec{\eta}) \in D$. Da $D$ offen ist, gibt es $a, b > 0$ in $\mathbb{R}$ so, dass der oben definierte Quader $Q$ mit Mittelpunkt $(\xi, \vec{\eta})$ ganz in $D$ liegt. Die partiellen Ableitungen $f_{i,y_k} := \frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ der $i$-ten Komponente von $\vec{f}$ nach der $k$-ten Komponente von $\vec{y}$ sind auf $Q$ durch ein $M \in \mathbb{R}_{>0}$ beschränkt, da $Q$ kompakt ist und die partiellen Ableitungen $f_{i,y_k}$ nach Voraussetzung stetig sind. Seien $(x, \vec{y})$ und $(x, \vec{z})$ in $Q$. Wir definieren für $i \in \{1, \ldots, n\}$ eine Funktion $F\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ als Kompositum $\varphi_i \circ \vec{g}$ mit

$$\vec{g}(t) = \vec{z} + \vec{u}\,t \quad \text{für} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \quad \text{und} \quad \vec{u} := \vec{y} - \vec{z}$$

sowie $\varphi_i(\vec{v}) = f_i(x, \vec{v})$ für $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $(x, \vec{v}) \in Q$. Sei $u_k$ die $k$-te Komponente von $\vec{u}$. Nach der Kettenregel gilt dann

$$\begin{aligned} F'(t) = \varphi_i'(\vec{g}(t))\,\vec{g}\,'(t) &= \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1}(\vec{g}(t)), \ldots, \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n}(\vec{g}(t))\right) \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ \vdots \\ g_n'(t) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \varphi_{i,y_k}(\vec{g}(t))\, g_k'(t) = \sum_{k=1}^{n} f_{i,y_k}(x, \vec{z} + \vec{u}\,t)\, u_k\,. \end{aligned}$$

Nach Definition von $F$ ist $F(1) = f_i(x, \vec{y})$ und $F(0) = f_i(x, \vec{z})$. Es folgt

$$\begin{aligned} |f_i(x, \vec{y}) - f_i(x, \vec{z})| = |F(1) - F(0)| &= \left| \int_0^1 F'(t)\,dt \right| \leqslant \int_0^1 |F'(t)|\,dt \\ &\leqslant M \sum_{k=1}^{n} |u_k| \leqslant M\,n\,\|\vec{u}\| = n\,M\,\|\vec{y} - \vec{z}\|\,. \end{aligned}$$

Daher folgt die Behauptung $\|\vec{f}(x, \vec{y}) - \vec{f}(x, \vec{z})\| \leqslant nM\,\|\vec{y} - \vec{z}\|$. $\square$

## 10.2 Satz von Picard-Lindelöf

Emile Picard
1856-1941

Zu lösen ist das System

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y}\,)$$

$$\text{mit} \quad \vec{y}(\xi) = \vec{\eta}\,.$$

Ernst Lindelöf
1870-1946

**Satz 20.** *Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $n \geqslant 1$, und $\vec{f}\colon D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die lokal eine Lipschitz-Bedingung erfüllt. Dann gibt es zu jedem $(\xi, \vec{\eta}) \in D$ ein $\varepsilon > 0$ und eine eindeutig bestimmte Lösung*

$$\vec{y}\colon [\xi - \varepsilon,\, \xi + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$$

*des Systems $\vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y}\,)$ mit Anfangsbedingung $\vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$.*

Der Beweis geschieht durch Rückführung des Problems auf die Lösung eines Systems von *Integralgleichungen*. Dabei wird komponentenweise integriert.

$$\int_\xi^x \vec{f}\big(t, \vec{y}(t)\big)\, dt := \begin{pmatrix} \int_\xi^x f_1\big(t, \vec{y}(t)\big)\, dt \\ \vdots \\ \int_\xi^x f_n\big(t, \vec{y}(t)\big)\, dt \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

und $f_i\colon D \to \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$.

**Satz 21.** *Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $\vec{f}\colon D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Sei $I$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $\xi \in I$. Ferner sei $\vec{y}\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion mit $(x, \vec{y}(x)) \in D$ für alle $x \in I$. Dann ist $\vec{y}$ genau dann eine Lösung des Systems $\vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y})$ mit der Anfangsbedingung $\vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$, wenn das folgende System von* Integralgleichungen *erfüllt ist:*

$$(\mathfrak{I}) \qquad \vec{y}\,(x) = \vec{\eta} + \int_\xi^x \vec{f}\big(t, \vec{y}(t)\big)\, dt\,.$$

*Beweis.* Sei $\vec{y}\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Systems, und sei die Anfangsbedingung $\vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$ erfüllt. Dann ist $\vec{y}$ differenzierbar mit $\vec{y}\,'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}\,(x))$ für alle $x \in I$, und mit Hilfe des Hauptsatzes in 2.1 folgt

$$\int_\xi^x \vec{f}(t, \vec{y}\,(t))\, dt = \int_\xi^x \vec{y}\,'(t)\, dt = \vec{y}(x) - \vec{y}(\xi) = \vec{y}(x) - \vec{\eta}$$

und damit $(\mathfrak{I})$. Sei umgekehrt das System $(\mathfrak{I})$ erfüllt. Setze $x = \xi$ in $(\mathfrak{I})$ ein. Dann folgt $\vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$, und also ist die Anfangsbedingung erfüllt. Da die Funktion $t \mapsto \vec{f}(t, \vec{y}\,(t))$ stetig für alle $t \in I$ ist, folgt aus dem Hauptsatz

$$\frac{d}{dx} \int_\xi^x \vec{f}(t, \vec{y}\,(t))\, dt = \vec{f}(x, \vec{y}(x))$$

Also ist $\vec{y}$ differenzierbar, und nach $(\mathfrak{I})$ folgt $\vec{y}\,'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}(x))$. □

Das System $(\mathfrak{I})$ von Integralgleichungen ist nicht so ohne Weiteres zu lösen, weil unter dem Integralzeichen die unbekannte Funktion steht.

Um das System $(\mathfrak{I})$ zu lösen, benutzen wir das *Picard-Iterationsverfahren* und konstruieren eine Folge $\vec{z}_k$ , $k \in \mathbb{N}$ , wobei $\vec{z}_1(x) = \vec{\eta}$ konstant ist und

$$(\mathcal{P}) \qquad \vec{z}_{k+1}(x) = \vec{\eta} + \int_\xi^x \vec{f}\big(t, \vec{z}_k(t)\big)\, dt$$

gilt. Ziel ist es zu zeigen, dass diese Folge gegen eine Lösung des Systems $\vec{y}\,'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}(x))$ konvergiert. Zunächst ist aber zu zeigen, dass die Integrale in $(\mathcal{P})$ alle existieren.

**Lemma 1.** *Sei $D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ offen, $(\xi, \vec{\eta}) \in D$ und $\vec{f}\colon D \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gibt es $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass der Quader*

$$Q = \{(x, \vec{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |x - \xi| \leqslant a\,,\ \|\vec{y} - \vec{\eta}\,\| \leqslant b\}$$

*ganz in $D$ liegt, und ein $M \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass $\|\vec{f}(x, \vec{y})\| \leqslant M$ für alle $(x, \vec{y}) \in Q$ gilt.*

*Beweis.* Da $D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ offen ist und $(\xi, \vec{\eta}) \in D$ gilt, folgt die erste Behauptung. Da $Q$ kompakt und $\vec{f}\colon D \to \mathbb{R}^n$ stetig ist, ist $\vec{f}$ auf $Q$ beschränkt, und es folgt die zweite Behauptung. □

Wir setzen $\boxed{\varepsilon := \min\Big(a, \dfrac{b}{M}\Big)}$ und $\boxed{I_0 := [\xi - \varepsilon,\ \xi + \varepsilon]}$.

**Lemma 2.** *Es gilt $(x, \vec{z}_k(x)) \in Q$ für jedes $x \in I_0$ und alle $k \in \mathbb{N}$ .*

*Beweis.* Für $x \in I_0$ ist $|x - \xi| \leqslant a$ . Wir zeigen $\|\vec{z}_k(x) - \vec{\eta}\,\| \leqslant b$ durch Induktion nach $k$. Dies ist für $k = 1$ trivial, da $\vec{z}_1(x) = \vec{\eta}$ konstant ist. Gilt nun die Aussage schon für $k$ , so folgt $(t, \vec{z}_k(t)) \in Q$ für alle $t \in I_0$ und also $\|\vec{f}(t, \vec{z}_k(t))\| \leqslant M$ . Nach Definition von $\vec{z}_{k+1}(x)$ folgt nun $\|\vec{z}_{k+1}(x) - \vec{\eta}\| = \|\int_\xi^x \vec{f}\big(t, \vec{z}_k(t)\big)\, dt\| \leqslant \left|\int_\xi^x \|\vec{f}\big(t, \vec{z}_k(t)\big)\|\, dt\right| \leqslant M\,|x - \xi| \leqslant M\varepsilon \leqslant b\,.$ □

Damit ist die Funktionenfolge in $(\mathcal{P})$ auf $Q$ für $x \in I_0$ definiert. Im nächsten Abschnitt zeigen wir, dass die Folge gleichmäßig konvergiert und beweisen Satz 20.

## 10.3 Konvergenz der Picard-Iteration

Die Bezeichnungen seien wie im vorherigen Abschnitt. Nach Voraussetzung in Satz 20 erfüllt $\vec{f}\colon D \to \mathbb{R}^n$ lokal eine Lipschitz-Bedingung. Wir können den Quader $Q$ so klein wählen, dass die Lipschitz-Bedingung

$$\|\vec{f}(x, \vec{y}) - \vec{f}(x, \vec{y}_0)\| \leqslant L\|\vec{y} - \vec{y}_0\|$$

für alle $\vec{y}$, $\vec{y}_0 \in Q$ mit nur einer Lipschitz-Konstanten $L \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt.

**Lemma 3.** *Für $x \in I_0$ ist* $\|\vec{z}_{k+1}(x) - \vec{z}_k(x)\| \leqslant M\, L^{k-1}\, \frac{|x-\xi\,|^k}{k!}$ .

*Beweis.* Für $k = 1$ ist die Behauptung richtig wegen $\|\vec{z}_2(x) - \vec{z}_1(x)\| = \|\int_\xi^x \vec{f}(t,\vec{\eta})\,dt\| \leqslant \left|\int_\xi^x \|\vec{f}(t,\vec{\eta})\|\,dt\right| \leqslant M\;|x-\xi|$ .
Induktionsschritt $k \to k+1$:

$$\begin{aligned}
\|\vec{z}_{k+2}(x) - \vec{z}_{k+1}(x)\| &= \|\int_\xi^x \big(\vec{f}(t,\vec{z}_{k+1}(t)) - \vec{f}(t,\vec{z}_k(t))\big)\,dt\| \\
&\leqslant \Big|\int_\xi^x \|\vec{f}(t,\vec{z}_{k+1}(t)) - \vec{f}(t,\vec{z}_k(t))\|\,dt\Big| \\
&\leqslant \Big|\int_\xi^x L\|\vec{z}_{k+1}(t) - \vec{z}_k(t)\|\,dt\Big| \\
&\underset{\text{I.V.}}{\leqslant} M\,L^k \left|\int_\xi^x \frac{|t-\xi\,|^k}{k!}\,dt\right| \\
&= M\,L^k\,\frac{|x-\xi\,|^{k+1}}{(k+1)!}\,.
\end{aligned}$$

□

**Lemma 4.** *Die Folge $(\vec{z}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $\vec{z}\colon I_0 \to \mathbb{R}^n$, und es ist $(x,\vec{z}(x)) \in Q$ für jedes $x \in I_0$.*

*Beweis.* Es ist $\vec{z}_1 = \vec{\eta}\,$, $\vec{z}_2 = \vec{\eta} + (\vec{z}_2 - \vec{z}_1)\,$, $\vec{z}_3 = \vec{\eta} + (\vec{z}_2 - \vec{z}_1) + (\vec{z}_3 - \vec{z}_2)\,$, $\vec{z}_4 = \vec{\eta} + (\vec{z}_2 - \vec{z}_1) + (\vec{z}_3 - \vec{z}_2) + (\vec{z}_4 - \vec{z}_3)\,$, .... Wir schreiben daher die Folge $(\vec{z}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ als unendliche Reihe $\vec{\eta} + \sum_{k=2}^\infty (\vec{z}_k - \vec{z}_{k-1})$ und haben zu zeigen, dass die Reihe auf $I_0$ gleichmäßig konvergiert. Nach Lemma 3 gilt:

$$\|\vec{z}_k(x) - \vec{z}_{k-1}(x)\| \leqslant M\,L^{k-2}\,\frac{|x-\xi\,|^{k-1}}{(k-1)!} \leqslant M\,L^{k-2}\,\frac{\varepsilon^{\,k-1}}{(k-1)!}$$

wobei $|x-\xi| \leqslant \varepsilon$ für alle $x \in I_0$ nach Definition von $\varepsilon$ und $I_0$ gilt. Die Reihe $\sum_{k=2}^\infty\big(\vec{z}_k - \vec{z}_{k-1}\big)$ besitzt daher die konvergente Majorante

$$M\,L^{-1}\sum_{k=2}^\infty \frac{(L\varepsilon)^{k-1}}{(k-1)!}$$

und konvergiert also gleichmäßig. Mit $\vec{z} := \lim\limits_{k\to\infty} \vec{z}_k = \vec{\eta} + \sum_{k=2}^\infty (\vec{z}_k - \vec{z}_{k-1})$ folgt die erste Behauptung. Sei $x \in I_0$. Aus Lemma 2 folgt $\|\vec{z}_k(x) - \vec{\eta}\,\| \leqslant b$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es ist zu zeigen, dass $\|\vec{z}(x) - \vec{\eta}\,\| \leqslant b$ für den Grenzwert $\vec{z}(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \vec{z}_k(x)$ gilt. Zu jedem $\varepsilon_1 > 0$ gibt es eine Zahl $N = N(\varepsilon_1) \in \mathbb{N}$ so, dass $\|\vec{z}(x) - \vec{z}_k(x)\| < \varepsilon_1$ für alle $k \geqslant N$ gilt. Es folgt

$$\begin{aligned}
\|\vec{z}(x) - \vec{\eta}\,\| &= \|\vec{z}(x) - \vec{z}_k(x) + \vec{z}_k(x) - \vec{\eta}\,\| \\
&\leqslant \|\vec{z}(x) - \vec{z}_k(x)\| + \|\vec{z}_k(x) - \vec{\eta}\,\| < \varepsilon_1 + b
\end{aligned}$$

Also gilt $\alpha := \|\vec{z}(x) - \vec{\eta}\| < \varepsilon_1 + b$ für jedes $\varepsilon_1 > 0$. Wäre $\alpha > b$, so gäbe es den Widerspruch $\alpha - b < \varepsilon_1 := \frac{\alpha - b}{2}$. $\square$

### Nachweis der Existenz in Satz 20

Nach Lemma 4 konvergiert die $(\vec{z}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $\vec{z}\colon I \to \mathbb{R}^n$.
Wir zeigen zunächst, dass die Folge $(\vec{f}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\vec{f}_k(x) = \vec{f}(x, \vec{z}_k(x))$ für $x \in I_0$ gleichmäßig gegen $\vec{f}(x, \vec{z}(x))$ konvergiert. Sei $\varepsilon_1 > 0$ vorgegeben.
Da die Folge $(\vec{z}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|\vec{z}_k(x) - \vec{z}(x)\| < \frac{\varepsilon_1}{L}$ für alle $x \in I_0$ und alle $k \geqslant N$.
Es folgt $\|\vec{f}(x, \vec{z}_k(x)) - \vec{f}(x, \vec{z}(x))\| \leqslant L\,\|\vec{z}_k(x) - \vec{z}(x)\| < L\frac{\varepsilon_1}{L} = \varepsilon_1$ für alle $x \in I_0$ und alle $k \geqslant N$.
Die gleichmäßige Konvergenz sichert, dass Integral und Limes vertauschbar sind. Hieraus folgt, dass $\vec{z}$ eine Lösung des Systems $(\mathfrak{I})$ von Integralgleichungen ist:

$$\begin{aligned}\vec{z}(x) &= \lim_{k\to\infty} \vec{z}_{k+1}(x) \overset{\text{Def.}}{=} \lim_{k\to\infty}\left(\vec{\eta} + \int_\xi^x \vec{f}\big(t, \vec{z}_k(t)\big)\,dt\right)\\ &= \vec{\eta} + \int_\xi^x \lim_{k\to\infty} \vec{f}\big(t, \vec{z}_k(t)\big)\,dt = \vec{\eta} + \int_\xi^x \vec{f}\big(t, \vec{z}(t)\big)\,dt\,.\end{aligned}$$

Nach Satz 21 folgt $\vec{z}\,'(x) = \vec{f}(x, \vec{z}(x))$ und $\vec{z}(\xi) = \vec{\eta}$. Damit ist die Existenz einer Lösung bewiesen.

### Beispiel zur Picard-Iteration

Man löse die Anfangswertaufgabe $y' = 2xy$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$. Es ist $z_1(x) = 1$ konstant. Ferner ist $\vec{z}_{k+1}(x) = 1 + 2\int_0^x t\, z_k(t)\,dt$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es folgt $z_2(x) = 1 + 2\int_0^x t \cdot 1\,dt = 1 + x^2$,
$z_3(x) = 1 + 2\int_0^x t\,(1 + t^2)\,dt = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2}$,
$z_4(x) = 1 + 2\int_0^x t\,(1 + t^2 + \frac{t^4}{2})\,dt = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!}$.
Induktion ergibt $z_{k+1}(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{k!}$, also

$$z(x) = \lim_{k\to\infty} z_k(x) = e^{x^2},$$

und das ist in diesem Fall auch die Lösung in geschlossener Form der Anfangswertaufgabe.

### Fehlerabschätzung für die Picard-Iteration

Was macht man für einen Fehler, wenn man eine Lösung $\vec{y}\colon I \to \mathbb{R}$ der Anfangswertaufgabe durch die iterierte Funktion $\vec{z}_k$ mit

$$\vec{z}_k(x) := \vec{\eta} + \int_\xi^x \vec{f}\big(t, \vec{z}_{k-1}(t)\big)\, dt$$

für $k \geqslant 2$ ersetzt?

**Lemma 5.** *Für $x \in I_0$ und $k \in \mathbb{N}$ ist* $\|\vec{y}(x) - \vec{z}_k(x)\| \leqslant M\, L^{k-1}\, \frac{\varepsilon^k}{k!}$ .

*Beweis.* Da $|\xi - x| \leqslant \varepsilon$ gilt, genügt es, die Beh. mit $|\xi - x|$ statt mit $\varepsilon$ zu zeigen. Für $k = 1$ ist dies richtig, da $\vec{y}$ Lösung des Systems $(\mathfrak{I})$ nach Satz 21 ist, und dann gilt:

$$\begin{aligned}\|\vec{y}(x) - \vec{z}_1(x)\| &= \|\vec{\eta} + \int_\xi^x \vec{f}(t, \vec{y}(t))\, dt - \vec{\eta}\,\| = \|\int_\xi^x \vec{f}(t, \vec{y}(t))\, dt\,\| \\ &\leqslant \Big|\int_\xi^x \|\vec{f}(t, \vec{y}(t))\|\, dt\Big| \leqslant M\ |x - \xi|\ .\end{aligned}$$

Induktionsschritt $k \to k+1$:

$$\begin{aligned}\|\vec{y}(x) - \vec{z}_{k+1}(x)\| &= \|\int_\xi^x \big(\vec{f}(t, \vec{y}(t)) - \vec{f}(t, \vec{z}_k(t))\big)\, dt\| \\ &\leqslant \Big|\int_\xi^x \|\vec{f}(t, \vec{y}(t)) - \vec{f}(t, \vec{z}_k(t))\|\, dt\Big| \\ &\leqslant \Big|\int_\xi^x L\|\vec{y}(t) - \vec{z}_k(t)\|\, dt\Big| \underset{\text{I.V.}}{\leqslant} M\, L^k\, \Big|\int_\xi^x \frac{|t-\xi\,|^k}{k!}\, dt\Big| \\ &= M\, L^k\, \frac{|x-\xi\,|^{k+1}}{(k+1)!}\ .\end{aligned}$$

□

Nach Lemma 5 erhält man die *Fehlerabschätzung*

$$\|\vec{y}(x) - \vec{z}_k(x)\| \leqslant M\, L^{k-1}\, \frac{\varepsilon^k}{k!}$$

für alle $x \in I_0 = [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$ .

