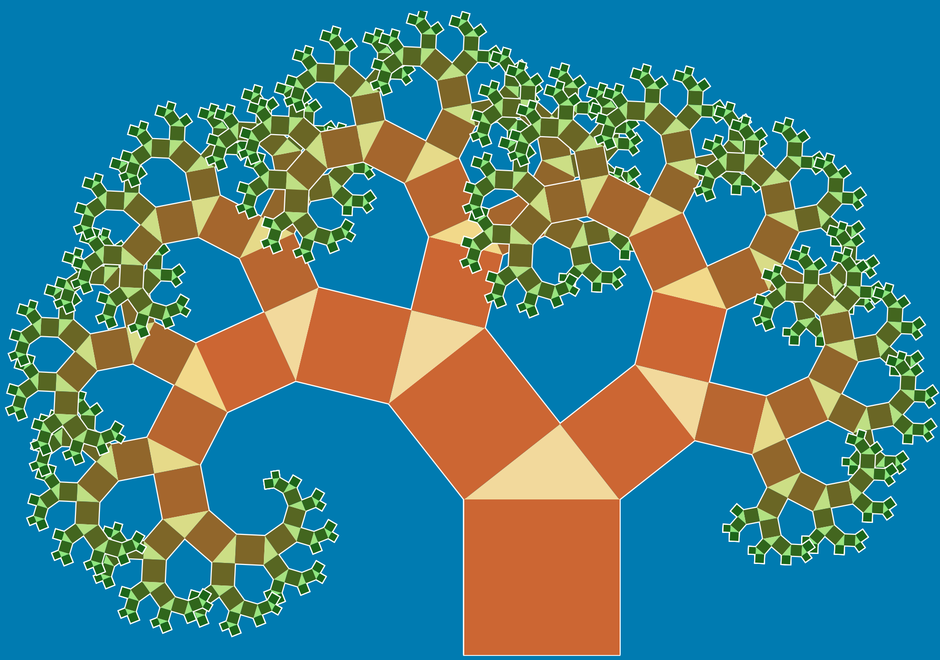
Mathematischer Korrespondenzzirkel Göttingen (Hg.)

Knobeleien, die Dritte

Erarbeitet von Alexander Malinowski, Ulrike Ober, Marco Oesting, Karsten Roeseler, Robert Strich und Kristin Stroth



Universitätsdrucke Göttingen

Mathematischer Korrespondenzzirkel Göttingen (Hg.)

Knobeleien, die Dritte

erschienen in der Reihe der Universitätsdrucke
im Universitätsverlag Göttingen 2012

Mathematischer Korrespondenzzirkel Göttingen (Hg.)

Knobeleien, die Dritte

Erarbeitet von
Alexander Malinowski, Ulrike Ober, Marco Oesting, Karsten Roeseler, Robert Strich und Kristin Stroth

Universitätsverlag Göttingen
2012

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Mathematischer Korrespondenzzirkel Göttingen
Mathematisches Institut
Bunsenstraße 3–5
37073 Göttingen

http://www.math.uni-goettingen.de/zirkel/
zirkel@math.uni-goettingen.de

Satz, Layout und Umschlagentwurf: Mathematischer Korrespondenzzirkel

http://univerlag.uni-goettingen.de
ISBN: 978-3-86395-042-2

Vorwort

Es ist soweit! Mit diesem Band geben wir 100 weitere Aufgaben und Lösungen der Aufgabenblätter 51 bis 75 des Mathematischen Korrespondenzzirkels der Universität Göttingen in Buchform heraus: 100 Aufgaben – das bedeutet einen wilden Zoo mathematischer Fragestellungen und ein kleines Feuerwerk kreativer Lösungsansätze. 100 Aufgaben, das bedeutet aber auch drei weitere Jahre engagierte Arbeit der Mitglieder des Korrespondenzzirkels seit dessen Gründung im Jahr 2000.

Wir freuen uns sehr, dass der Freundeskreis des Zirkels über die letzten 12 Jahre stetig gewachsen ist und wir so viele positive und interessierte Rückmeldungen erhalten. Dies zeigt uns, dass der Korrespondenzzirkel nicht nur eine attraktive Freizeitbeschäftigung für Schüler und Erwachsene ist, sondern auch ein gern genutztes Angebot für Lehrer und Talentförderer, die schulische Arbeitsgemeinschaften leiten und vorbereiten oder sich bei der Durchführung von Mathematikwettbewerben engagieren.
Dass wir nach den Bänden „Voller Knobeleien“ im Jahr 2005 und „Voller neuer Knobeleien“ im Jahr 2008 mit diesem dritten Band schon eine kleine Tradition fortsetzen können, macht uns glücklich.