### Nachweis der Eindeutigkeit in Satz 20

Es ist $\vec{z} = \lim\limits_{k\to\infty} \vec{z}_k$ eine Lösung der Anfangswertaufgabe. Sei $\vec{y}\colon I_0 \to \mathbb{R}^n$ eine weitere Lösung mit $\vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$. Wie aus Lemma 5 folgt, ist die Reihe $\sum_{k=2}^\infty \big(\vec{y}(x) - \vec{z}_k(x)\big)$ gleichmäßig konvergent. Die Folge $\big(\vec{y}(x) - \vec{z}_k(x)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ ist also eine Nullfolge. Es folgt $\vec{y}(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \vec{z}_k(x) = \vec{z}(x)$ für alle $x \in I_0$ .

## 10.4 Eindeutigkeitssatz

Die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage in Satz 20 bezieht sich nur auf ein kleines Intervall um $\xi$ und eine offene Menge $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Wir zeigen hier nun den folgenden allgemeinen Eindeutigkeitssatz. Der Beweis orientiert sich an [5, III, Satz 5].

**Satz 22.** *Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Die Funktion $\vec{f}\colon D \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und erfülle lokal eine Lipschitz-Bedingung. Ferner seien $\vec{y}\,,\ \vec{z}\colon I \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen des DGL-Systems $\vec{y}\,' = \vec{f}(x,\vec{y})$ auf einem Intervall $I$ in $\mathbb{R}$. Wenn es ein $\xi \in I$ gibt mit $\vec{y}(\xi) = \vec{z}(\xi)$, so gilt $\vec{y}(x) = \vec{z}(x)$ für alle $x \in I$.*

*Beweis.* Angenommen, es gilt $\vec{y}(x) \neq \vec{z}(x)$ für mindestens ein $x \in I$. Wir überlegen uns zunächst, dass es dann einen Punkt $x_1 \in I$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

1. Es ist $\vec{y}(x_1) = \vec{z}(x_1)$.
2. In jeder Umgebung von $x_1$ gibt es mindestens einen Punkt $x \in I$ mit $\vec{y}(x) \neq \vec{z}(x)$.

Nach Voraussetzung und Annahme ist die Menge

$$B := \{x \in I \mid \vec{y}\big|_{I_x} = \vec{z}\big|_{I_x}\} \text{ mit } I_\xi = \{\xi\} \text{ und } I_x = \begin{cases} [\xi, x] & \text{falls } x > \xi\,, \\ [x, \xi] & \text{falls } x < \xi \end{cases}$$

eine nicht-leere echte Teilmenge von $I$. Ist das Supremum $\sup(B)$ kleiner als das rechte Intervallende von $I$, so setzen wir $x_1 = \sup(B)$; andernfalls ist das Infimum $\inf(B)$ größer als das linke Intervallende von $I$, da $\vec{y}$ und $\vec{z}$ stetig sind. Es sei dann $x_1 = \inf(B)$, und 2. ist erfüllt. Da $\vec{y}$ und $\vec{z}$ stetig sind, ist auch 1. erfüllt.

Für genügend kleines $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ist die Menge $I_r := \{x \in I \mid |x - x_1| \leqslant r\}$ ein kompaktes Intervall und

$$(*) \qquad m_r := \max_{x \in I_r} \|\vec{y}(x) - \vec{z}(x)\|$$

positiv. Es ist $\vec{y}(x) - \vec{z}(x) = \int\limits_{x_1}^{x} \big(\vec{f}(t, \vec{y}(t)) - \vec{f}(t, \vec{z}(t))\big) dt$ nach Satz 21.

Ist $r$ genügend klein, gibt es eine Lipschitzkonstante $L$ so, dass folgt:

$$\begin{aligned} \|\vec{y}(x) - \vec{z}(x)\| &\leqslant \Big| \int_{x_1}^{x} \|\vec{f}(t, \vec{y}(t)) - \vec{f}(t, \vec{z}(t))\|\, dt \Big| \\ &\leqslant L \Big| \int_{x_1}^{x} \|\vec{y}(t) - \vec{z}(t)\|\, dt \Big| \\ &\leqslant L \cdot m_r \cdot |x - x_1| \leqslant L \cdot m_r \cdot r\,. \end{aligned}$$

Setzen wir hierin ein $x$ ein, das das Maximum in $(*)$ erreicht, dann folgt $m_r \leqslant L \cdot m_r \cdot r$ und also $1 \leqslant Lr$. Dies ist für hinreichend kleine $r$ falsch, und wir haben einen Widerspruch. □

**Folgerung.** Wenn $\vec{f}\colon D \to \mathbb{R}^n$ stetig ist und lokal eine Lipschitzbedingung erfüllt, so ist die Lösung $\vec{y}\colon I \to \mathbb{R}^n$ einer Anfangswertaufgabe $\vec{y}\,' = \vec{f}(x,\vec{y})$ mit $\vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$ stets eindeutig.

## 10.5 Fortsetzung von Lösungen

Sei $D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ offen, $n \geqslant 1$ , und $\vec{f}\colon D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die lokal eine Lipschitz-Bedingung erfüllt. Wir betrachten die Anfangswertaufgabe

$$(*) \qquad \vec{y}\,' = \vec{f}(x,\vec{y}\,) \quad \text{mit} \quad \vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$$

Nach Satz 20 von Picard-Lindelöf besitzt $(*)$ eine eindeutig bestimmte Lösung $\vec{y}\colon [\xi-\varepsilon,\, \xi+\varepsilon] \to \mathbb{R}^n$. Diese Lösung lässt sich stets zu einer *maximalen Lösung* fortsetzen:

**Satz 23.** *Es gibt ein Intervall $I_{\max} \subset \mathbb{R}$ und genau eine Lösung*

$$\vec{y}\colon I_{\max} \to \mathbb{R}^n$$

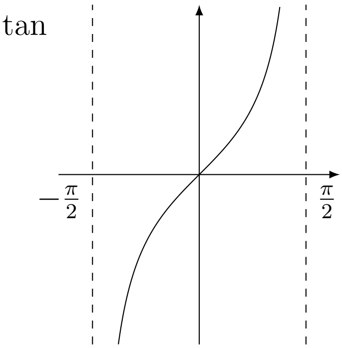
*von $(*)$ so, dass für jede Lösung $\vec{y_I}: I \to \mathbb{R}^n$ gilt: $I \subset I_{\max}$ und $\vec{y}_I = \vec{y}_{|I}$. Das Lösungsintervall $I_{\max}$ ist offen.*

*Beweis.* Sei $\mathcal{L}$ die Menge aller Intervalle $I$ in $\mathbb{R}$, die $\xi$ enthalten und auf denen es eine Lösung $\vec{y}_I: I \to \mathbb{R}^n$ von $(*)$ gibt. Wir setzen $I_{\max} := \bigcup_{I\in\mathcal{L}} I$ . Dann ist $I_{\max}$ ein Intervall, das $\xi$ enthält. Sei $\vec{y}\colon I_{\max} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $\vec{y}(x) = \vec{y}_I(x)$ für $x \in I$ mit $I \in \mathcal{L}$. Dann ist $\vec{y}$ wohldefiniert, denn ist $x \in J := I_1 \cap I_2$ für $I_1, I_2 \in \mathcal{L}$, so ist $\vec{y}_{I_1}(x) = \vec{y}_{I_2}(x)$, da $\vec{y}_{I_1}|_J = \vec{y}_{I_2}|_J$ nach Satz 22 gilt. Offensichtlich ist $\vec{y}$ eine Lösung von $(*)$.
Angenommen: $I_{\max}$ ist nicht offen, und $b \in I_{\max}$ ist ein rechter Randpunkt. Setze $\vec{y}(b) = \vec{\eta}_0$ . Dann ist $\vec{y}\colon I_{\max} \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $\vec{y}\,' = \vec{f}(x,\vec{y}\,)$ mit $\vec{y}(b) = \vec{\eta}_0$ und daher eindeutig auf einem Intervall $[b, b+\varepsilon]$ lösbar, das nicht in $I_{\max}$ liegt, was ein Widerspruch ist. Enthält $I_{\max}$ einen linken Randpunkt, so schließe analog.
Die Eindeutigkeit der Lösung $\vec{y}$ folgt aus Satz 22. □

Die Lösung $\vec{y}\colon I_{\max} \to \mathbb{R}^n$ aus dem Fortsetzungssatz heißt *maximale Lösung* der vorgegebenen Anfangswertaufgabe, und das Intervall $I_{\max} \subset \mathbb{R}$ heißt *maximales Lösungsintervall*

### Verlauf von Lösungskurven

Das Intervall $I_{\max}$ kann nach Satz 23 die Form $]a,\infty[$, $]a,b[$, $]-\infty,b[$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ oder $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$ haben.
Wir studieren nun vier Beispiele im Fall $n=1$. Dabei ist die DGL stets vom Typ VI in der Tabelle 4.6 und also von der Form $y'=f(y)$. Ferner ist $f\colon D\to\mathbb{R}$ partiell differenzierbar mit stetiger Ableitung und $D$ offen. Also genügt $f$ lokal einer Lipschitzbedingung. Damit sind dann die Voraussetzungen von Satz 23 für die folgenden vier Beispiele erfüllt. In den ersten drei Fällen ist $D=\mathbb{R}^2$.

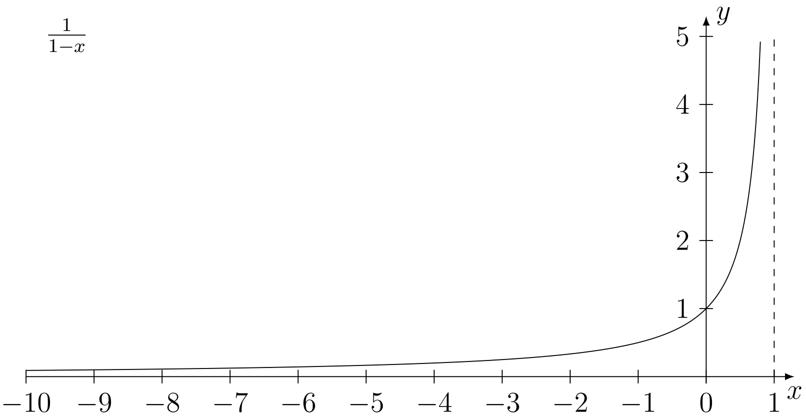



**1.** Gegeben sei die Anfangswertaufgabe $y'=1+y^2$ mit $y(0)=0$.

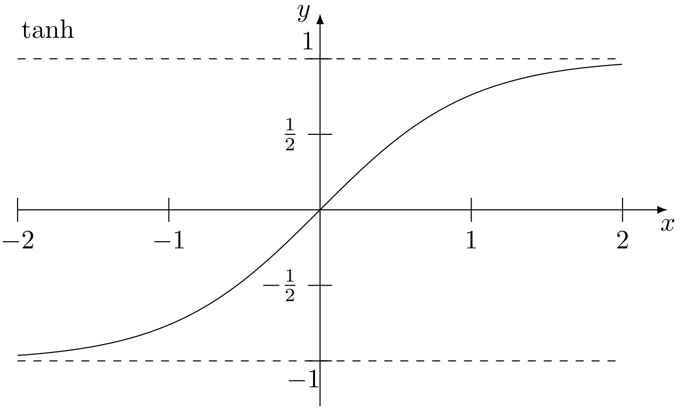
Löse die Gleichung $\int_0^y \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x dt$ nach $y$ auf.
Dann folgt $\arctan(y) = x$ und also $y(x)=\tan(x)$.

Es ist $I_{\max}=]a,b[\,=\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ und $\lim\limits_{x\nearrow b}|y(x)|=\infty$.

**2.** Man löse die Anfangswertaufgabe $y'=y^2$ mit $y(0)=1$ und bestimme $I_{\max}$. Aus $\int_1^y \frac{1}{t^2}\,dt=\int_0^x dt$ folgt $-\frac{1}{t}\big|_1^y=x$ und also $-\frac{1}{y}+1=x$, woraus $y-yx=1$ und $y(x)=\frac{1}{1-x}$ mit $I_{\max}=]-\infty,1[$ folgt.




**3.** Man löse die Anfangswertaufgabe $y'=1-y^2$ mit $y(0)=0$ und bestimme $I_{\max}$. Aus $\int_0^y \frac{1}{1-t^2}\,dt=\int_0^x dt$ folgt $\operatorname{artanh}(t)\big|_0^y=x$ und also $\operatorname{artanh}(y)=x$, woraus $y(x)=\tanh(x)$ mit $I_{\max}=]-\infty,\infty[$ folgt.

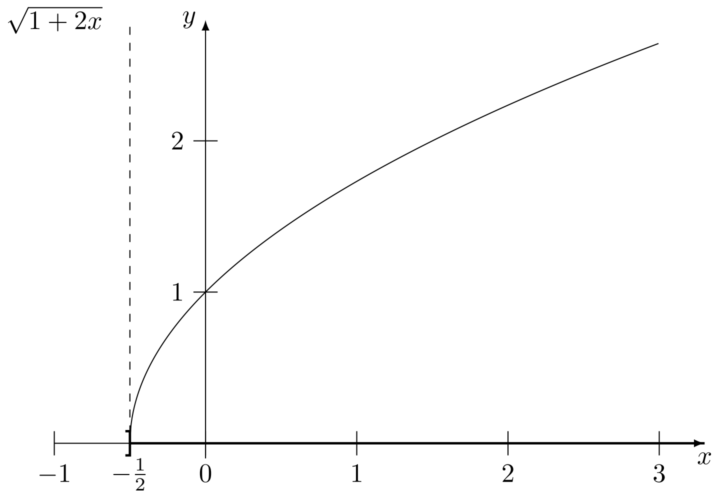



**Probe.** $y = \tanh(x) \Longrightarrow y' = \frac{1}{\cosh^2(x)} = \frac{\cosh^2(x)-\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1 - \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x) = 1 - y^2$ .

(Es ist $\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ und $\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$)

**4.** Man löse die Anfangswertaufgabe $y' = \frac{1}{y}$ mit $y(0) = 1$ und bestimme $I_{\max}$ . Hier ist $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ . Es ist $\int_1^y t\,dt = \int_0^x dt$ , also $\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} = x$ . Es folgt $y(x) = \sqrt{1+2x}$ und $I_{\max} = \left]-\frac{1}{2}, \infty\right[$.

Ferner ist $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} (x, y(x)) = (-\frac{1}{2}, 0)$ . Der Punkt $(-\frac{1}{2}, 0) \in \mathbb{R}^2$ liegt also auf dem *Rand* $\mathbb{R} \times \{0\}$ von $D$ .



## 10.6 Anwendung auf eine DGL $n$-ter Ordnung

Wir betrachten eine explizite DGL der Ordnung $n$, also eine DGL der Form

$$(*) \qquad y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

wobei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einer Menge $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sei. Eine *Lösung* von $(*)$ ist eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte $n$-mal differenzierbare Funktion $y\colon I \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

(a) Es ist $(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \in D$ für alle $x \in I$.

(b) Es gilt $f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) = y^{(n)}(x)$ für alle $x \in I$.

**Satz 24.** *Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, und sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Ferner sei $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n) \in D$. Dann hat die DGL $(*)$ genau eine Lösung $y\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \ni \xi$, welche die folgenden Anfangsbedingungen erfüllt:*

$$y(\xi) = \eta_1,\ y'(\xi) = \eta_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(\xi) = \eta_n\,.$$

*Beweis.* Wir schreiben die DGL gemäß Abschnitt 3.3 als ein System

$$(26) \qquad \vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y}) \quad \text{mit} \quad \vec{f}\colon D \to \mathbb{R}^n,\ (x, \vec{y}\,) \mapsto (y_2, \ldots, y_n, f(x, \vec{y}))$$

mit der Anfangsbedingung $\vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$. Dieses System hat nach Satz 20 und Satz 23 eine eindeutig bestimmte Lösung

$$\vec{y}\colon I \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto (y_1(x), \ldots, y_n(x))$$

mit $\vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$. Dann ist $y\colon I \to \mathbb{R}, x \mapsto y_1(x)$ die gesuchte Lösung. □

## 10.7 Numerische Lösungsverfahren

Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ offen, und sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die lokal eine Lipschitz-Bedingung erfüllt. Ferner sei $(x_0, y_0) \in D$. Nach Satz 24 für $n = 1$ hat dann die Anfangswertaufgabe

$$(1) \qquad y' = f(x, y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0$$

genau eine Lösung. Häufig kann man aber die Lösung nicht in geschlossener Form angegeben, wie es z. B. bei der Riccati-DGL $y' = x^2 + y^2$ der Fall ist. Um die Lösung zu bestimmen, ist man dann auf Näherungsverfahren angewiesen. Dazu gehören Lösungsverfahren mittels Potenzreihenansätzen, die Picard-Iteration und *numerische Verfahren.*

Sei $y\colon I \to \mathbb{R}$ die Lösung von (1), wobei $I$ das maximale Lösungsintervall sei. Wir wählen ein Teilintervall $I_0 := [x_0, b]$ von $I$ und unterteilen dieses in $m$ gleiche Teile mit der *Schrittweite*

$$h := \frac{b - x_0}{m}$$

und den *Stützstellen* $x_k = x_0 + kh$ für $k = 0, \ldots, m$. Dabei ist $x_m = b$, und es gilt $x_{k+1} = x_k + h$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es also für jedes $k = 0, \ldots, m-1$ ein $\xi_k \in \,]x_k, x_{k+1}[$ so, dass $y(x_{k+1}) = y(x_k) + h\,y'(\xi_k)$ gilt. Da $y$ die Lösung von (1) ist, gilt $y'(\xi_k) = f\big(\xi_k, y(\xi_k)\big)$ und wir erhalten $y(x_{k+1}) = y(x_k) + h\,f\big(\xi_k, y(\xi_k)\big)$.
Um zu einem Näherungsverfahren zu gelangen, ersetzen wir hierin die unbekannten Werte $y(x_1), \ldots, y(x_m)$ durch Näherungswerte $y_1, \ldots, y_m$ und die unbekannten Steigungen $f\big(\xi_k, y(\xi_k)\big)$ durch Näherungswerte $N(x_k, y_k, h)$, die nur von $x_k$, $y_k$ und $h$ abhängen. Dies ergibt die Verfahrensformel

$$(2) \qquad y_{k+1} = y_k + h\,N(x_k, y_k, h) \quad \text{für } \; k = 0, \ldots, m-1\,.$$

Es handelt sich hierbei um ein *Einschrittverfahren*, da man zur Berechnung von $y_{k+1}$ nur den vorherigen Wert $y_k$ verwendet.

### Euler-Cauchy-Verfahren

Bei diesem Verfahren wird $N(x_k, y_k, h) := f(x_k, y_k)$ gesetzt und die Verfahrensformel (2) lautet

$$y_{k+1} = y_k + h\,f(x_k, y_k) \quad \text{für } \; k = 0, \ldots, m-1\,.$$

Die Lösungskurve wird hierbei durch einen Polygonzug angenähert, denn man legt jeweils an den Punkt $(x_k, y_k)$ eine Gerade mit der durch (1) gegebenen Steigung $f(x_k, y_k)$.

### Vierstufiges Runge-Kutta-Verfahren

Bei diesem Verfahren wird noch eine weitere Stützstelle $x_k + \frac{1}{2}h$ sowie das gewichtete Mittel aus vier Funktionswerten von $f$ benutzt. Man setzt $N(x_k, y_k, h) := \frac{1}{6}\Big(K_{k1} + 2K_{k2} + 2K_{k3} + K_{k4}\Big)$ mit $K_{k1} = h\,f(x_k, y_k)$ und $K_{k2} = h\,f\big(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_{k1}\big)$ sowie $K_{k3} = h\,f\big(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_{k2}\big)$ und $K_{k4} = h\,f\big(x_k + h, y_k + hK_{k3}\big)$. Damit ergibt sich nach (2) die Verfahrensformel

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}\Big(K_{k1} + 2K_{k2} + 2K_{k3} + K_{k4}\Big)$$

Das Runge-Kutta-Verfahren orientiert sich an Verfahren der numerischen Integration, wie z. B. die *Keplersche Fass-Regel*, vgl. [13, 3 Aufgabe 12].

Das Polygonzug-Verfahren geht auf Euler zurück, und Cauchy hat damit als erster einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz bewiesen, vgl. [13, S. 147ff]. Der Rechenaufwand ist beim Runge-Kutta-Verfahren viermal so groß wie beim Euler-Cauchy-Verfahren, aber man erhält genauere Ergebnisse. Für beide Verfahren gilt: Je kleiner die Schrittweite ist, desto besser wird die Annäherung an die Lösung.

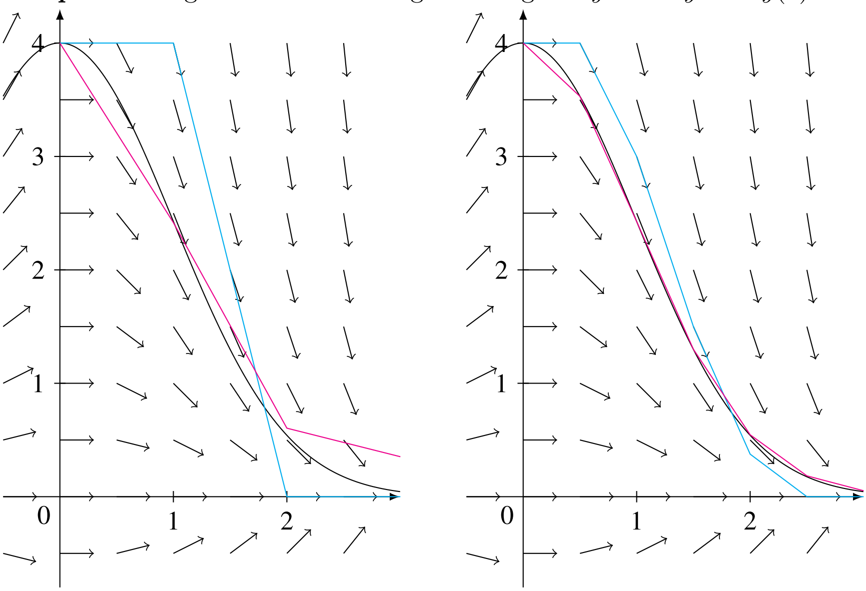
A. L. Cauchy 1789-1857

L. Euler 1707-1783

C. Runge 1856-1927

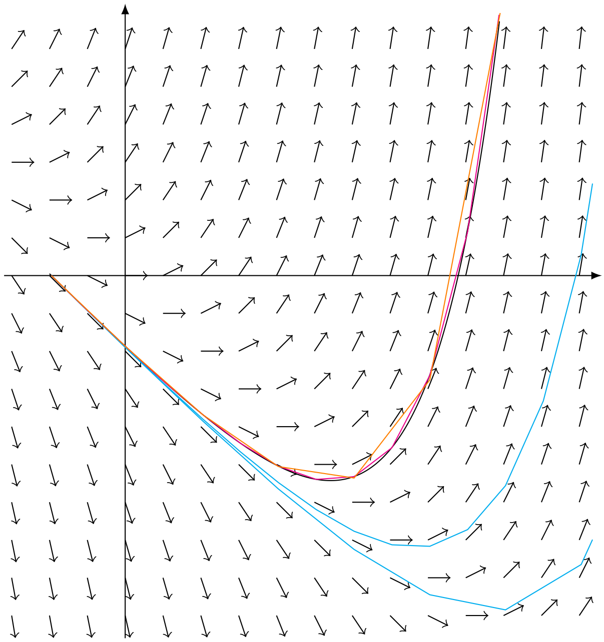
M. Kutta 1867-1944

**Beispiel 1.** Gegeben sei die Anfangswertaufgabe $y' = -xy$ mit $y(0) = 4$.




Die exakte Lösung $y(x) = 4\,e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ist schwarz eingezeichnet. Die Lösungen nach dem Euler-Cauchy-Verfahren sind blau und die nach dem Runge-Kutta-Verfahren rot eingezeichnet, links mit Schrittweite 1 und rechts mit Schrittweite 0, 5.

**Beispiel 2.** Sei nun die Anfangswertaufgabe $y' = y + x$ mit $y(-0,975) = 0$ gegeben.



Die exakte Lösung $y(x) = -1 - x + 0,025\, e^{x+0,975}$ ist schwarz eingezeichnet. Die Näherungslösungen aus dem Euler-Cauchy-Verfahren sind blau, die aus dem Runge-Kutta-Verfahren rot eingezeichnet, jeweils mit Schrittweiten 1 und $0,5$.

Ist ein System $\vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y})$ vorgegeben, so gilt für das Euler-Cauchy-Verfahren die analoge Formel $\vec{y}_{k+1} = \vec{y}_k + h\,\vec{f}(x_k, \vec{y}_k)$ für $k = 0, \ldots, m-1$. Damit kann der folgende Existenzsatz bewiesen werden.

Guiseppe Peano
1858–1932

**Existenzsatz von Peano.** *Sei* $\vec{f}\colon D \to \mathbb{R}^n$ *stetig auf einem Gebiet* $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, *und sei* $(\xi, \vec{\eta}) \in D$. *Dann gibt es ein* $\varepsilon > 0$ *so, dass die Anfangswertaufgabe*

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y}) \quad \textit{mit} \quad \vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$$

*eine Lösung* $\vec{y}\colon [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ *besitzt.*

Wie beim Satz von Picard-Lindelöf wird Lemma 1 in 10.2 zur Definition von $\varepsilon$ benutzt.

Ein ausführlicher Beweis des Existenzsatzes von Peano mit Hilfe des Polygonzug-Verfahrens findet sich in [28, Kap.2, §1]. Hier seien einige Stichpunkte genannt. Man überlegt sich analog zu Lemma 2 in 10.2, dass die Punkte $(x_k, \vec{y}_k)$ im Quader $Q$ liegen und verbindet diese dann durch Geradenstücke. Dadurch erhält man einen Polygonzug im $\mathbb{R}^{n+1}$. Wie oben ist die Schrittweite $h := \frac{b-x_0}{m}$ definiert. Für $m \to \infty$ ergibt sich eine Folge von Polygonzügen. Man zeigt, dass diese Folge die Voraussetzungen des Satzes von Arzela-Ascoli aus der Funktionentheorie erfüllt und demnach eine konvergente Teilfolge besitzt. Diese Teilfolge konvergiert dann gegen eine Lösung der Anfangswertaufgabe.

Auch das Runge-Kutta-Verfahren kann auf Systeme ausgedehnt werden. Ein Beispiel zum Räuber-Beute-Modell (vgl. 9.4) ist in [13, Nr. 63] gerechnet.

Für die sog. Konsistenzordnung von Ein- und Mehrschrittverfahren und für Fehlerabschätzungen verweisen wir hier auf die entsprechende Literatur, z. B. [21, Kap. 9, 5.2] und [28, Kap. 4].

## 10.8 Abhängigkeitssätze

Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die lokal eine Lipschitz-Bedingung erfüllt. Dann hat die Anfangswertaufgabe

$$(1) \qquad y' = f(x, y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0$$

für $(x_0, y_0) \in D$ genau eine Lösung nach Satz 24 in Abschnitt 10.6 für $n = 1$. In der Praxis kennt man aber häufig den Anfangswert $y_0$ nicht genau, weil er z. B. ein Messwert ist. Auch die Gestalt der DGL kennt man häufig nicht genau, weil sie z. B. durch ein Modell vereinfacht ist und die Koeffizienten sich aus Messwerten ergeben. Es ist daher wichtig zu wissen, wie sich die Lösung verändert, wenn sich der Anfangswert $y_0$ oder die rechte Seite $f(x, y)$ ändern. Hierzu gibt es die unten stehenden *Abhängigkeitssätze*. Sie basieren auf dem folgenden Lemma, vgl. [10, S. 293].

**Lemma.** (Gronwall 1919) *Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Intervall $I = [a, b]$, und es gelte $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \alpha + \beta \int_a^x \varphi(t)\, dt$ mit Konstanten $\alpha, \beta \geqslant 0$ für alle $x \in I$. Dann gilt*

$$\varphi(x) \leqslant \alpha e^{\beta(x-a)}$$

*für alle $x \in I$.*

T.H.Gronwall 1877-1932

*Beweis.* Sei $\psi(x) := \alpha + \beta \int_a^x \varphi(t)\, dt$. Nach Voraussetzung gilt dann

$$\psi'(x) = \beta\varphi(x) \leqslant \beta\, \psi(x)\,.$$

Es folgt $\frac{d}{dx}\big(\psi(x)e^{-\beta x}\big) = \big(\psi'(x) - \beta\psi(x)\big)e^{-\beta x} \leqslant 0$. Also ist $\psi(x)e^{-\beta x}$ monoton fallend. Es folgt $\varphi(x)e^{-\beta x} \leqslant \psi(x)e^{-\beta x} \leqslant \psi(a)e^{-\beta a} = \alpha e^{-\beta a}$ für $x \in I$. Hieraus folgt $\varphi(x) \leqslant \alpha e^{\beta x}e^{-\beta a} = \alpha e^{\beta(x-a)}$. □

### Stetige Abhängigkeit der Lösung von Anfangswerten

Aus dem folgenden Satz geht hervor, dass sich zwei Lösungen $y_1, y_2$ der DGL $y' = f(x,y)$ auf einem Intervall $I = [a,b]$ nur wenig unterscheiden, wenn die dazu vorgegebenen Anfangswerte nahe beieinander liegen. Dabei nutzen wir aus, dass nach Satz 21 die Lösung $y\colon I \to \mathbb{R}$ der Anfangswertaufgabe (1) die Integralgleichung $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))\, dt$ erfüllt.

**Satz 25.** *Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei stetig und erfülle eine Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstante $L$. Seien $y_1, y_2\colon I \to \mathbb{R}$ Lösungen der DGL $y' = f(x,y)$, und sei $x_0 \in I$. Für alle $x \in I$ gilt dann*

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leqslant |y_1(x_0) - y_2(x_0)|\, e^{L|x-x_0|}.$$

*Beweis.* Wir betrachten den Fall $x \geqslant x_0$. Sei $\varphi(x) := |y_1(x) - y_2(x)|$ und $\alpha := |y_1(x_0) - y_2(x_0)|$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \varphi(x) &= \left| y_1(x_0) - y_2(x_0) + \int_{x_0}^x f\big(t, y_1(t)\big)\, dt - \int_{x_0}^x f\big(t, y_2(t)\big)\, dt \right| \\ &\leqslant \alpha + L \int_{x_0}^x \varphi(t)\, dt. \end{aligned}$$

Mit $\beta = L$ sind damit die Voraussetzungen des Lemmas von Gronwall erfüllt, und das Lemma ergibt die Behauptung. Den Fall $x < x_0$ führen wir nun wie folgt auf den Fall $x \geqslant x_0$ zurück.
Wir setzen $\tilde{x} := 2x_0 - x$. Dann sind $\tilde{y}_1(x) := y_1(\tilde{x})$ und $\tilde{y}_2(x) := y_2(\tilde{x})$ ersichtlich Lösungen der DGL $\tilde{y}' = -f(\tilde{x}, \tilde{y})$ auf $\tilde{I} := [2x_0 - b, 2x_0 - a]$. Dabei erfüllt die Funktion $(x,y) \mapsto -f(2x_0 - x, y)$ eine Lipschitz-Bedingung mit derselben Lipschitz-Konstanten $L$. Da $\tilde{x} > \tilde{x}_0 = x_0$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_2(x)| &= |\tilde{y}_1(\tilde{x}) - \tilde{y}_2(\tilde{x})| && (\text{da } \tilde{\tilde{x}} = x) \\ &\leqslant |\tilde{y}_1(x_0) - \tilde{y}_2(x_0)|\, e^{L|\tilde{x}-x_0|} && (\text{oben bewiesen}) \\ &= |y_1(x_0) - y_2(x_0)|\, e^{L|x-x_0|}. \end{aligned}$$

□

**Beispiel 1.** Sei $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, und sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = -\cos(x)y + \frac{1}{2}\sin(2x)\,.$$

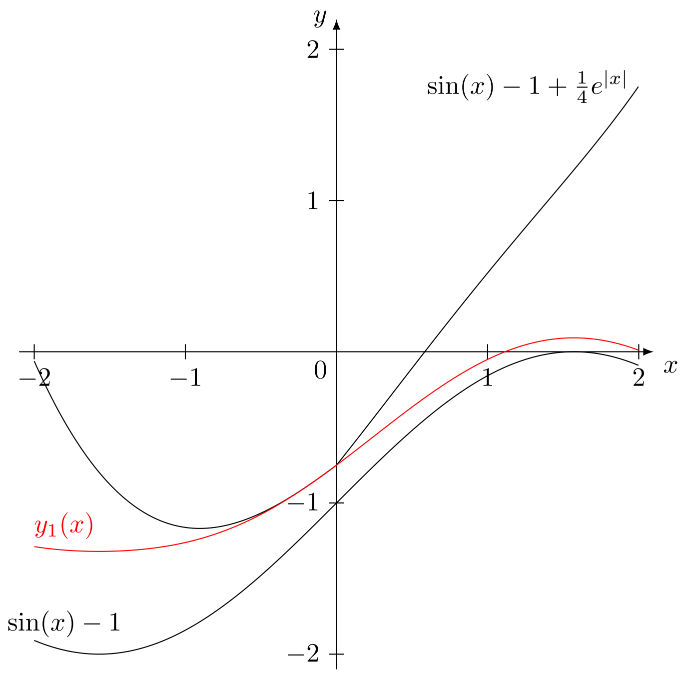
Dann ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\cos(x)$, also $|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)| \leqslant 1$ für alle $(x, y) \in D$, und daher ist $L = 1$ eine Lipschitz-Konstante für $f$, (vgl. Aufgabe 41 unten). Seien $y_1, y_2\colon I \to \mathbb{R}$ zwei Lösungen der DGL $y' = f(x, y)$ auf dem Intervall $I := [-2, 2]$ mit $y_1(0) = y_0$ und $y_2(0) = -1$. Dann ist $y_2(x) = \sin(x) - 1$, wie wir unten zeigen werden, und nach Satz 25 folgt

$$|y_1(x) - \sin(x) + 1| \leqslant |y_0 + 1|e^{|x|}$$

für alle $x \in I$. Somit erhalten wir folgende Schranken:

$$\sin(x) - 1 - |y_0 + 1|e^{|x|} \leqslant y_1(x) \leqslant \sin(x) - 1 + |y_0 + 1|e^{|x|}.$$

Sei $y_0 = -\frac{3}{4}$. Dann ist $y_2(0) = -1 < -\frac{3}{4} = y_1(0)$, und da sich zwei Lösungskurven nicht schneiden (Satz 22 in 10.4), kann man die Abschätzung noch weiter verfeinern zu $\sin(x) - 1 < y_1(x) \leqslant \sin(x) - 1 + \frac{1}{4} \cdot e^{|x|}$, was im Quadrat $\{(x, y) \in D \mid |x| \leqslant 2,\ |y| \leqslant 2\}$ folgendes Bild ergibt:



**Lösung der DGL $y' = -\cos(x)y + \frac{1}{2}\sin(2x)$**
Nach dem Additionstheorem ist $\frac{1}{2}\sin(2x) = \sin(x)\cos(x)$, vgl. z. B. [8, § 14 Satz 3], und die DGL $y' = -\cos(x)y + \sin(x)\cos(x)$ hat nach Typ III in Tabelle 4.6 die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\sin(x)} \int e^{\sin(x)} \sin(x)\cos(x)\,dx \\ &= e^{-\sin(x)} \int e^{u} u\,du \quad \text{nach Substitution } \; u = \sin(x) \\ &= e^{-\sin(x)}(ue^{u} - e^{u} + c) = e^{-\sin(x)}\big(\sin(x)e^{\sin(x)} - e^{\sin(x)} + c\big) \\ &= \sin(x) - 1 + c\,e^{-\sin(x)}. \end{aligned}$$

Für die Anfangsbedingung $y(0) = -\frac{3}{4}$ erhalten wir $c = -\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4}$ und also die Lösung $y_1(x) = \sin(x) - 1 + \frac{1}{4}e^{-\sin(x)}$. Für die Anfangsbedingung $y(0) = -1$ erhalten $c = 0$ und wir die Lösung $y_2(x) = \sin(x) - 1$. Das ist oben jeweils eingezeichnet.

### Stetige Abhängigkeit der Lösung von $f(x, y)$

Aus dem folgenden Satz geht hervor, dass sich die Lösung nur wenig ändert, wenn man bei gleichen Anfangswerten die rechte Seite der DGL $y' = f(x, y)$ nur wenig ändert.

**Satz 26.** *Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei stetig und erfülle eine Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstante $L$. Für eine Funktion $f_1\colon D \to \mathbb{R}$ gelte $|f(x, y) - f_1(x, y)| < \varepsilon$ für alle $(x, y) \in D$. Sei $y\colon I \to \mathbb{R}$ die Lösung der Anfangswertaufgabe (1), und sei $y_1\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL $y' = f_1(x, y)$ mit derselben Anfangsbedingung $y_1(x_0) = y_0$. Dabei sei $I = [x_0, x_0 + \delta]$. Für alle $x \in I$ gilt dann $|y(x) - y_1(x)| \leqslant \varepsilon\delta\, e^{L|x-x_0|}$.*

*Beweis.* Der Beweis geht analog wie oben. Setze $\varphi(x) = |y(x) - y_1(x)|$.
Nach Satz 21 gilt dann $0 \leqslant \varphi(x) = \left|\int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\,dt - \int_{x_0}^{x} f_1\big(t, y_1(t)\big)\,dt\right| =$
$\left|\int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\,dt - \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_1(t)\big)\,dt + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_1(t)\big)\,dt - \int_{x_0}^{x} f_1\big(t, y_1(t)\big)\,dt\right|$
$\leqslant \int_{x_0}^{x} \left|f\big(t, y(t)\big) - f\big(t, y_1(t)\big)\right|\,dt + \int_{x_0}^{x} \left|f\big(t, y_1(t)\big) - f_1\big(t, y_1(t)\big)\right|\,dt$
$\leqslant L\int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt + \int_{x_0}^{x} \varepsilon\,dt \leqslant L\int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt + \varepsilon\delta$. Mit $\alpha = \varepsilon\delta$ und $\beta = L$ sind die Voraussetzungen des Lemmas von Gronwall erfüllt, und das Lemma ergibt die Behauptung. $\square$

**Beispiel 2.** Wir betrachten wieder die DGL $y' = f(x, y)$ mit $f(x, y) = -\cos(x)y + \frac{1}{2}\sin(2x)$ aus Beispiel 1 und ändern nun die rechte Seite etwas ab zu $f_1(x,y) = -\cos(x)y + \frac{3}{8}\sin(2x)$. Dann gilt

$$|f(x,y) - f_1(x,y)| = \left|\frac{1}{8}\sin(2x)\right| \leqslant \frac{1}{8}.$$

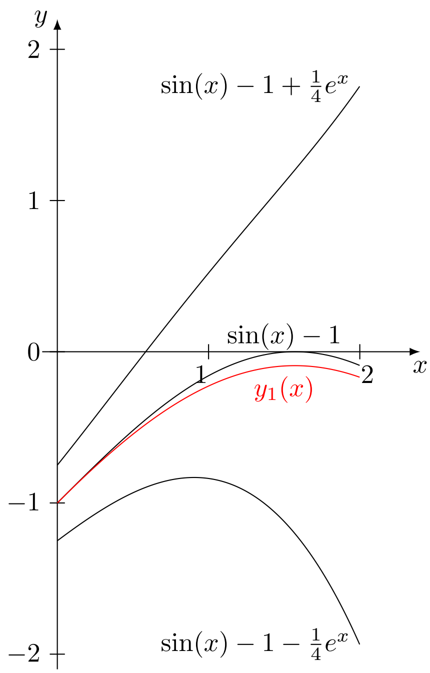
Nach Beispiel 1 ist $y(x) = \sin(x) - 1$ eine Lösung der Anfangswertaufgabe $y' = f(x,y)$ mit $y(0) = -1$. Sei weiter $y_1(x)$ eine Lösung der Anfangswertaufgabe $y' = f_1(x,y)$ mit derselben Anfangsbedingung $y(0) = -1$, und sei $\delta = 2$. Aus Satz 26 folgt dann

$$|\sin(x) - 1 - y_1(x)| \leqslant \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot e^{|x|}$$

für alle $x \in I := [0,2]$ und (da $x \geqslant 0$ für alle $x \in I$ gilt) also

$$y_1(x) - \frac{1}{4} \cdot e^x \leqslant \sin(x) - 1 \leqslant y_1(x) + \frac{1}{4} \cdot e^x.$$

Dies ergibt im Rechteck $\{(x,y) \in D \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ |y| \leqslant 2\}$ das folgende Bild:



**Lösung der DGL $y' = -\cos(x)y + \frac{3}{8}\sin(2x)$**

Es ist $\frac{3}{8}\sin(2x) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\sin(2x) = \frac{3}{4}\cdot\sin(x)\cos(x)$ nach Additionstheorem. Die DGL $y' = -\cos(x)y + \frac{3}{4}\sin(x)\cos(x)$ hat analog wie in Beispiel 1 die allgemeine Lösung $y(x) = \frac{3}{4}\big(\sin(x) - 1 + c_1\, e^{-\sin(x)}\big)$. Für die Anfangsbedingung $y(0) = -1$ erhalten wir $c_1 = -\frac{1}{3}$ und also die Lösung $y_1(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}e^{-\sin(x)}$.

## 10.9 Aufgaben 41 – 43

**Aufgabe 41.** Man formuliere Satz 19 und seinen Beweis für den Fall $n = 1$.

**Aufgabe 42.** (Zur Wiederholung)

(a) Zur DGL
$$y''' - \frac{1}{x}\,y'' + y' - \frac{1}{x}\,y = 0$$
seien drei Lösungen $y_1(x) = x$, $y_2(x) = \cos(x)$ und $y_3(x) = \sin(x)$ für $x > 0$ gegeben. Man bestätige, dass diese linear unabhängig sind.

(b) Man ermittle eine spezielle Lösung
$$y_s(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + c_3(x)y_3(x)$$
der DGL $y''' - \frac{1}{x}\,y'' + y' - \frac{1}{x}\,y = x$.

**Aufgabe 43.** (a) Man berechne für die Anfangswertaufgabe
$$y' = x^2 + y^2 \quad \text{mit} \quad y(0) = 0$$
die Picard-Iterierten $z_k(x)$ für $1 \leqslant k \leqslant 4$.

(b) Man schätze mit Hilfe von Lemma 5 in 10.3 den maximalen Fehler
$$|z_4(x) - y(x)|$$
für $x \in I := \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ab, wobei $y(x)$ die auf $I$ existierende Lösung der Anfangswertaufgabe in (a) ist.

# 11 Lineare Systeme

Wie in 3.4 eingeführt, hat ein explizites lineares System die Form

$$(*) \qquad \vec{y}\,' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x),$$

wobei $A\colon I \to \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), x \mapsto \big(a_{jk}(x)\big)$ und $\vec{b}\colon I \to \mathbb{R}^n$ stetig auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ sind. Im Hinblick auf das nächste Kapitel lassen wir nun aber auch komplexwertige stetige Funktionen $a_{jk}\,,\, b_k\colon I \to \mathbb{C}$ für $j,k = 1,\dots,n$ zu.
Eine *Lösung* von $(*)$ ist dann eine differenzierbare Funktion $\vec{y}\colon I \to \mathbb{C}^n$ so, dass $\vec{y}\,'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{b}(x)$ für alle $x \in I$ gilt. Da $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifiziert werden kann, kann eine Lösung als differenzierbare Funktion $I \to \mathbb{R}^{2n}$ aufgefasst werden, wobei Differenzierbarkeit komponentenweise zu verstehen ist. Es sei hier durchgehend $\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{R} \ \text{ oder } \ \mathbb{K} = \mathbb{C}}$.

## 11.1 Existenz- und Eindeutigkeitssatz

**Satz 27.** *Sei $I$ ein Intervall in $\mathbb{R}$, sei $A(x) = \big(a_{jk}(x)\big)$ eine Matrix mit stetigen Funktionen $a_{jk}\colon I \to \mathbb{K}$ für $j,k = 1,\dots,n$, und sei $\vec{b}\colon I \to \mathbb{K}^n$ stetig. Dann gibt es zu jedem $\xi \in I$ und jedem $\vec{\eta} \in \mathbb{K}^n$ genau eine Lösung $\vec{y}\colon I \to \mathbb{K}^n$ des linearen Systems $(*)$ mit der Anfangsbedingung $\vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$.*

*Beweis.* Sei $\vec{f}(x,\vec{y}) = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$, und sei $D = J \times \mathbb{K}^n$ mit irgendeinem kompakten Intervall $J \subset I$. Aus der Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto A(x)$ folgt $L := \sup\{\|A(x)\| \mid x \in J\} < \infty$, also

$$\|\vec{f}(x,\vec{y}) - \vec{f}(x,\vec{z})\| = \|A(x)(\vec{y} - \vec{z})\| \leqslant L\|\vec{y} - \vec{z}\|$$

für alle $(x,\vec{y})$, $(x,\vec{z}) \in D$. Damit erfüllt $\vec{f}$ in $D$ die (globale) Lipschitz-Bedingung aus Abschnitt 10.1. Die Eindeutigkeitsaussage folgt daher aus Satz 22. Die Existenz einer Lösung auf ganz $I$ ist zu zeigen. Sei $\xi \in I$ und $\eta \in \mathbb{K}^n$ und $J$ irgendein kompaktes Teilintervall von $I$, das $\xi$ enthält. Betrachte die Funktionenfolge $\vec{z}_k\colon J \to \mathbb{K}^n$, $k \in \mathbb{N}$, mit $\vec{z}_1(x) := \vec{\eta}$ und

$$\vec{z}_{k+1}(x) := \vec{\eta} + \int_\xi^x \big(A(t)\,\vec{z}_k(t) + \vec{b}(t)\big)\,dt\,.$$

Wir zeigen: In Beh. 1 unten (analog zu 10.3), dass die Folge $(\vec{z}_k(x))_{k\to\infty}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $\vec{z}\colon J \to \mathbb{K}^n$ konvergiert. In Beh. 2 unten, dass für alle $x \in J$ gilt: $A(x)\vec{z}(x) + \vec{b}(x) = \lim_{k\to\infty}(A(x)\vec{z}_k(x) + \vec{b}(x))$. In Beh. 3 unten, dass $\vec{z}\colon J \to \mathbb{K}^n$ eine Lösung der Anfangswertaufgabe $\vec{y}\,' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$ mit $\vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$ ist.

Da jedes $x \in I$ in einem genügend großen kompakten Intervall $J \ni \xi$ liegt und die Lösung der Anfangswertaufgabe nach Satz 22 eindeutig ist, ist die Lösung auf ganz $I$ gefunden. □

**Beh. 1.** *Die Folge $(\vec{z}_k(x))_{k\to\infty}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $\vec{z}\colon J \to \mathbb{K}^n$.*

*Beweis.* Sei $K := \sup\{\|\vec{z_2}(x) - \vec{z_1}(x)\| \mid x \in J\}$. Dann gilt

$$\|\vec{z}_{k+1}(x) - \vec{z}_k(x)\| \leqslant K\,L^{k-1}\,\frac{|x-\xi\,|^{k-1}}{(k-1)!}$$

für alle $x \in J$, $k \in \mathbb{N}$, denn: Für $k = 1$ gilt dies nach Definition von $K$. Induktionsschritt $k \to k+1$:

$$\begin{aligned}
\|\vec{z}_{k+2}(x) - \vec{z}_{k+1}(x)\| &= \|\int_\xi^x A(t)\big(\vec{z}_{k+1}(t) - \vec{z}_k(t)\big)\,dt\| \\
&\leqslant \Big|\int_\xi^x \|A(t)\big(\vec{z}_{k+1}(t) - \vec{z}_k(t)\big)\|\,dt\Big| \\
&\underset{\text{I.V.}}{\leqslant} \Big|\int_\xi^x L\cdot K\,L^{k-1}\,\frac{|t-\xi\,|^{k-1}}{(k-1)!}\,dt\Big| \\
&\leqslant K\,L^k\,\Big|\int_\xi^x \frac{|t-\xi\,|^{k-1}}{(k-1)!}\,dt\Big| \\
&= K\,L^k\,\frac{|x-\xi\,|^{k}}{k!}\,.
\end{aligned}$$

Wir schreiben die Folge $(\vec{z}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ als unendliche Reihe $\vec{\eta} + \sum_{k=2}^\infty (\vec{z}_k - \vec{z}_{k-1})$. Die Reihe $\sum_{k=2}^\infty (\vec{z}_k - \vec{z}_{k-1})$ besitzt die konvergente Majorante

$$K \sum_{k=2}^\infty \frac{(L\ell)^{k-2}}{(k-2)!}\,,$$

wobei $\ell < \infty$ die Länge von J ist, konvergiert also gleichmäßig. Mit $\vec{z} := \lim\limits_{k\to\infty} \vec{z}_k = \vec{\eta} + \sum_{k=2}^\infty (\vec{z}_k - \vec{z}_{k-1})$ folgt Beh. 1. □

**Beh. 2.** *Für alle $x \in J$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} (A(x)\vec{z}_k(x) + \vec{b}(x)) = A(x)\vec{z}(x) + \vec{b}(x)$.*

*Beweis.* Sei $\varepsilon > 0$. Nach Beh. 1 gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $k \geqslant N$ und alle $x \in J$ gilt: $\|\vec{z}_k(x) - \vec{z}(x)\| < \frac{\varepsilon}{L}$. Es folgt $\|A(x)\vec{z}_k(x) - A(x)\vec{z}(x)\| \leqslant \|A(x)\| \cdot \|\vec{z}_k(x) - \vec{z}(x)\| < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$ für alle $k \geqslant N$ und alle $x \in J$. □

**Beh. 3.** *Die Funktion* $\vec{z}\colon J \to \mathbb{K}^n$ *ist die Lösung der Anfangswertaufgabe* $\vec{y}\,' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$ *mit* $\vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$*.*

*Beweis.* Wir zeigen $\vec{z}(x) = \vec{\eta} + \int_\xi^x \big(A(t)\vec{z}(t) + \vec{b}(t)\big)\,dt$ und also $\vec{z}\,'(x) = A(x)\vec{z}(x) + \vec{b}(x)$ und $\vec{z}(\xi) = \vec{\eta}$:

$$\begin{aligned}
\vec{z}(x) &\overset{\text{Beh.1}}{=} \lim_{k\to\infty} \vec{z}_{k+1}(x) \\
&\overset{\text{Def.}}{=} \lim_{k\to\infty} \Big(\vec{\eta} + \int_\xi^x \big(A(t)\,\vec{z}_k(t) + \vec{b}(t)\big)\,dt\Big) \\
&\overset{\text{glm.Konv.}}{=} \vec{\eta} + \int_\xi^x \lim_{k\to\infty} \big(A(t)\,\vec{z}_k(t) + \vec{b}(t)\big)\,dt \\
&\overset{\text{Beh.2}}{=} \vec{\eta} + \int_\xi^x \big(A(t)\vec{z}(t) + \vec{b}(t)\big)\,dt\,.
\end{aligned}$$ □

## 11.2 Homogene lineare Systeme

Wir betrachten ein homogenes lineares System

$$(*) \qquad \vec{y}\,' = A(x)\vec{y}\,,$$

wobei $A(x) = \big(a_{jk}(x)\big)$ eine Matrix mit stetigen Funktionen $a_{jk}\colon I \to \mathbb{K}$ für $j,k = 1,\ldots,n$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist. Wir zeigen hier, dass der $\mathbb{K}$-Vektorraum der Lösungen von $(*)$ die Dimension $n$ hat. Weiter zeigen wir, dass zwei Lösungen genau dann linear unabhängig sind, wenn die Determinante ihrer Wronski-Matrix $Y(x) \neq 0$ ist für ein $x \in I$.

**Lemma 1.** *Die Lösungen* $\vec{y}\colon I \to \mathbb{K}^n$ *von* $(*)$ *bilden einen Unterverktorraum* $L_h$ *des* $\mathbb{K}$*-Vektorraums aller Abbildungen* $I \to \mathbb{K}^n$*.*

*Beweis.* Es ist $\vec{0} \in L_h$. Sind $\vec{y}$ und $\vec{z}$ in $L_h$, so gilt

$$\begin{aligned}
(\vec{y} + \vec{z})' &= \vec{y}\,' + \vec{z}\,' \\
&= A(x)\vec{y} + A(x)\vec{z} \\
&= A(x)(\vec{y} + \vec{z}\,)
\end{aligned}$$

und also ist auch $\vec{y} + \vec{z} \in L_h$. Ist $\vec{y} \in L_h$ und $c \in \mathbb{K}$, so ist

$$\begin{aligned}
(c\vec{y})' &= c\vec{y}\,' \\
&= cA(x)\vec{y} \\
&= A(x)c\vec{y}
\end{aligned}$$

und also $c\vec{y} \in L_h$. □

Um zu zeigen, dass $L_h$ die Dimension $n$ hat, leiten wir zunächst eine notwendige Bedingung für die lineare Unabhängigkeit von $m$ Lösungen her.

**Lemma 2.** *Sei $m \in \mathbb{N}$, und seien $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m \colon I \to \mathbb{K}^n$ Lösungen des Systems $\vec{y}\,' = A(x)\vec{y}$. Wenn $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m$ linear unabhängig über $\mathbb{K}$ sind, so sind die Vektoren $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_m(x)$ für jedes $x \in I$ linear unabhängig in $\mathbb{K}^n$.*

*Beweis.* Angenommen, es gibt ein $x_0 \in I$ so, dass $\vec{y}_1(x_0), \ldots, \vec{y}_m(x_0)$ linear abhängig in $\mathbb{K}^n$ sind. Dann gibt es eine Linearkombination

$$c_1\vec{y}_1(x_0) + \cdots + c_m\vec{y}_m(x_0) = \vec{0}$$

in $\mathbb{K}^n$ mit Konstanten $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{K}$, die nicht alle 0 sind. Für die Lösung $\vec{z} := c_1\vec{y}_1 + \cdots + c_m\vec{y}_m$ in $L_h$ gilt dann $\vec{z}(x_0) = \vec{0}$.
Da die Nullfunktion $I \to \mathbb{K}^n, x \mapsto \vec{0}$, in $L_h$ ist und die Anfangswertaufgabe $\vec{y}\,' = A(x)\vec{y}$ mit $\vec{y}(x_0) = \vec{0}$ nach Satz 27 eindeutig lösbar ist, muss $\vec{z}$ identisch $\vec{0}$ sein. Damit sind dann aber die Funktionen $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m$ linear abhängig über $\mathbb{K}$ im Widerspruch zur Voraussetzung. □

**Satz 28.** *Sei $I$ ein Intervall in $\mathbb{R}$, und $A \colon I \to \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ eine stetige Abbildung. Dann hat der $\mathbb{K}$-Vektorraum $L_h$ der Lösungen des homogenen linearen Systems $\vec{y}\,' = A(x)\vec{y}$ die Dimension $n$.*

*Beweis.* Sei $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$ die Standardbasis von $\mathbb{K}^n$, und sei $\xi \in I$. Dann hat das System $\vec{y}\,' = A(x)\vec{y}$ nach Satz 27 Lösungen $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n \in L_h$ mit $\vec{y}_k(\xi) = \vec{e_k}$ für $k = 1, \ldots, n$. Diese Lösungen sind linear unabhängig, denn aus $c_1\vec{y}_1 + \cdots + c_n\vec{y}_n = \vec{0}$ folgt

$$\vec{0} = c_1\vec{y}_1(\xi) + \cdots + c_n\vec{y}_n(\xi) = c_1\vec{e_1} + \cdots + c_n\vec{e_n}$$

in $\mathbb{K}^n$ und also $c_k = 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$. Es ist also $\dim_{\mathbb{K}} L_h \geqslant n$. Andererseits ist $\dim_{\mathbb{K}} L_h \leqslant n$, denn wenn es $n+1$ linear unabhängige Lösungen $\vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_{n+1}$ gäbe, so gäbe es $n+1$ linear unabhängige Vektoren $\vec{z}_1(\xi), \ldots, \vec{z}_{n+1}(\xi)$ in $\mathbb{K}^n$ nach Lemma 2. □

**Lemma 3.** *Sei $m \in \mathbb{N}$, und seien $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m \colon I \to \mathbb{K}^n$ Lösungen des Systems $\vec{y}\,' = A(x)\vec{y}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

**(1)** *Die Lösungen $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m$ sind linear unabhängig über $\mathbb{K}$.*

**(2)** *Es gibt ein $\xi \in I$ so, dass die Vektoren $\vec{y}_1(\xi), \ldots, \vec{y}_m(\xi)$ linear unabhängig in $\mathbb{K}^n$ sind.*

**(3)** *Die Vektoren $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_m(x)$ sind für jedes $x \in I$ linear unabhängig in $\mathbb{K}^n$.*

*Beweis.* Die Implikationen (3) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (1) sind trivial, und (1) $\Longrightarrow$ (3) ist in Lemma 2 bewiesen worden. $\square$

Sei wie oben $L_h$ der $n$-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorraum der Lösungen des Systems $\vec{y}\,' = A(x)\vec{y}$, und seien $\vec{y}_1 \ldots, \vec{y}_n \colon I \to \mathbb{K}^n$ in $L_h$. In Vektor- und Matrixschreibweise sei dann

$$\vec{y}_k := \begin{pmatrix} y_{1k} \\ \vdots \\ y_{nk} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad Y(x) := \begin{pmatrix} y_{11}(x) & \ldots & y_{1n}(x) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ y_{n1}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix wird *Wronski-Matrix* genannt.

**Satz 29.** *Seien $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n \colon I \to \mathbb{K}^n$ Lösungen des homogenen linearen Systems $\vec{y}\,' = A(x)\vec{y}$. Dann sind $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ genau dann linear unabhängig über $\mathbb{K}$, wenn $\det(Y(\xi)) \neq 0$ für ein $\xi \in I$ gilt. Es ist dann $\det(Y(x)) \neq 0$ für alle $x \in I$.*

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Lemma 3, denn es gilt $\det(Y(x)) \neq 0$ genau dann, wenn $\operatorname{rang}(Y(x)) = n$ gilt, und das ist genau dann der Fall, wenn die Spalten von $Y(x)$ linear unabhängig sind. $\square$

Für $n = 2$ hat sich nun die Lücke gefüllt, die wir im Beweis von Satz 15 in Abschnitt 9.1 über $2 \times 2$-Systeme gelassen haben.

**Definition.** Ein *Fundamentalsystem von Lösungen* (oder eine *Integralbasis*) des homogenen linearen Systems $\vec{y}\,' = A(x)\vec{y}$ ist eine Basis des zugehörigen Vektoraums $L_h$ der Lösungen.

**Beispiel.** Bestimme ein Fundamentalsystem von Lösungen für das homogene lineare System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Lösungen sind $\vec{y}_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$ und $\vec{y}_2(x) = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}$.

Sie sind linear unabhängig, denn es ist

$$\det(Y(x)) = \det \begin{pmatrix} \sin(x) & -\cos(x) \\ \cos(x) & \sin(x) \end{pmatrix} = 1 \neq 0\,.$$

## 11.3 Anwendung auf eine DGL $n$-ter Ordnung

Wir betrachten nun für $n \geqslant 2$ eine homogene lineare DGL $n$-ter Ordnung

$$(*) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0$$

mit stetigen Funktionen $a_0, \ldots, a_{n-1} \colon I \to \mathbb{R}$. In Abschnitt 7.1 für $n = 2$ und in Abschnitt 8.1 blieb jeweils die Lücke, dass der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Lösungen von $(*)$ die Dimension $n$ hat und dass die Wronski-Determinante von $n$ linear unabhängigen Lösungen $\neq 0$ ist, vgl. die Beweise von Satz 7 in 7.1 und Satz 13 in 8.1. Diese Lücken werden hier gefüllt.
Setzt man

$$y_1 := y\,, \;\; y_2 := y'\,, \ldots, \;\; y_n := y^{(n-1)}\,,$$

so geht $(*)$ nach Abschnitt 3.3 in ein System von $n$ DGL erster Ordnung über: $(y_1', \ldots, y_{n-1}', y_n') = \big(y_2, \ldots, y_n, -\sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y_{k+1}\big)$, und es ist $\vec{y}_k = (y_{1k}, \ldots, y_{nk})^t \in \mathbb{R}^n$ genau dann eine Lösung dieses Systems, wenn $y_{1k}$ eine Lösung von $(*)$ ist, $k = 1, \ldots, n$.
Mit den Bezeichnungen aus dem vorherigen Abschnitt gehört also zu $n$ Lösungen $y_{11}, \ldots, y_{1n} \colon I \to \mathbb{R}$ der DGL $(*)$ die Wronski-Determinante

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_{11}(x) & \ldots & y_{1n}(x) \\ y_{11}'(x) & \ldots & y_{1n}'(x) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ y_{11}^{(n-1)}(x) & \ldots & y_{1n}^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \text{ mit } x \in I\,.$$

Es ist daher $W(x)$ die Determinante der Wronski-Matrix. Mit den Sätzen 27, 28 und 29 aus den beiden vorherigen Abschnitten folgt:

**Satz 30.** 1. *Sind $\xi \in I$ und $(\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$ vorgegeben, so hat DGL $(*)$ genau eine Lösung $y \colon I \to \mathbb{R}$, welche die Anfangsbedingungen $y(\xi) = \eta_1$, $y'(\xi) = \eta_2$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(\xi) = \eta_n$ erfüllt.*

2. *Die Menge der Lösungen $y \colon I \to \mathbb{R}$ der homogenen linearen DGL*

$$(*) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0$$

*bildet einen $n$-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

3. *Seien $y_{11}, \ldots, y_{1n} \colon I \to \mathbb{R}$ Lösungen von $(*)$, und sei $x \in I$. Dann sind $y_{11}, \ldots, y_{1n}$ genau dann linear unabhängig, wenn ihre Wronski-Determinante $W(x) \neq 0$ ist.*

□

## 11.4 Inhomogene lineare Systeme

Sei $I$ ein Intervall in $\mathbb{R}$, und seien $A\colon I \to \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ und $\vec{b}\colon I \to \mathbb{K}^n$ stetige Abbildungen.

**Lemma.** *Sei $\mathcal{L}$ die Menge der Lösungen des inhomogenen Systems*

$$\vec{y}\,' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x)\,,$$

*und $L_h$ der Lösungsraum des zugehörigen homogenen Systems $\vec{y}\,' = A(x)\vec{y}$. Dann gilt $\mathcal{L} = \vec{y}_s + L_h$ für jedes $\vec{y}_s \in \mathcal{L}$.*

*Beweis.* Für $\vec{y} \in \mathcal{L}$ setze $\vec{y}_h := \vec{y} - \vec{y}_s$. Dann gilt

$$\vec{y}_h{}' = \vec{y}\,' - \vec{y}_s{}' = (A\vec{y} + \vec{b}) - (A\vec{y}_s + \vec{b}) = A(\vec{y} - \vec{y}_s) = A\vec{y}_h\,,$$

also $\vec{y}_h \in L_h$ und $\vec{y} = \vec{y}_s + \vec{y}_h \in \vec{y}_s + L_h$. Es folgt $\mathcal{L} \subset \vec{y}_s + L_h$. Sei nun $\vec{y} \in \vec{y}_s + L_h$ und also $\vec{y} = \vec{y}_s + \vec{y}_h$ mit $\vec{y}_h \in L_h$. Dann gilt $\vec{y}\,' = \vec{y}_s{}' + \vec{y}_h{}' = (A\vec{y}_s + \vec{b}) + A\vec{y}_h = A\vec{y} + \vec{b}$ und also $\vec{y} \in \mathcal{L}$. Es folgt $\vec{y}_s + L_h \subset \mathcal{L}$. □

**Beispiel 1.** Das System $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, und damit das System $\begin{matrix} y_1' = & y_2 + x \\ y_2' = & -y_1 \end{matrix}$, wird von $\vec{y}_s(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \end{pmatrix}$ gelöst, wie wir unten zeigen werden. Die allgemeine Lösung ist $\vec{y}(x) = \vec{y}_s(x) + c_1\vec{y}_1(x) + c_2\vec{y}_2(x)$, wobei $\vec{y}_1(x)$, $\vec{y}_2(x)$ schon am Ende von Abschnitt 11.2 ermittelt worden sind.

Wir erhalten eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems

$$(*) \qquad \vec{y}\,' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$$

durch die Methode der *Variation der Konstanten* in Analogie zu Satz (b) in Abschnitt 4.2 für $n = 1$ und als direkte Verallgemeinerung von Satz 16 in Abschnitt 9.1 durch den folgenden Satz.

**Satz 31.** *Gegeben sei ein Fundamentalsystem von Lösungen $I \to \mathbb{R}^n$ für das zu $(*)$ gehörige homogene System, und sei $Y(x)$ dessen Wronski-Matrix. Dann ist jede Lösung $\vec{y}\colon I \to \mathbb{R}^n$ des Systems $(*)$ von der Form*

$$\vec{y}(x) = Y(x) \cdot \int Y(x)^{-1}\,\vec{b}(x)\,dx\,.$$

*Beweis.* Nach Satz 29 ist $Y(x)$ invertierbar. Der Beweis von Satz 16 in Abschnitt 9.1 ist für alle $n \geqslant 2$ gültig, so dass wir hier darauf verweisen. □

**Beispiel 2.** Für das System $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ erhalten wir mit dieser Methode

$$\begin{aligned}
\vec{y}_s &= \begin{pmatrix} \sin(x) & -\cos(x) \\ \cos(x) & \sin(x) \end{pmatrix} \cdot \int \begin{pmatrix} \sin(x) & \cos(x) \\ -\cos(x) & \sin(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} dx \\
&= \begin{pmatrix} \sin(x) & -\cos(x) \\ \cos(x) & \sin(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \int x \sin(x)\, dx \\ \int -x\cos(x)\, dx \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin(x) & -\cos(x) \\ \cos(x) & \sin(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(x) - x\cos(x) \\ -\big(\cos(x) + x\sin(x)\big) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ -x \end{pmatrix}, \text{ wie schon in Beispiel 1 oben angegeben.}
\end{aligned}$$

## 11.5 Aufgabe 44

**Aufgabe 44.** (a) Gegeben sei ein homogenes lineares System der Form

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_2 \\
y_2' &= -a_0(x)\, y_1 - a_1(x)\, y_2
\end{aligned}$$

mit stetigen Funktionen $a_0, a_1 \colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Es sei $A(x)$ die zugehörige Koeffizientenmatrix.

Ferner sei ein Fundamentalssystem von Lösungen $y_1,\ z_1 \colon I \to \mathbb{R}$ für die lineare DGL $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ gegeben, und es sei

$$M(x) := \begin{pmatrix} y_1 & z_1 \\ y_1' & z_1' \end{pmatrix}.$$

Man zeige, dass $M(x)$ die DGL $Y' = A(x)Y$ erfüllt und also $M(x)$ eine Wronski-Matrix von Lösungen für das System ist.

(b) Man bestimme ein Fundamentalsystem von Lösungen für das System

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_2 \\
y_2' &= -\frac{3}{x^2}\, y_1 - \frac{5}{x}\, y_2
\end{aligned}$$

und gebe die zugehörige Wronski-Matrix an.

# 12 Systeme mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten lineare DGL-Systeme der Form

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$$

mit einer Matrix $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ und einer stetigen Funktion $\vec{b}\colon I \to \mathbb{R}^n$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Zunächst beschäftigen wir uns mit dem zugehörigen homogenen System

$$(*) \qquad \vec{y}\,' = A\vec{y}$$

und überlegen uns: Ist $\vec{v}$ Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist $\vec{y}(x) = \vec{v}e^{\lambda x}$ eine Lösung von $(*)$. Wenn $A$ diagonalisierbar ist, gibt es eine Basis von Eigenvektoren und man erhält so ein Fundamentalsystem von Lösungen für $(*)$. Andernfalls transformiert man die Matrix $A$ in eine Normalform, um ein Fundamentalsystem zu ermitteln. Wir arbeiten im Folgenden über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen und überlegen dann jeweils, wie man zu reellwertigen Lösungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ von $(*)$ kommt.

## 12.1 Fundamentalsystem bei Diagonalisierbarkeit

Wir erinnern kurz an die aus der Linearen Algebra bekannten Begriffe Eigenwert und Eigenvektor einer Matrix $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$, wobei hier $K$ ein beliebiger Körper ist. Ein Element $\lambda \in K$ heißt *Eigenwert* von $A$, wenn es einen Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ in $K^n$ so gibt, dass

$$(1) \qquad A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

gilt. Ein solcher Vektor heißt dann *Eigenvektor* von $A$ zum Eigenwert $\lambda$. Sei $E_n$ die $n\times n$-Einheitsmatrix. Dann kann man die Gleichung (1) umschreiben zu $(A - \lambda E_n)\vec{v} = \vec{0}$. Ein Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ in $K^n$ ist genau dann Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda$, wenn $\det(A - \lambda E_n) = 0$ ist. Man nennt den Vektorraum

$$V_\lambda := \{\vec{w} \in K^n \mid (A - \lambda E_n)\vec{w} = \vec{0}\}$$

den *Eigenraum* von $A$ zum Eigenwert $\lambda$. Die Matrix $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ ist genau dann *diagonalisierbar*, wenn $K^n$ eine Basis besitzt, die aus Eigenvektoren von $A$ besteht. Und dies ist genau dann der Fall, wenn das *charakteristische Polynom* von $A$ in Linearfaktoren zerfällt **und** $\dim V_\lambda$ für jeden Eigenwert $\lambda$ gleich der Vielfachheit von $\lambda$ ist.
Über dem Körper $\mathbb{C}$ zerfällt jedes Polynom in Linearfaktoren, aber es kann $\dim V_\lambda$ kleiner als die Vielfachheit von $\lambda$ sein.

Nun kommen wir zurück zur DGL $(*)$.

**Lemma 1.** *Sei $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist die Funktion $\vec{y}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ mit $\vec{y}(x) = \vec{v}e^{\lambda x}$ eine Lösung der DGL $(*)$.*
*Wenn $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{C}^n$ eine Basis von Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ bilden, dann bilden die Funktionen*

$$\vec{y}_k(x) = \vec{v}_k\, e^{\lambda_k x}$$

*für $k = 1, \dots, n$ ein Fundamentalsystem von Lösungen für die DGL $(*)$. Sind alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ reell, so können diese Lösungen reellwertig gewählt werden.*

*Beweis.* Aus $\vec{y}(x) = \vec{v}e^{\lambda x}$ folgt $\vec{y}\,'(x) = \lambda\vec{v}e^{\lambda x} = A\vec{v}e^{\lambda x} = A\vec{y}(x)$. Die lineare Unabhängigkeit der Lösungen $\vec{y}_k(x)$ ergibt sich daraus, dass die Vektoren $\vec{y}_k(0) = \vec{v}_k$ für $k = 1, \dots, n$ nach Voraussetzung linear unabhängig sind. Die letzte Behauptung ergibt sich aus obigen Vorbetrachtungen. □

Um die DGL $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ zu lösen, gehen wir in drei Schritten vor:

**1. Schritt.** Bestimme die verschiedenen Eigenwerte $\lambda_k$ für $k = 1, \dots, r$ von $A$ mit der jeweiligen Vielfachheit $n_k$. Zerlege also das *charakteristische Polynom* in $\mathbb{C}[\lambda]$ in Linearfaktoren:

$$\chi(\lambda) := \det(A - \lambda E_n) = \pm(\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_r)^{n_r}\,.$$

**2. Schritt.** Bestimme zu jedem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von $A$ eine Basis des zugehörigen Eigenraums $V_\lambda := \{\vec{v} \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda E_n)\vec{v} = \vec{0}\}$.

**3. Schritt.** Prüfe, ob $\dim V_\lambda$ für jeden Eigenwert $\lambda$ gleich der Vielfachheit von $\lambda$ ist. Falls ja, erhält man ein Fundamentalsystem von Lösungen gemäß Lemma 1.

**Beispiel 1.** Man ermittle die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{array}{rcl} y_1' &=& y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' &=& -y_1 + y_2 + y_3\,. \\ y_3' &=& y_1 + y_2 - y_3 \end{array} \quad \text{Hier ist } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**1. Schritt.** Bestimme die Eigenwerte von $A$:

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2(-1-\lambda) - 2 - 2(1-\lambda) - (-1-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4 \;\; \text{(dividiere durch } \lambda - 1) \\ &= -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+2)\,. \end{aligned}$$

Erhalte die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = -2$.

**2. Schritt.** Bestimme zu den drei im 1. Schritt gefundenen einfachen Eigenwerten jeweils einen Eigenvektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

**Bestimmung von $\vec{v}_1$ zu $\lambda_1 = 1$:**

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda_1 & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b+c \\ -a+c \\ a+b-2c \end{pmatrix}.$$

Es folgt $b = c = a$, was durch $a = b = c = 1$ gelöst wird. Es ist also $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$.

**Bestimmung von $\vec{v}_2$ zu $\lambda_2 = 2$:**

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda_2 & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-b+c \\ -a-b+c \\ a+b-3c \end{pmatrix}.$$

Es folgt $a + b = c$ und $c = 0$, was durch $a = 1$ und $b = -1$ gelöst wird. Es ist also $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$.

**Bestimmung von $\vec{v}_3$ zu $\lambda_3 = -2$:**

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1-\lambda_3 & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda_3 & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-b+c \\ -a+3b+c \\ a+b+c \end{pmatrix}.$$

Dies wird durch $a = -1 = b$ und $c = 2$ gelöst. Es ist also $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = -2$.

**3. Schritt.** Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, bilden also die Eigenvektoren aus dem 2. Schritt eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Wir erhalten nun nach Lemma 1 die allgemeine Lösung des Systems $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ als

$$\begin{aligned} \vec{y}(x) &= c_1\, \vec{v}_1 e^{\lambda_1 x} + c_2\, \vec{v}_2 e^{\lambda_2 x} + c_3\, \vec{v}_3 e^{\lambda_3 x} \\ &= c_1 \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \\ e^x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{2x} \\ -e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -e^{-2x} \\ -e^{-2x} \\ 2e^{-2x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

**Beispiel 2.** Man ermittle die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= -5y_1 + 7y_3 \\ y_2' &= 6y_1 + 2y_2 - 6y_3\,. \\ y_3' &= -4y_1 + 6y_3 \end{aligned} \quad \text{Hier ist } A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

**1. Schritt.** Bestimme die Eigenwerte von $A$:

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -5-\lambda & 0 & 7 \\ 6 & 2-\lambda & -6 \\ -4 & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix} &= (-5-\lambda)(2-\lambda)(6-\lambda) + 28(2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)\big((-5-\lambda)(6-\lambda)+28\big) \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2) = (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1) \\ &= -(\lambda-2)^2(\lambda+1). \end{aligned}$$

Es ist $\lambda_1 = -1$ einfacher und $\lambda_2 = 2$ zweifacher Eigenwert.

**2. Schritt.** Bestimme zu $\lambda_1 = -1$ einen Eigenvektor $\vec{v}_1$ und zu $\lambda_2 = 2$ eine Basis des zugehörigen Eigenraums.

**(1) Bestimmung von $\vec{v}_1$ zu $\lambda_1 = -1$:**

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} -5-\lambda_1 & 0 & 7 \\ 6 & 2-\lambda_1 & -6 \\ -4 & 0 & 6-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4a+7c \\ 6a+3b-6c \\ -4a+7c \end{pmatrix}.$$

Setze $a = 7$ und $c = 4$. Es folgt $3b = 6c - 6a = 24 - 42 = -18$, also $b = -6$ und

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}. \text{ Probe: } \begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & -6 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**(2)** Bestimme zum doppelten Eigenwert $\lambda_2 = 2$ eine Basis von $V_2 := \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid (A - \lambda_2 E_3)\vec{v} = \vec{0}\}$ wie folgt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} -5-2 & 0 & 7 \\ 6 & 2-2 & -6 \\ -4 & 0 & 6-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7a+7c \\ 6a-6c \\ -4a+4c \end{pmatrix}.$$ Es folgt $a = c$,

und $b$ ist beliebig wählbar. Daher bilden $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $V_2$.

**3. Schritt.** Es ist also $\dim_{\mathbb{R}} V_2 = 2$ gleich der Vielfachheit von $\lambda_2$ und

$$\vec{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 7e^{-x} \\ -6e^{-x} \\ 4e^{-x} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \\ e^{2x} \end{pmatrix}$$ die allgemeine Lösung.

### Auftreten von nicht-reellen Eigenwerten

Die Matrix $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ besitze Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\beta \neq 0$. Seien $\vec{v}_{1,2} = \vec{w}_1 \pm i\vec{w}_2$ die zugehörigen Eigenvektoren mit $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \mathbb{R}^n$. Dadurch erhält man zwei linear unabhängige komplex-wertige Lösungen $\vec{z}_1(x) = \vec{v}_1 e^{\lambda_1 x}$ und $\vec{z}_2(x) = \vec{v}_2 e^{\lambda_2 x}$ der DGL

$$(*) \qquad \vec{y}\,' = A\vec{y}\,.$$

**Lemma 2.** *Es sind $\vec{y}_1(x) = \Re(\vec{z}_1(x))$ und $\vec{y}_2(x) = \Im(\vec{z}_1(x))$ Lösungen des Systems $(*)$. Ist $\vec{z}_1(x), ..., \vec{z}_n(x)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen für $(*)$, das $\vec{z}_1(x)$ und $\vec{z}_2(x)$ enthält, so kann man $\vec{z}_1(x)$ und $\vec{z}_2(x)$ durch die reellwertigen Lösungen $\vec{y}_1(x)$ und $\vec{y}_2(x)$ austauschen und erhält wieder ein Fundamentalsystem.*

*Beweis.* Da $\vec{z}_2(x)$ konjugiert komplex zu $\vec{z}_1(x)$ ist, gilt

$$\Re(\vec{z}_1(x)) = \frac{1}{2}\big(\vec{z}_1(x) + \vec{z}_2(x)\big) \quad \text{und} \quad \Im(\vec{z}_1(x)) = \frac{1}{2i}\big(\vec{z}_1(x) - \vec{z}_2(x)\big)\,.$$

Also sind $\Re(\vec{z}_1(x))$ und $\Im(\vec{z}_1(x))$ als Linearkombinationen von Lösungen wieder Lösungen von $(*)$. Die zweite Behauptung folgt aus dem Austauschlemma (vgl. z. B. [7, 1.5.4]). □

Wir geben nun noch die beiden reellwertigen Lösungen an. Dabei ist wie oben $\vec{z}_1(x) = \vec{v}_1 e^{\lambda_1 x}$ mit $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ und $\vec{v}_1 = \vec{w}_1 + i\vec{w}_2$.
Mit Hilfe der Eulerschen Formel $e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i\sin(\beta x)$ folgt

$$\begin{aligned}\vec{z}_1(x) &= (\vec{w}_1 + i\vec{w}_2)\, e^{\alpha x}\big(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\big)\\ &= \Big(\vec{w}_1\cos(\beta x) - \vec{w}_2\sin(\beta x) + i\big(\vec{w}_1\sin(\beta x) + \vec{w}_2\cos(\beta x)\big)\Big)e^{\alpha x},\end{aligned}$$

da $i^2 = -1$ gilt. Es folgt

$$(2) \qquad \vec{y}_1(x) = \Re(\vec{z}_1(x)) = \big(\vec{w}_1\cos(\beta x) - \vec{w}_2\sin(\beta x)\big)e^{\alpha x},$$

$$(3) \qquad \vec{y}_2(x) = \Im(\vec{z}_1(x)) = \big(\vec{w}_1\sin(\beta x) + \vec{w}_2\cos(\beta x)\big)e^{\alpha x}.$$

**Beispiel 3.** Man ermittle die allgemeine Lösung des Systems
$\begin{array}{rcl} y_1' &=& y_1 + y_2 \\ y_2' &=& -2y_1 + 3y_2 \end{array}$. Hier ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

**1. Schritt.** Bestimme die Eigenwerte von $A$ und also die Lösungen $\lambda_{1,2}$ der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 - \mathrm{spur}(A)\lambda + \det(A) = 0$. Die Gleichung

$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ hat die Lösungen $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$. Die Eigenwerte sind also $\lambda_1 = 2 + i$ und $\lambda_2 = 2 - i$.

**2. Schritt.** Bestimme einen Eigenvektor $\vec{v}_1 \in \mathbb{C}^2$ zu $\lambda_1$ durch

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} &\overset{!}{=} \begin{pmatrix}1-(2+i) & 1\\ -2 & 3-(2+i)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \qquad \text{mit } a,b \in \mathbb{C}\\ &= \begin{pmatrix}-1-i & 1\\ -2 & 1-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a-ia+b\\ -2a+b-ib\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Aus der 1. Zeile folgt $b = a + ia$. Wähle $a = 1$. Dann folgt $b = 1 + i$. Demgemäß ist $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix}$. Eine Probe zeigt

$$\begin{pmatrix}-1-i & 1\\ -2 & 1-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1-i+1+i\\ -2+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

**3. Schritt.** Bestimme die allgemeine reellwertige Lösung $\vec{y}(x)$.
Es ist $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \vec{w}_1 + i\vec{w}_2$ sowie $\alpha = 2$ und $\beta = 1$.
Nach Lemma 2 und obigen Formeln (2) und (3) bilden die Funktionen
$\vec{y}_1(x) = \big(\vec{w}_1\cos(x) - \vec{w}_2\sin(x)\big)e^{2x}$ und
$\vec{y}_2(x) = \big(\vec{w}_1\sin(x) + \vec{w}_2\cos(x)\big)e^{2x}$
ein Fundamentalsystem von Lösungen. Die allgemeine Lösung ist also

$$\vec{y}(x) = c_1\begin{pmatrix}\cos(x)\\ \cos(x)-\sin(x)\end{pmatrix}e^{2x} + c_2\begin{pmatrix}\sin(x)\\ \sin(x)+\cos(x)\end{pmatrix}e^{2x} \text{ mit } c_1\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

## 12.2 Rückführung auf eine Normalform

Wir gehen nun der Frage nach, wie man das System $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ lösen kann, wenn die Matrix $A$ nicht diagonalisierbar ist. Man kann dann das System durch Rückführung auf eine Normalform von $A$ lösen, denn es gibt stets eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ so, dass $S^{-1}AS$ eine *Jordansche Normalform* hat. Sei $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ die multiplikative Gruppe der invertierbaren Matrizen in $\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

**Lemma.** *Für jede Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ gilt: Eine Funktion $\vec{y}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ ist genau dann eine Lösung des Systems $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, wenn die Funktion $\vec{z} := S^{-1}\vec{y}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ eine Lösung des Systems $\vec{z}\,' = (S^{-1}AS)\vec{z}$ ist.*

*Beweis.* Es gilt $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ genau dann, wenn

$$S^{-1}\vec{y}\,' = S^{-1}A\vec{y} = (S^{-1}AS)S^{-1}\vec{y}$$

gilt, d. h. genau dann, wenn $\vec{z}\,' = (S^{-1}AS)\vec{z}$ gilt. □

**Folgerung.** *Wenn $Z(x)$ eine Wronski-Matrix von Lösungen für das System $\vec{z}\,' = (S^{-1}AS)\vec{z}$ ist, so ist $Y(x) = SZ(x)$ eine Wronski-Matrix von Lösungen für das Ausgangssystem $\vec{y}\,' = A\vec{y}$.*

Um das System $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ zu lösen, führt man zunächst die drei Schritte aus 12.1 aus. Falls sich dann im 3. Schritt herausstellt, dass keine Diagonalierbarkeit vorliegt, so geht man weiter so vor:

**4. Schritt.** Bestimme eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ so, dass $J := S^{-1}AS$ eine *Jordansche Normalform* hat.

**5. Schritt.** Bestimme eine Wronski-Matrix $Z(x)$ von linear unabhängigen Lösungen für das System $\vec{z}\,' = J\vec{z}$.

**6. Schritt.** Berechne die Wronski-Matrix $Y(x) = SZ(x)$ von Lösungen für das Ausgangssystem $\vec{y}\,' = A\vec{y}$.

**Beispiel 1.** Bestimme eine Wronski-Matrix von Lösungen für das System $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

**1. Schritt.** Bestimme die Eigenwerte von $A$: Es ist
$\chi(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 & 3 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(3-\lambda)^2 - 10 + 3\lambda + 6(3-\lambda) =$
$-\lambda(9 - 6\lambda + \lambda^2) + 8 + 3\lambda - 6\lambda = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = -(\lambda-2)^3$. Die Matrix $A$ hat also den dreifachen Eigenwert $\lambda = 2$.

**2. Schritt.** Bestimme zu $\lambda = 2$ einen Eigenvektor $\vec{v}_1 \in \mathbb{R}^3$:
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4b+3c \\ -a-2b-c \\ a+2b+c \end{pmatrix}$. Durch Subtraktion ergibt sich $2b+2c = 0$ und also $b = -c$. Dies in die erste Gleichung eingesetzt ergibt $a + b = 0$ und also $a = -b$. Setze $a = 2, b = -2$ und $c = 2$. Es ist also $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $V_\lambda$ zum Eigenwert $\lambda = 2$.

**3. Schritt.** Es ist $\dim_{\mathbb{R}} V_\lambda = 1$ und $\lambda$ ein dreifacher Eigenwert. Die Matrix $A$ ist also nicht diagonalisierbar.

**4. Schritt.** Bestimme die Matrix $S$. Als erste Spalte nehmen wir den Vektor $\vec{v}_1$ aus dem 2. Schritt. Die zweite Spalte $\vec{v}_2$ und die dritte Spalte $\vec{v}_3$ bestimmen wir durch $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} a+4b+3c \\ -a-2b-c \\ a+2b+c \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} a+4b+3c \\ -a-2b-c \\ a+2b+c \end{pmatrix}$.

Die zweite Spalte $\vec{v}_2$ wird also aus den Gleichungen $2 = a + 4b + 3c$ und $2 = a+2b+c$ gewonnen. Durch Subtraktion ergibt sich $2b+2c = 0$. Setzen wir $c = 1$, $b = -1$ und also $a = 3$, so erhalten wir $\vec{v}_2$.
Die dritte Spalte $\vec{v}_3$ ergibt sich nun aus den Gleichungen $3 = a + 4b + 3c$ und $1 = a + 2b + c$, was durch $a = 0 = b$ und $c = 1$ erfüllt wird.
Damit ist $S = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Es ist $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ die Jordansche Normalform von $A$, da $\lambda = 2$ ein dreifacher Eigenwert von $A$ ist. Ferner ist $\det(S) = 4 \neq 0$ und also $S$ invertierbar. Eine Probe ergibt $J = S^{-1}AS$, denn es ist $SJ = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 \\ -4 & -4 & -1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ und
$AS = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 \\ -4 & -4 & -1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

**5. Schritt.** Bestimme eine Wronski-Matrix von Lösungen für das System $\vec{z}\,' = J\vec{z}$ und also für das System

$$\begin{aligned} z_1' &= 2z_1 + z_2 \\ z_2' &= 2z_2 + z_3 \\ z_3' &= 2z_3. \end{aligned}$$

<u>1. Spalte:</u> Es ist $z_3 \equiv 0$ eine Lösung der DGL $z_3' = 2z_3$ und also $z_2 \equiv 0$ eine Lösung der DGL $z_2' = 2z_2 + z_3$. Nun ist nur noch die DGL $z_1' = 2z_1$ nicht-trivial zu lösen, was durch $z_1(x) = e^{2x}$ getan ist.
<u>2. Spalte:</u> Es ist $z_3 \equiv 0$ eine Lösung von $z_3' = 2z_3$. Die DGL $z_2' = 2z_2$ hat die Lösung $z_2(x) = e^{2x}$, und die DGL $z_1' = 2z_1 + e^{2x}$ wird nach Typ III in 4.6 durch $z_1(x) = xe^{2x}$ gelöst.
<u>3. Spalte:</u> Es ist $z_3(x) = e^{2x}$ eine Lösung von $z_3' = 2z_3$. Die DGL $z_2' = 2z_2 + e^{2x}$ hat nach Typ III die Lösung $z_2(x) = xe^{2x}$, und die DGL $z_1' = 2z_1 + xe^{2x}$ wird nach Typ III durch $z_1(x) = \frac{x^2}{2!}e^{2x}$ gelöst.
Wir erhalten also die Wronski-Matrix $Z(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^{2x}$.

**6. Schritt.** Berechne die Wronski-Matrix $Y(x) = SZ(x)$ von Lösungen für das Ausgangssystem $\vec{y}\,' = A\vec{y}$. Es ist $\det(Z(x)) \neq 0$, also $\det(Y(x)) \neq 0$, und

$$Y(x) = SZ(x) = \begin{pmatrix} 2 & 2x+3 & x^2+3x \\ -2 & -2x-1 & -x^2-x \\ 2 & 2x+1 & x^2+x+1 \end{pmatrix} e^{2x}.$$

**Bemerkung.** 1. Die obige Matrix zu $Y(x)$ hat in der $m$-ten Spalte jeweils Polynome vom Grad $\leqslant m$ für $m = 1, 2, 3$. Dies gilt auch allgemein: Ist $\lambda$ ein $k$-facher Eigenwert von $A$, so hat das System $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ genau $k$ linear unabhängige Lösungen der Form

$$\vec{p}_m(x)e^{\lambda x} \quad \text{mit} \quad \vec{p}_m(x) = \begin{pmatrix} p_{m1}(x) \\ \vdots \\ p_{mn}(x) \end{pmatrix}$$

für $m = 1, \dots, k$, wobei die Komponenten $p_{mj}(x)$ für $j = 1, \dots, n$ Polynome vom Grad $\leqslant m - 1$ sind. Hieraus ergibt sich ein Lösungsverfahren für das System $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, bei dem die Rückführung auf die Jordansche Normalform nicht gebraucht wird, vgl. [27, § 17 VIII, IX].

2. Ist $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ und besitzt $A$ komplexe Eigenwerte, so erhält man gemäß Lemma 2 in 12.1 aus einem komplexwertigen Fundamentalssystem ein Fundamentalssystem von Lösungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ für das System $\vec{y}\,' = A\vec{y}$.

**Beispiel 2.** Löse die Anfangswertaufgabe $\begin{array}{rcl} y_1' &=& y_2 \\ y_2' &=& 4y_1 + 3y_2 - 4y_3 \\ y_3' &=& y_1 + 2y_2 - y_3 \end{array}$

mit $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 2$, also die Aufgabe $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ mit
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

**1. Schritt.** Bestimme die Eigenwerte von $A$:
Es ist $\chi(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 4 & 3-\lambda & -4 \\ 1 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$
$= (-3\lambda+\lambda^2)(-1-\lambda)-4-4(-1-\lambda)-8\lambda = -\lambda^3+2\lambda^2-\lambda = -\lambda(\lambda^2-2\lambda+1) = -\lambda(\lambda-1)^2$. Also ist $\lambda_1 = 0$ einfacher und $\lambda_2 = 1$ zweifacher Eigenwert.

**2. Schritt. (1)** Bestimme zu $\lambda_1 = 0$ einen Eigenvektor.
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 4a+3b-4c \\ a+2b-c \end{pmatrix}$. Es folgt $b = 0$, $a = c$. Also ist $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu $\lambda_1 = 0$.

**(2)** Bestimme zu $\lambda_2 = 1$ eine Basis von $V_2 := \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid (A - \lambda_2 E_3)\vec{v} = \vec{0}\}$ wie folgt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+b \\ 4a+2b-4c \\ a+2b-2c \end{pmatrix}, \text{ also } a = b \text{ und } 3a = 2c\,,$$

und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ bildet eine Basis von $V_2$.

**3. Schritt.** Es ist $\dim_{\mathbb{R}} V_2 = 1$ und der zugehörige Eigenwert $\lambda_2 = 1$ hat die Vielfachheit 2. Die Matrix $A$ ist also nicht diagonalisierbar. Die Jordansche Normalform von $A$ ist die Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**4. Schritt.** Bestimme eine invertierbare Matrix $S$ so, dass $J = S^{-1}AS$ gilt. Als erste Spalte von $S$ nehmen wir den Vektor $\vec{v}_1$ und als zweite Spalte den Vektor $\vec{v}_2$. Die dritte Spalte $\vec{v}_3$ bestimmt sich dann so:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+b \\ 4a+2b-4c \\ a+2b-2c \end{pmatrix}.$$ Setze $b = 1$. Dann ist $-a+1 = 2$, also $a = -1$ und $c = -1$. Es ist dann $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Da $\det(S) = -1 \neq 0$ gilt, ist $S$ invertierbar. Eine Probe ergibt $J = S^{-1}AS$, denn es ist $SJ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ und

$$AS = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

**5. Schritt.** Das System $\vec{z}\,' = J\vec{z}$ hat nach Typ II, III in Tabelle 4.6 die Wronski-Matrix $Z(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^x & xe^x \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix}$.

**6. Schritt.** Berechne die Wronski-Matrix $Y(x)$. Es ist

$$Y(x) = SZ(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^x & xe^x \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2e^x & (2x-1)e^x \\ 0 & 2e^x & (2x+1)e^x \\ 1 & 3e^x & (3x-1)e^x \end{pmatrix}$$

**7. Schritt.** Einsetzen der Anfangsbedingung: Die allgemeine Lösung des Systems $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ ist nach dem 6. Schritt

$$\vec{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^x + c_3 \begin{pmatrix} 2x-1 \\ 2x+1 \\ 3x-1 \end{pmatrix} e^x$$

mit $c_1\ c_2\,,\ c_3 \in \mathbb{R}$.

Es ist $\vec{y}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, und also ist das Gleichungssystem $\begin{array}{rcl} c_1 + 2c_2 - c_3 & = & 0 \\ 2c_2 + c_3 & = & 1 \\ c_1 + 3c_2 - c_3 & = & 2 \end{array}$ zu lösen.

Subtrahiere die 1. Zeile von der 3. Zeile. Dann folgt $c_2 = 2$. Einsetzen von $c_2 = 2$ in die 2. Zeile ergibt $c_3 = -3$. Es folgt $c_1 = -7$. Hieraus ergibt sich die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} e^x + \begin{pmatrix} -6x+3 \\ -6x-3 \\ -9x+3 \end{pmatrix} e^x = \begin{pmatrix} -7+7e^x-6xe^x \\ e^x-6xe^x \\ -7+9e^x-9xe^x \end{pmatrix}.$$

## 12.3 Exponentialfunktion einer Matrix

Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Die Anfangswertaufgabe $y' = ay$ mit $y(\xi) = \eta$ hat nach Satz 3 in Abschnitt 4.2 die eindeutig bestimmte Lösung $y(x) = e^{a(x-\xi)}\eta$.

Ziel ist es, zu zeigen: Die Anfangswertaufgabe $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ mit $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ und $\vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$ hat die eindeutig bestimmte Lösung $\vec{y}(x) = e^{A(x-\xi)}\vec{\eta}$.

Für $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)^t \in \mathbb{C}^n$ und $A = (a_{jk}) \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ sei

$$\|\vec{a}\,\| := \max(|a_1|, \dots, |a_n|) \quad\text{und}\quad \|A\| := \max_{1\leqslant j,k\leqslant n}(|a_{jk}|).$$

Es gilt dann: $\|AB\| \leqslant n\,\|A\|\cdot\|B\|$ und insbesondere $\|A^k\| \leqslant n^{k-1}\|A\|^k$, sowie $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$ und $\|A\vec{a}\,\| \leqslant \|A\|\cdot\|\vec{a}\|$ für $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ und $\vec{a} \in \mathbb{C}^n$. Die Reihe $\boxed{e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}}$ konvergiert absolut, da sie die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{n^{k-1}\|A\|^k}{k!}$ als konvergente Majorante besitzt. Wir erhalten nun die *Matrixexponentialfunktion*

$$\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})\,,\ A \mapsto e^A\,.$$

**Lemma 1.** *Es ist* $e^A e^B = e^{A+B}$*, falls* $AB = BA$ *gilt. Insbesondere ist* $e^A$ *invertierbar mit inverser Matrix* $(e^A)^{-1} = e^{-A}$*. Ist* $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$*, so gilt* $e^{S^{-1}AS} = S^{-1}e^A S$*.*

*Beweis.* Aus $AB = BA$ folgt die Gültigkeit des binomischen Lehrsatzes $(A+B)^m = \sum\limits_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k\, B^{m-k}$.

Hieraus folgt $e^{A+B} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(A+B)^m}{m!} = \sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{m} \frac{A^k B^{m-k}}{k!(m-k)!} \overset{\text{abs.Konv.}}{=} e^A e^B$ .

Der zweite Teil folgt nun aus $e^A e^{-A} = e^{A-A} = E_n$ . Es gilt $(S^{-1}AS)^k = (S^{-1}AS)(S^{-1}AS)\cdots(S^{-1}AS) = S^{-1}A^k S$ für alle $k \in \mathbb{N}$ . Hieraus folgt der dritte Teil, denn $e^{S^{-1}AS} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(S^{-1}AS)^k}{k!} = S^{-1}\Big(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\Big)S = S^{-1}e^A S$. □

**Beispiel 1.** Sei $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Dann ist $A^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix}$ und also $e^A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}$. Analog für $n > 2$ .

**Beispiel 2.** $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = aE_2 + b\mathfrak{J}$ mit $\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $a, b \in \mathbb{R}$.
Da $E_2\,\mathfrak{J} = \mathfrak{J}\,E_2$ gilt, folgt $e^A = e^{aE_2 + b\mathfrak{J}} = e^{aE_2}\cdot e^{b\mathfrak{J}}$. Es ist $\mathfrak{J}^2 = -E_2$ , $\mathfrak{J}^3 = -\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}^4 = E_2$ . Hieraus folgt

$$\begin{aligned} e^{b\mathfrak{J}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!}\,\mathfrak{J}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k}}{(2k)!} E_2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k+1}}{(2k+1)!}\,\mathfrak{J} \\ &= \cos(b)E_2 + \sin(b)\,\mathfrak{J}. \end{aligned}$$

Mit Beispiel 1 folgt hieraus
$e^A = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix} = e^a\begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}$.

**Beispiel 3.** Sei $J := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Dann ist $Jx = \lambda x E_3 + N$ mit

$N = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ also $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Es folgt $e^N = E_3 + N + \frac{N^2}{2!}$. Da $Jx = \lambda x E_3 + N$ und $\lambda x E_3 \cdot N = N \cdot \lambda x E_3$ gilt, folgt aus Lemma 1 die folgende Formel

$$e^{Jx} = e^{\lambda x E_3}\, e^N = e^{\lambda x} E_3\, e^N = e^{\lambda x}\Big(E_3 + N + \frac{N^2}{2!}\Big) = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda x}.$$

Für $\lambda = 2$ ist also $e^{Jx} = Z(x)$ die Wronski-Matrix von Lösungen für das System $\vec{z}\,' = J\vec{z}$ aus dem 5. Schritt von Beispiel 1 in 12.2.

**Beispiel 4.** Sei $J := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Dann ist $Jx = Dx + N$ mit

$$Dx = \begin{pmatrix} \lambda_1 x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 x & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 x \end{pmatrix} \text{ und } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ also } N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $e^N = E_3 + N$. Aus Lemma 1 folgt, da $Dx \cdot N = N \cdot Dx$ gilt,

$$e^{Jx} = e^{Dx+N} = e^{Dx}\, e^N = e^{Dx}(E_3 + N) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} & xe^{\lambda_2 x} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}.$$

Für $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 1$ ist also $e^{Jx} = Z(x)$ die Wronski-Matrix von Lösungen für das System $\vec{z}\,' = J\vec{z}$ aus dem 5. Schritt von Beispiel 2 in 12.2.

**Lemma 2.** *Sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ fest vorgegeben. Dann ist die Funktion $Y\colon \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, $x \mapsto e^{Ax}$ nach $x$ differenzierbar, und es gilt*

$$Y\,'(x) = A\, e^{Ax}.$$

*Beweis.* Wie bisher sei $E_n$ die $n \times n$-Einheitsmatrix. Für $h \neq 0$ in $\mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{e^{A(x+h)} - e^{Ax}}{h} &= \frac{e^{Ax}e^{Ah} - e^{Ax}}{h} = \frac{e^{Ah} - E_n}{h}\, e^{Ax} \\ &= \frac{1}{h}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(Ah)^k}{k!}\Big) e^{Ax} = A\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(Ah)^{k-1}}{k!}\Big) e^{Ax} \\ &= A\Big(E_n + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(Ah)^{k-1}}{k!}\Big) e^{Ax}. \end{aligned}$$

Da $\lim\limits_{h\to 0}\Big(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(Ah)^{k-1}}{k!}\Big) = 0$ gilt, folgt bezüglich oben definierter Norm $\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{A(x+h)} - e^{Ax}}{h} = A\, e^{Ax}$. □

**Lemma 3.** *Sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ und $\vec{u}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ eine differenzierbare Funktion. Dann gilt die* Produktregel*:* $\big(e^{Ax} \cdot \vec{u}(x)\big)' = Ae^{Ax} \cdot \vec{u}(x) + e^{Ax} \cdot \vec{u}\,'(x)$.

*Beweis.* Sei $h \neq 0$ in $\mathbb{R}$. Dann ist $e^{A(x+h)}\vec{u}(x+h) - e^{Ax}\vec{u}(x)$
$= e^{A(x+h)}\vec{u}(x+h) - e^{A(x+h)}\vec{u}(x) + e^{A(x+h)}\vec{u}(x) - e^{Ax}\vec{u}(x)$
$= e^{A(x+h)}(\vec{u}(x+h) - \vec{u}(x)) + (e^{A(x+h)} - e^{Ax})\vec{u}(x)$ und also

$$\begin{aligned}\left(e^{Ax} \cdot \vec{u}(x)\right)' &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{A(x+h)}\vec{u}(x+h) - e^{Ax}\vec{u}(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} e^{A(x+h)} \frac{\vec{u}(x+h) - \vec{u}(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{e^{A(x+h)} - e^{Ax}}{h}\, \vec{u}(x) \\ &= e^{Ax} \cdot \vec{u}\,'(x) + Ae^{Ax} \cdot \vec{u}(x)\end{aligned}$$ □

**Folgerung.** *Sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Dann ist die Matrix $Y(x) := e^{Ax}$ eine Wronski-Matrix von Lösungen für das System $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, und es gilt* $\det(Y(x)) \neq 0$. (Denn $Y'(x) = Ae^{Ax} = AY(x)$, und es ist $\det(Y(0)) = 1$.)

## 12.4 Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Nach Satz 3 in Abschnitt 4.2 ist jede Lösung der DGL $y' = ay$ mit $a \in \mathbb{R}$ von der Form $y(x) = c\,e^{ax}$, und die Anfangswertaufgabe $y' = ay$ mit $y(\xi) = \eta$ hat die eindeutig bestimmte Lösung $y(x) = e^{a(x-\xi)}\eta$. Ganz analog gilt für $n \geqslant 2$ der folgende Satz.

**Satz 32.** *Sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Dann ist jede Lösung des Systems $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ von der Form $\vec{y}(x) = e^{Ax}\vec{c}$ mit einem Vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$.*
*Sind $\xi \in \mathbb{R}$ und $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^n$ beliebig, aber fest vorgegeben, so hat die Anfangswertaufgabe $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ mit $\vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$ die eindeutig bestimmte, auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung $\vec{y}(x) = e^{A(x-\xi)}\,\vec{\eta}$.*

*Beweis.* Die Funktion $\vec{y}(x) = e^{Ax}\vec{c}$ ist eine Lösung des Systems $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, denn es ist $\vec{y}\,'(x) = Ae^{Ax}\vec{c} = A\vec{y}(x)$. Sei $\vec{y}(x)$ eine Lösung des Systems und $\vec{\varphi}(x) := e^{-Ax}\vec{y}(x)$. Dann ist nach der Produktregel

$$\vec{\varphi}\,'(x) = -Ae^{-Ax}\vec{y}(x) + e^{-Ax}\vec{y}\,'(x) = -Ae^{-Ax}\vec{y}(x) + e^{-Ax}A\vec{y}(x) = \vec{0}\,.$$

Also ist $\vec{\varphi}(x) = \vec{c}$ konstant und daher $\vec{y}(x) = e^{Ax}\vec{c}$ nach Lemma 1 in 12.3.
Für die Lösung $\vec{y}(x) = e^{A(x-\xi)}\,\vec{\eta}$ gilt $\vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$. Sei $\vec{z}(x)$ auch eine Lösung mit $\vec{z}(\xi) = \vec{\eta}$. Es ist $\vec{z}(x) = e^{Ax}\vec{c}$, also $\vec{z}(\xi) = e^{A\xi}\vec{c} \overset{!}{=} \vec{\eta}$. Es folgt $\vec{c} = e^{-A\xi}\vec{\eta}$ und $\vec{z}(x) = e^{A(x-\xi)}\vec{\eta} = \vec{y}(x)$. □

**Beispiel.** Es ist die Anfangswertaufgabe $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ mit
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit Hilfe von Satz 32 zu lösen. Nach diesem Satz ist die Lösung durch $\vec{y}(x) = e^{A(x-0)}\,\vec{\eta}$ gegeben. Es ist also die Matrix $e^{Ax}$ zu bestimmen.

Die Jordansche Normalform $J = S^{-1}AS$ und die Matrix $S$ hatten wir schon in Beispiel 2 in 12.2 bestimmt. Hier brauchen wir auch noch die Matrix $S^{-1}$ für die Lösung. Es ist $A = SJS^{-1}$ mit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } S^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $e^{Ax} = e^{SJxS^{-1}} = Se^{Jx}S^{-1}$ nach Lemma 1 in 12.3. Die Matrix $e^{Jx}$ hatten wir in Beipiel 4 in 12.3 bestimmt, und wir erhalten damit

$$Se^{Jx} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^x & xe^x \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2e^x & (2x-1)e^x \\ 0 & 2e^x & (2x+1)e^x \\ 1 & 3e^x & (3x-1)e^x \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$e^{Ax} = Se^{Jx}S^{-1} = \begin{pmatrix} 5-4e^x+4xe^x & 1-e^x+2xe^x & -4+4e^x-4xe^x \\ 4xe^x & e^x+2xe^x & -4xe^x \\ 5-5e^x+6xe^x & 1-e^x+3xe^x & -4+5e^x-6xe^x \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{y}(x) = e^{A(x-0)}\vec{\eta} = e^{Ax}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7+7e^x-6xe^x \\ e^x-6xe^x \\ -7+9e^x-9xe^x \end{pmatrix}$$

ist die Lösung der Anfangswertaufgabe, wie schon im 7. Schritt am Ende von 12.2 ermittelt wurde.

Wir betrachten nun das inhomogene DGL-System $\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$, wobei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ und $\vec{b}\colon I \to \mathbb{R}^n$ auf einem Intervall $I$ in $\mathbb{R}$ stetig ist.
Ist $Y(x)$ eine Wronski-Matrix von Lösungen für das System $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ und ist $\det(Y(x)) \neq 0$, so erhält man nach Satz 31 in 11.4 eine spezielle Lösung $\vec{y}_s(x)$ des inhomogenen Systems als

$$(*) \qquad \vec{y}_s(x) = Y(x) \cdot \int Y(x)^{-1}\,\vec{b}(x)\,dx\,.$$

Nach der Folgerung am Ende von Abschnitt 12.3 kann man $Y(x) = e^{Ax}$ wählen. Mit Hilfe von Lemma 1 in 12.3 ergibt sich durch Einsetzen von $Y(x) = e^{A(x)}$ in $(*)$ die spezielle Lösung

$$\vec{y}_s(x) = e^{Ax} \cdot \int e^{-Ax}\,\vec{b}(x)\,dx$$

für das System $\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$.

**Satz über die Lösungen von $\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$.** *Sei $I$ ein Intervall in $\mathbb{R}$. Ferner sei $\vec{b}\colon I \to \mathbb{R}^n$ stetig und $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Dann hat die Anfangswertaufgabe $\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$ mit $\vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$ für jedes $\xi \in I$ und $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^n$ die eindeutig bestimmte Lösung $\vec{y}\colon I \to \mathbb{R}^n$ mit $\vec{y}(x) = e^{A(x-\xi)}\,\vec{\eta} + e^{Ax}\int\limits_{\xi}^{x} e^{-At}\,\vec{b}(t)\,dt$.*

*Beweis.* Nach Satz 32 hat die zugehörige homogene Anfangswertaufgabe die Lösung $\vec{y}_h(x) = e^{A(x-\xi)}\,\vec{\eta}$. Nach Obigem ist $\vec{y}_s(x) = e^{Ax}\int\limits_{\xi}^{x} e^{-At}\,\vec{b}(t)\,dt$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems mit $\vec{y}_s(\xi) = 0$.
Nach dem Lemma in Abschnitt 11.4 ist $\vec{y}(x) = \vec{y}_h(x) + \vec{y}_s(x)$ eine Lösung des Systems $\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$, und es gilt $\vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$.
Die Eindeutigkeitsaussage folgt aus Satz 27 in Abschnitt 11.1. $\square$

## 12.5 Aufgaben 45 – 48

**Aufgabe 45.** Man bestimme die allgemeine Lösung des DGL-Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 + 2y_2 + y_3 \\ y_2' &= -2y_1 + y_2 + y_3 \\ y_3' &= -2y_1 + 2y_2 \,. \end{aligned}$$

**Aufgabe 46.** (Zur Wiederholung) Man ermittle die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= e^{-x} y_2 + x \\ y_2' &= e^{x} y_1 + y_2 \,. \end{aligned}$$

Dabei soll zunächst ein Fundamentalsystem von Lösungen für das zugehörige homogene System mit Hilfe von Satz 17 bestimmt werden, ausgehend von der Lösung $\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} e^{x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}$.

**Aufgabe 47.** Man bestimme die allgemeine Lösung des DGL-Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 - y_3 \\ y_2' &= y_1 + 3\,y_2 + y_3 \\ y_3' &= -3\,y_1 + y_2 - y_3 \,. \end{aligned}$$

**Aufgabe 48.** Man bestimme die allgemeine Lösung des DGL-Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= 4\,y_1 - 4\,y_2 + y_3 \,. \end{aligned}$$

# Weitere Aufgaben

## 13 Ergänzungsaufgaben 49 – 67

Hier kommen ein paar weitere Aufgaben in umgekehrter Reihenfolge, d. h. erst kommen Aufgaben zu Kapitel 12 und dann absteigend Aufgaben bis hin zu Kapitel 2.

**Aufgabe 49.** Für das DGL-System $\begin{array}{rcl} y_1' &=& 3y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2' &=& 2y_1 - y_2 + y_3 \\ y_3' &=& -2y_1 + 2y_2 \end{array}$ bestimme man

(a) die Eigenwerte der zugehörigen Koeffizientenmatrix $A$,

(b) eine Basis von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von $A$ besteht,

(c) die allgemeine Lösung des Systems mit Hilfe von (a) und (b).

**Aufgabe 50.** Zum DGL-System $\begin{array}{rcl} y_1' &=& \frac{3}{x}\, y_1 + y_2 + 3x^2 \\ y_2' &=& -\frac{2}{x^2}\, y_1 - \frac{1}{x}\, y_2 + x \end{array}$ bestimme man für $x > 0$

(a) ein Fundamentalsystem von Lösungen für das zugehörige homogene System durch Rückführung auf eine Euler-DGL in $y_1$,

(b) eine spezielle Lösung mit Hilfe von (a) und Variation der Konstanten.

**Aufgabe 51.** Man bestimme für $x > 0$ die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= -x\, y_2 + 4 \\ y_2' &= -\frac{3}{x^3}\, y_1 \ . \end{aligned}$$

**Aufgabe 52.** Man ermittle für $x > 0$ die allgemeine Lösung der DGL

$$x^3 y''' + 3x^2 y'' + 7xy' - 20y = 40\ln(x) + 8 \ .$$

**Aufgabe 53.** Man ermittle für $x > 0$ die allgemeine Lösung der DGL

$$x^3 y''' + 3x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^4 \ .$$

**Aufgabe 54.** Seien $a_0, a_1 \colon I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, und sei $y_1 \colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL

$$(*) \qquad y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0$$

mit $y_1(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Ferner sei $\mathcal{A}_1(x)$ eine Stammfunktion von $a_1(x)$. Man folgere aus Satz 17 in Abschnitt 9.2 die Aussage von Satz 8, dass die Funktion

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} \, e^{-\mathcal{A}_1(x)} \, dx$$

eine von $y_1$ linear unabhängige Lösung von $(*)$ ist.

**Aufgabe 55.** Sei $I$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ und sei $y_1 \colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $y_1(x) > 0$ für alle $x \in I$.

(a) Man löse die DGL $y' = \big(-2 \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} - 2x\big) y \,.$

(b) Sei $\mathcal{A}_2(x)$ eine Stammfunktion von $a_2(x) := -\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} - 2x$ und sei $y(x)$ die Lösung aus (a). Man zeige, dass $y(x) = \frac{c}{y_1(x)} \, e^{\mathcal{A}_2(x)}$ für alle $x \in I$ gilt.

**Aufgabe 56.** Man finde heraus, warum die Formel von Neumann in Abschnitt 7.7 nicht für $|x| < 1$ gilt.

**Aufgabe 57.** Sei $I_1 = \mathbb{R}_{>1}$ oder $I_1 = \mathbb{R}_{<-1}$. Man bestimme für $x \in I_1$ mit Hilfe von Satz 8 und Partialbruchzerlegung eine zur Lösung $P_1(x) = x$ linear unabhängige Lösung $\mathfrak{Q}_1(x)$ der Legendre-DGL

$$y'' + \frac{2x}{x^2 - 1} y' - \frac{2}{x^2 - 1} y = 0.$$

**Aufgabe 58.** Man löse für $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ die Anfangswertaufgabe

$$y'' + \tan(x) \, y' - \cos^2(x) \, y = 0$$

mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$, indem zunächst mit Hilfe von Satz 8 eine zur Lösung $y_1(x) = e^{\sin(x)}$ linear unabhängige Lösung $y_2(x)$ bestimmt und die allgemeine Lösung der DGL angegeben wird.

**Aufgabe 59.** Man löse für $x > 0$ die Anfangswertaufgabe

$$y'' - \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)y' + \Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{2x}\Big)y = 0 \quad \text{mit} \quad y(2) = e \quad \text{und} \quad y'(2) = 2e,$$

indem zunächst mit Hilfe von Satz 8 eine zur Lösung $y_1(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ linear unabhängige Lösung $y_2(x)$ bestimmt wird und die allgemeine Lösung angegeben wird.

**Aufgabe 60.** Man zeige, dass aus der Rekursionsfomel

$$c_{n+2} = \frac{c_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$$

die Beziehung $c_{3n+1} = \dfrac{c_1}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n+1) \cdot 3^n \cdot n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt.

**Aufgabe 61.** Man löse die Anfangswertaufgabe $y'' = \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,(y'+1)$ mit $y(-1) = \frac{7}{6}$ und $y'(-1) = 0$. Man begründe auch, warum $x^2 + x + 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

**Aufgabe 62.** Man löse die DGL $y' = e^{x-y}$ mit Typ V und Typ IX in Abschnitt 4.6.

**Aufgabe 63.** Man löse für $x > 0$ die Anfangswertaufgabe

$$x^3 y' + x^2 y - y^2 = 0 \qquad \text{mit} \quad y(1) = 2\,.$$

**Aufgabe 64.** Man löse für $x > 0$ die Anfangswertaufgabe

$$xy' = -y - x^4 e^{x^2} y^3 \qquad \text{mit} \qquad y(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

**Aufgabe 65.** Man löse für $x > 0$ die Anfangswertaufgabe

$$y' = -x^2\, y + \frac{1}{3}\,\sin(x)\, e^{x^3} y^4 \qquad \text{mit} \qquad y(0) = -\frac{1}{2}\,.$$

**Aufgabe 66.** Man löse die Anfangswertaufgabe

$$y' = -x^3\, y - \frac{1}{4}\,\sin(x)\, e^{x^4} y^5 \qquad \text{mit} \qquad y(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

**Aufgabe 67.** Man folgere aus der Produktregel durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ die *Leibniz-Formel*

$$D^n\big(f(x)g(x)\big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)\, g^{(k)}(x)$$

mit $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$ und $n$-mal differenzierbaren Funktionen $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ .

# 14 Wiederholungsaufgaben 68 – 80

Hier kommen Aufgaben, die so ähnlich sind wie die Aufgaben zur Wiederholung, die unter den ersten 48 Aufgaben vorkamen. Diese Aufgaben, sowie die Aufgaben 43 und 54 und alle folgenden sind von Oscar Marmon gestellt und gelöst.

**Aufgabe 68.** Man löse die Anfangswertaufgabe

$$y' = -\frac{x+2}{(x^2+4x+3)^2} \quad \text{mit} \quad y(0) = \frac{1}{5}\,.$$

Dabei ist auch das Lösungsintervall anzugeben.

**Aufgabe 69.** Man löse die Anfangswertaufgabe

$$y' = xy^3 \quad \text{mit} \quad y(0) = \frac{1}{2}\,.$$

Dabei ist auch das Lösungsintervall anzugeben.

**Aufgabe 70.** Man löse die Anfangswertaufgabe

$$y' = x^2(1-y) \quad \text{mit} \quad y(0) = \frac{2}{3}\,.$$

und bestätige das Ergebnis durch eine Probe.

**Aufgabe 71.** Die Wachstumsgeschwindigkeit einer Bakterienpopulation sei proportional zu der gerade vorhandenen Größe der Population. Die Anzahl $P(t)$ der zur Zeit $t \geqslant 0$ vorhandenen Bakterien erfüllt also die DGL $\frac{dP}{dt} = \alpha P$ mit einer positiven Konstanten $\alpha$.

(a) Man bestimme $P(t)$, wenn am Anfang 500 Bakterien und nach 24 Stunden 800 Bakterien vorhanden sind.

(b) Nach wieviel Stunden hatte sich die Bakterienpopulation um 50% vermehrt?

**Aufgabe 72.** Beim Lösen von Zucker in Wasser sei die Lösungsgeschwindigkeit proportional zu der Menge von noch nicht gelöstem Zucker. Die Masse $Z(t)$ (in kg) des zur Zeit $t \geqslant 0$ vorhandenen Zuckers erfüllt also die DGL $\frac{dZ}{dt} = -kZ$ mit einer positiven Konstanten $k$.

(a) Man bestimme $Z(t)$, wenn am Anfang 50 kg und nach 5 Stunden 20 kg ungelöster Zucker vorhanden ist.

(b) Nach wieviel Stunden werden 90% des Zuckers aufgelöst sein?

**Aufgabe 73.** Man löse für $x > 0$ die Anfangswertaufgabe

$$y' + \frac{y}{x} = e^{3x} \quad \text{mit} \quad y(2) = 0\,.$$

**Aufgabe 74.** Man löse für $x > 0$ die Anfangswertaufgabe

$$y' + \frac{y}{x} = \sin(\pi x) \quad \text{mit} \quad y(1) = 0\,.$$

**Aufgabe 75.** Man löse die Anfangswertaufgabe

$$y'' = e^{2y} \quad \text{mit} \quad y(1) = 0 \;\text{ und }\; y'(1) = 1$$

mit der Methode aus 6.3. Dabei ist das Lösungsintervall anzugeben.

**Aufgabe 76.** Man löse die Anfangswertaufgabe

$$y'' = 6y^2 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \;\text{ und }\; y'(0) = -2$$

mit der Methode aus 6.3.

**Aufgabe 77.** Man löse die Anfangswertaufgabe

$$y'' = 10(y')^{4/5} \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \;\text{ und }\; y'(0) = 1.$$

**Aufgabe 78.** Man löse die Anfangswertaufgabe

$$y'' = 12(y')^{5/6} \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \;\text{ und }\; y'(0) = 1.$$

**Aufgabe 79.** Man löse für $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ die Anfangswertaufgabe

$$y'' + 2\tan(x)y' + (2\tan^2(x) - 1)y = 0$$

mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$. Dabei soll zuerst Satz 9 benutzt werden, um die obige DGL in eine DGL $v'' + qv = 0$ mit einer Konstanten $q$ zu überführen.

**Aufgabe 80.** Man löse für $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ die Anfangswertaufgabe

$$y'' + 2\tan(x)y' + (2\tan^2(x) - 3)y = 0$$

mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$. Dabei soll zuerst Satz 9 benutzt werden, um die obige DGL in eine DGL $v'' + qv = 0$ mit einer Konstanten $q$ zu überführen.

# Ergebnisse der Aufgaben

Für Beweisaufgaben wird ein kurzer Hinweis gegeben.

**Aufgabe 1:** (a) 2 (b) 1

**Aufgabe 2:** (a) Schreibe die Produktregel hin und integriere beide Seiten
(b) Wende die Substitutionsregel auf $\int_a^b \frac{1}{g(x)}\, g'(x)\, dx$ an

**Aufgabe 3:** (a) Probe durch zweimaliges Differenzieren der Lösungsfunktion und nachfolgendes Einsetzen (b) $y(x) = 2x - x^2$

**Aufgabe 4:** $y(x) = \ln(x) - \frac{1}{x} + e + 1$

**Aufgabe 5:** $y(x) = -\cos\left(\frac{x^2}{2}\right) + 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$

**Aufgabe 6:** (a) Probe mit Quotientenregel und nachfolgendes Erweitern
(b) Dividiere Zähler und Nenner durch $x$ (c) $M'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$

**Aufgabe 7:** $y(x) = \ln(\frac{1}{x} + \frac{1}{2})$

**Aufgabe 8:** Sei $\mathcal{A}(x)$ eine Stammfunktion $a(x)$.
Im Fall $y \in \mathbb{R}_{>0}$ ist $y(x) = Ce^{\mathcal{A}(x)}$ mit einer Konstanten $C > 0$.
Im Fall $y \in \mathbb{R}_{<0}$ ist $y(x) = Ce^{\mathcal{A}(x)}$ mit einer Konstanten $C < 0$.

**Aufgabe 9:** $y(x) = \frac{sx}{a+acx}$ Michaelis-Menten-Funktion für $c = \frac{1}{a}$

**Aufgabe 10:** $\ln(\frac{8}{3})$

**Aufgabe 11:** $y(x) = e^{\sin(x)}\left(\sqrt{x} - \sqrt{\pi}\right)$

**Aufgabe 12:** $y(x) = -\frac{2}{x^3+x}$

**Aufgabe 13:** $y(x) = x + \frac{1}{1-2e^x}$ für alle $x > -\ln(2)$

**Aufgabe 14:** $y(x) = \frac{1}{2(x^2+6x+8)} + \frac{3}{16}$ für $x > -2$

**Aufgabe 15:** $y^2 + 10y + 4xy - 10x - x^2 = C_1$

**Aufgabe 16:** $y^2 + 10y + 4xy - 10x - x^2 = C_2$

**Aufgabe 17:** $y(x) = cx + \frac{1}{2}c^2$ und $y_s(x) = -\frac{1}{2}x^2$

**Aufgabe 18:** $y(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x^3}}$ für $x < 2^{-\frac{1}{3}}$

**Aufgabe 19:** $u(x) = c\frac{1}{x^2-1}$ und $y = \int u(x)\,dx = c_1 \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + c_2$ nach Partialbruchzerlegung. Ergebnis: $y(x) = 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \ln(9)$

**Aufgabe 20:** $y(x) = \sqrt{2x-1}$ für $x > \frac{1}{2}$

**Aufgabe 21:** $y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2x}$

**Aufgabe 22:** (a) $u(t) = 5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{t/10}$ (b) Nach $\frac{10\ln(10)}{\ln(5/3)} \approx 45$ Minuten

**Aufgabe 23:** $y(x) = e^{-x} - 4\frac{e^{-x}}{x^2}$

**Aufgabe 24:** (a) $y(x) = c_1 e^{x+x^2} + c_2 e^{x^2-x}$ (b) $y(x) = c_1\frac{e^x}{x} + c_2\frac{e^{-x}}{x}$

**Aufgabe 25:** $y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^3 - x^2\sin(x)$

**Aufgabe 26:** $y(x) = \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4x} - \frac{3e^4}{4x}$

**Aufgabe 27:** $y(x) = 2x + 3 + 2e^{-x} - 2e^{2x} + 3e^x$

**Aufgabe 28:** $y(x) = \frac{3}{4}\cos(x) - \sin(x) - e^{2x} + 4xe^{2x}$

**Aufgabe 29:** (a) Die Ableitung $y'(x)$ bilden und ausnutzen, dass $u(x)$ eine Lösung der linearen DGL ist.
(b) Die Ableitungen $u'(x)$ und $u''(x)$ bilden und ausnutzen, dass $y(x)$ eine Lösung der Riccati-DGL ist.

**Aufgabe 30:** $y(x) = \frac{1}{10}(2x+1)^5 + \frac{9}{10}$

**Aufgabe 31:** $y(x) = \frac{1}{x^2}\big(c_1\cos(\ln(x)) + c_2\sin(\ln(x))\big)$

**Aufgabe 32:** Für $a = 1$: $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x\ln(x)$
Für $a = 2$: $y_1(x) = x^2$ und $y_2(x) = x$
Für $a = -2$: $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = \frac{1}{x^2}$

**Aufgabe 33:** (a) $c_1'(x) = \frac{b(x)}{W(x)}\big(y_2(x)y_3'(x) - y_2'(x)y_3(x)\big)$,
$c_2'(x) = \frac{b(x)}{W(x)}\big(y_1'(x)y_3(x) - y_1(x)y_3'(x)\big)$,
$c_3'(x) = \frac{b(x)}{W(x)}\big(y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)\big)$ (b) $y_s(x) = \frac{1}{3}\,x^4$

**Aufgabe 34:** (a) $y(x) = c_1\frac{1}{\sin^2(x)} + c_2\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$ (b) $y(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$

**Aufgabe 35:** (a) $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$, $y_3(x) = xe^{2x}$,
(b) $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$, $y_3(x) = e^{-x}$,
(c) $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}\cos(x)$, $y_3(x) = e^{2x}\sin(x)$,
(d) $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$, $y_3(x) = x^2e^{2x}$

**Aufgabe 36:** $y(x) = \frac{1}{5}x^2 + c_1 x + c_2 x^3\cos(2\ln(x)) + c_3 x^3\sin(2\ln(x))$

**Aufgabe 37:** $\vec{y}_{\text{allg}}(x) = \begin{pmatrix} \ln(x) \\ x\ln(x) \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -x^{-1} \\ x^2 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 38:** $y(x) = \cos^2(x)\sin(x)$

**Aufgabe 39:** $\vec{y}_{\text{allg}}(x) = \begin{pmatrix} (x^5 - x^4)e^x \\ 4(x^3 - x^2)e^x \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} x^4 \\ 4x^2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} x^{-2} \\ -2x^{-4} \end{pmatrix}$

**Aufgabe 40:** $m_1(t) = Me^{-\lambda_1 t}$ und $m_2(t) = \frac{\lambda_1 M}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}\right)$, falls $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , sowie $m_2(t) = \lambda M t e^{-\lambda t}$, falls $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$.

**Aufgabe 41:** Für $n = 1$ lautet der Satz: *Sei $D$ eine offene Menge in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ bezüglich $y$ partiell differenzierbar mit stetiger partieller Ableitung. Dann erfüllt $f$ lokal eine Lipschitz-Bedingung.* Der Beweis ist entsprechend anzupassen.

**Aufgabe 42:** (a) Es ist $W(x) = x \neq 0$. (b) $y_s(x) = x^2 - 2$

**Aufgabe 43:** (a) $z_1(x) = 0$, $z_2(x) = \frac{x^3}{3}$, $z_3(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$,
$z_4(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}$
(b) Die Funktion $f(x, y) := x^2 + y^2$ genügt auf $Q := \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ einer Lipschitz-Bedingung mit der Lipschitz-Konstanten $L = 1$. Ferner ist $|f(x, y)| \leqslant \frac{1}{2} =: M$. Nun können die Ergebnisse aus 10.3 verwendet werden, insbesondere folgt $|z_4(x) - y(x)| \leqslant ML^3 \frac{\varepsilon^4}{4!} = \frac{1}{2^5 \times 4!} \approx 0,0013$.
Die Abschätzung lässt sich deutlich verfeinern, indem man in der Definition des Quaders $Q := \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times [-b, b]$ den Parameter $b$ kleiner wählt, noch unter der Bedinung $\frac{b}{M} \geqslant \frac{1}{2}$. Mit $b = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ergibt sich $L = M = 2b \approx 0,27$, und man erhält die Fehlerabschätzung $1,3 \cdot 10^{-5}$.

**Aufgabe 44:** (a) Nach Matrizenmultiplikation ist $A(x)M(x) = M'(x)$
(b) $\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} x^{-1} \\ -x^{-2} \end{pmatrix}$ und $\vec{z}(x) = \begin{pmatrix} x^{-3} \\ -3x^{-4} \end{pmatrix}$.

**Aufgabe 45:** $\vec{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-x} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-x}$

**Aufgabe 46:** $\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ -xe^{-x} \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} e^x \\ e^{2x} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -1 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 47:** $\vec{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-2x} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}$

**Aufgabe 48:** $\vec{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ -2\sin(2x) \\ -4\cos(2x) \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \sin(2x) \\ 2\cos(2x) \\ -4\sin(2x) \end{pmatrix}$

**Aufgabe 49:** (a) $\lambda_1 = 0$ einfacher Eigenwert und $\lambda_{2,3} = 1$ zweifacher Eigenwert.
(b) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ zu $\lambda_1 = 0$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ zu $\lambda_2 = 1$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ zu $\lambda_3 = 1$

(c) $\vec{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^x + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} e^x$

**Aufgabe 50:** Euler-DGL $x^2 y_1'' - 2xy_1' + 2y_1 = 0$
(a) $\vec{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix}$ und $\vec{\psi}(x) = \begin{pmatrix} x \\ -2 \end{pmatrix}$ (b) $\vec{y}_s(x) = \begin{pmatrix} 5x^3 \\ -3x^2 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 51:** $\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} x \\ 3x^{-1} \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} x^3 \\ -3x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x^{-1} \\ x^{-3} \end{pmatrix}$

**Aufgabe 52:** $y(x) = -2\ln(x) - 1 + c_1 x^2 + c_2 \frac{1}{x} \cos(3\ln(x)) + c_3 \frac{1}{x} \sin(3\ln(x))$

**Aufgabe 53:** $y(x) = \frac{1}{54} x^4 + c_1 x + c_2 \frac{1}{x^2} + c_3 x \ln(x)$

**Aufgabe 54:** Man stelle das zur DGL $y'' = -a_1(x)y' - a_0(x)y$ gehörige DGL-System auf und bestimme dafür die Funktionen $u(x)$ und $\vec{z}(x)$ aus Satz 17. Es ist dann $y_2(x)$ die erste Komponente von $\vec{z}(x)$.

**Aufgabe 55:** (a) $y_1(x) = \frac{c}{y_1^2(x)} e^{-x^2}$ (b) Es ist $\mathcal{A}_2(x) = -\ln(y_1(x)) - x^2$. Man bilde $e^{\mathcal{A}_2(x)}$ und rechne $\frac{c}{y_1(x)} e^{\mathcal{A}_2(x)} = y(x)$ nach.

**Aufgabe 56:** Im Fall $x = 0$ ist der Integrand von $Q_0(0) = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{-t}\, dt$ an der Stelle $t = 0$ nicht definiert.

**Aufgabe 57:** $\mathfrak{Q}_1(x) = 1 - xQ_0(x)$ mit $Q_0(x) = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.
Satz 8 führt zum Integral $\mathfrak{Q}_1(x) = x \int \frac{1}{x^2(x^2-1)}\, dx$, und es ist $\frac{1}{x^2(x^2-1)} = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$.

**Aufgabe 58:** $y(x) = \frac{1}{2} e^{\sin(x)} + \frac{1}{2} e^{-\sin(x)}$

**Aufgabe 59:** $y(x) = -\frac{1}{2}\, e^{\frac{1}{2}x} + \frac{3}{8} x^2 e^{\frac{1}{2}x}$

**Aufgabe 60:** Dies wird durch Induktion nach $n$ analog wie das Lemma in Abschnitt 7.1 gezeigt.

**Aufgabe 61:** $y(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Es ist $0 < (x + \frac{1}{2})^2 = x^2 + x + \frac{1}{4} < x^2 + x + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$

**Aufgabe 62:** $y(x) = \ln(e^x + c)$ mit passender Konstante $c$. Mit Typ IX ist dies Ergebnis wesentlich schwerer zu erreichen als mit Typ V. Das sei hier nur zu Übungszwecken empfohlen. Die Konstante ist dann eine andere.

**Aufgabe 63:** $y(x) = \frac{6x^2}{2+x^3}$. Zunächst ist die DGL nach $y'$ aufzulösen, und dann Typ IV anzuwenden, ebenso bei der nächsten Aufgabe.

**Aufgabe 64:** $y(x) = \frac{1}{x\sqrt{e^{x^2}+3-e}}$

**Aufgabe 65:** $y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{e^{x^3}(\cos(x)-9)}}$

**Aufgabe 66:** $y(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{e^{x^4}(-\cos(x)+10)}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$

**Aufgabe 67:** Der Induktionsanfang mit $n = 1$ geht so: Es ist
$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(1-k)}(x)\, g^{(k)}(x) = \binom{1}{0} f^{(1-0)}(x) g^{(0)}(x) + \binom{1}{1} f^{(1-1)}(x) g^{(1)}(x)$
$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = D^1(f(x)g(x))$, wobei die letzte Beziehung aus der Produktregel folgt. Nun weiter ...

**Aufgabe 68:** $y(x) = \frac{1}{2(x^2+4x+3)} + \frac{1}{30}$ für $x > -1$

**Aufgabe 69:** $y(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2+4}}$ für $-2 < x < 2$

**Aufgabe 70:** $y(x) = 1 - \frac{1}{3} e^{\frac{-x^3}{3}}$

**Aufgabe 71:** (a) $P(t) = 500\, e^{\frac{1}{24}\ln(8/5)\cdot t} = 500 \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^{t/24}$
(b) Nach $\frac{24\ln(3/2)}{\ln(8/5)} \approx 20.7$ Stunden

**Aufgabe 72:** (a) $Z(t) = 50\, e^{-\frac{1}{5}\ln(5/2)\cdot t} = 50 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{t/5}$
(b) Nach $\frac{5\ln(10)}{\ln(5/2)} \approx 12.6$ Stunden

**Aufgabe 73:** $y(x) = \frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9x} - \frac{5e^6}{9x}$

**Aufgabe 74:** $y(x) = -\frac{\cos(\pi x)}{\pi} + \frac{\sin(\pi x)}{\pi^2} - \frac{1}{\pi x}$

**Aufgabe 75:** $y(x) = -\ln(2-x) = \ln\left(\frac{1}{2-x}\right)$ für $x < 2$

**Aufgabe 76:** $y(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

**Aufgabe 77:** $y(x) = \frac{1}{12}(2x+1)^6 + \frac{11}{12}$

**Aufgabe 78:** $y(x) = \frac{1}{14}(2x+1)^7 + \frac{13}{14}$

. **Aufgabe 79:** $y(x) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{2}}\left(e^{\sqrt{2}x} - e^{-\sqrt{2}x}\right)$

**Aufgabe 80:** $y(x) = \frac{\cos(x)}{4}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right)$

# Literaturverzeichnis

[1] Abel, Niels Henrik: *Ueber einige bestimmte Integrale.* Journal reine angew. Math. 37 (1827), S. 22-30

[2] Aulbach, Bernd: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* 2. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag 2004. Unveränderter Nachdruck 2010

[3] Bonnet, Ossian: *Thèse de Mécanique. -Sur le developpement des Fonctions en Séries ordonnées suivant les Fontions $X_n$ et $Y_n$.* Journal de mathématiques pures et appliquées 1$^{\text{re}}$ série, tome 17 (1852), p.255-300. Online (Stand 25.08.2014): `http://sites.mathdoc.fr/JMPA/PDF/JMPA_1852_1_17_A16_0.pdf`

[4] Bronstein, I. & Semendjajew, K.: *Taschenbuch der Mathematik.* 9. Auflage, Teubner 1968

[5] Erwe, Friedhelm: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Hochschultaschenbücher, Bibliographisches Institut, Mannheim 1964

[6] Ferus, Dirk: *Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure.* `https://www.math.tu-berlin.de/fileadmin/i26_matheservice/Module/Skripten/ITPDG.pdf` Version vom 18.01.2007. Zuletzt aufgerufen am 7.8.2014.

[7] Fischer, Gerd: *Lineare Algebra.* 11. Auflage, vieweg studium 1997

[8] Forster, Otto: *Analysis 1.* 11. Auflage, Springer Spektrum 2013

[9] Forster, Otto: *Analysis 2.* 11. Auflage, Springer Spektrum 2013

[10] Gronwall, T. H.: *Note on the derivatives with respect to a parameter of the solution of a system of differential equations.* Annals of Math. 20, (1919), 292–296

[11] Heine, Eduard: *Handbuch der Kugelfunktionen.* Erster Band. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage, Druck und Verlag G. Reimer 1878

[12] Heuser, Harro: *Lehrbuch der Analysis. Teil 2.* 4. Auflage, Teubner 1988

[13] Heuser, Harro: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* 5. Auflage, Teubner 2006

[14] Ince, E. L.: *Die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen.* Hochschultaschenbücher, Bibliographisches Institut, Mannheim 1965

[15] Kamke, Erich: *Differentialgleichungen I. Gewöhnliche Differentialgleichungen.* 6. Auflage, Akad. Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., 1969

[16] Kamke, Erich: *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen I.* 2. Auflage, Akad. Verlagsgesellschaft Becker & Erler K.-G., 1943

[17] Laube, Linda: *Über die Reduktion der Ordnung von homogenen linearen Differenzialgleichungen. Ein Vergleich zwischen dem Verfahren nach d'Alembert und dem Verfahren mittels Wronski-Determinante.* Bachelorarbeit (B.A.), Universität Göttingen 2013

[18] Lense, Josef: *Kugelfunktionen* Akad. Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., 1950

[19] Lord Kelvin (Thomson, William): *Popular Lectures and Addresses.* Volume I. Macmillan and Co, 1889

[20] Meissner, Ernst *Ueber graphische Integration von totalen Differentialgleichungen.* Schweizerische Bauzeitung 62 (15), (1913), 199-203

[21] Meyberg, K. & Vachenauer, P.: *Höhere Mathematik 2.* 4. korr. Auflage, Springer 2001

[22] Neumann, Franz: *Entwicklung der in elliptischen Coordinaten ausgedrückten reciproken Entfernung zweier Puncte in Reihen, welche nach den Laplace'schen $Y^{(n)}$ fortschreiten; und Anwendung dieser Reihen zur Bestimmung des magnetischen Zustandes eines Rotations-Ellipsoids, welcher durch vertheilende Kräfte erregt ist.* Journal reine angew. Math. 37 (1848), S. 21-50

[23] Neumann, Franz: *Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen.* Teubner 1878

[24] Papula, Lothar: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Band 1.* 10. Auflage, Vieweg 2001

[25] Runge, C. & Willers, Friedrich A.: *II C 2. Numerische und graphische Quadratur und Integration gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen.* Enzykl. d. math. Wiss. mit Einschluss ihrer Anwendungen. Band II, 3. Teil, Heft 2, (1915), 47–176.

[26] Shi, Biru: *Beseitigen des zweithöchsten Gliedes in der linearen Differenzialgleichung.* Bachelorarbeit (B.A.), Universität Göttingen 2013

[27] Walter, Wolfgang: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Springer 1972

[28] Werner, H. & Arndt, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Springer 1986

[29] Willers, Friedrich A.: *Graphische Integration.* (Sammlung Göschen. [801]). Walter de Gruyter, 1920.

## Abbildungsnachweis

Die Portraits der Mathematiker
Riemann, Bernoulli, Riccati, Clairaut, Wronski, Abel, Airy, d'Alembert, Euler (2mal), Legendre, Bonnet, Rodrigues, Neumann, Lagrange, Lipschitz, Picard, Lindelöf, Cauchy, Runge, Kutta, Peano und Gronwall
sind alle der mathematikgeschichtlichen Website
`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/`
entnommen.

# Index

Dieser Universitätsdruck enthält den Stoff einer einsemestrigen Vorlesung über gewöhnliche Differenzialgleichungen und wendet sich an Studierende der Mathematik und Physik ab dem 3. Semester, insbesondere an Lehramtsstudierende. Bei Differenzialgleichungen handelt es sich wegen ihrer universellen Anwendungsmöglichkeiten in Mathematik, Naturwissenschaft und Technik um ein sehr spannendes Gebiet der Mathematik. Im vorliegenden Band werden der Reihe nach Differenzialgleichungen erster, zweiter und höherer Ordnung behandelt. Danach wird zu Systemen von Differenzialgleichungen übergegangen, wobei zunächst 2x2-Systeme als Einstieg dienen. Es werden viele Beispiele ausführlich durchgerechnet.

GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT
GÖTTINGEN

ISBN: 978-3-86395-221-1

Universitätsdrucke Göttingen