Auch das Zirkelteam ist in den letzten Jahren gewachsen und zur Gründungsgeneration sind neue Mitstreiter hinzugekommen, was sich in der Autorenschaft dieses Bandes widerspiegelt.
Wir möchten uns an dieser Stelle bei Sjaan Arnsfeld bedanken, die an einzelnen Aufgaben und Lösungen mitwirkte.
Außerdem möchten wir allen weiteren Personen, insbesondere aus dem Organisationsteam der Mathematik-Olympiade in Niedersachsen, danken, die den Zirkel in den letzten Jahren auf verschiedene Arten unterstützt und dazu beigetragen haben, dass viele neue Mathematik-Interessierte auf unser Angebot aufmerksam wurden.

Wir hoffen, dass wir mit „Knobeleien, die Dritte“ allen neuen und alten Zirkelfreunden viel Spaß bereiten können.

Göttingen, im Januar 2012 — Die Autoren

Über den Korrespondenzzirkel

Was ist der Mathematische Korrespondenzzirkel?

Der Mathematische Korrespondenzzirkel ist eine Arbeitsgemeinschaft für Schülerinnen und Schüler, die vom Mathematischen Institut der Universität Göttingen angeboten wird. Er wurde er im Jahr 2000 gegründet; im Februar 2012 wird das 100. Aufgabenblatt erscheinen.

An wen richtet sich der Korrespondenzzirkel?

An alle, die Spaß am Lösen mathematischer Probleme haben. Gedacht haben wir an die Klassenstufen 8–13, aber die Teilnahme steht auch jüngeren Schülerinnen und Schülern und interessierten Erwachsenen offen.

Wie funktioniert das?

Regelmäßig wird vom Mathematischen Korrespondenzzirkel eine Aufgabenserie mit vier mathematischen Aufgaben herausgegeben und direkt an die aktiven Teilnehmer geschickt. Außerdem findet man die Aufgaben auch im Internet auf unserer Homepage. Man hat dann ca. vier Wochen Zeit, Lösungen oder auch nur einzelne Lösungsideen an uns zu senden. Diese korrigieren wir, versehen sie mit Anmerkungen und schicken sie zusammen mit Lösungsbeispielen und der neuen Aufgabenserie wieder zurück.

Was sind das für Aufgaben?

Für das Lösen der Aufgaben braucht man im Allgemeinen keine über das Schulwissen hinausgehenden Kenntnisse. Es kommt oft eher darauf an, eine pfiffige Idee zu haben.

Mathematisches Institut
Mathematischer Korrespondenzzirkel
Bunsenstraße 3–5
37073 Göttingen

Internet: http://www.math.uni-goettingen.de/zirkel
E-Mail: zirkel@math.uni-goettingen.de

Teil I

Aufgaben

Aufgabenblatt 51

A 51.1 Kristin soll einen Bruch finden, der zwischen den beiden Brüchen $\frac{7}{13}$ und $\frac{11}{17}$ liegt. Ratlos versucht sie $\frac{7+11}{13+17}$. Ist dies eine Lösung ihres Problems?

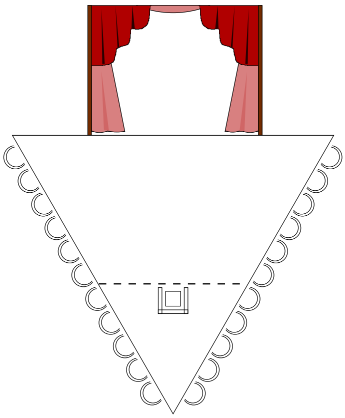
Liegt der Bruch $\frac{a+c}{b+d}$ immer zwischen den beiden Brüchen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ (mit positiven ganzen Zahlen a, b, c, d)? Wie kann man, ohne zu rechnen, sofort entscheiden, ob $\frac{a+c}{b+d}$ näher an $\frac{a}{b}$ oder an $\frac{c}{d}$ liegt?

A 51.2 Auf wie viele Arten kann man 2006 als Summe aufeinanderfolgender positiver ganzer Zahlen darstellen? Welches ist das nächste Jahr, dessen Jahreszahl nur eine derartige Darstellung erlaubt?

Hinweis: Zum Beispiel hat 10 genau die zwei Darstellungen 10 und $1+2+3+4$.

A 51.3 Der Neubau des Theaters der Stadt Göttingen hat einen Zuschauerraum mit dem Grundriss eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 50 Meter. Die Bühne befindet sich in der Mitte einer der Seiten des Dreiecks und ist genau 30 Meter lang. Entlang der anderen beiden Seiten befinden sich die Sitzplätze. Wo muss man sich hinsetzen, um die beste Sicht auf die Bühne zu haben, um also die Bühne unter dem größtmöglichen Blickwinkel zu sehen?

Der Oberbürgermeister verlangt, parallel zur Bühne eine zusätzliche Sitzreihe einzubauen, die die beiden anderen Seiten des Dreiecks verbindet.



In der Mitte dieser Reihe soll die Bürgermeisterloge von allen vorhandenen Sitzen die beste Sicht auf die Bühne garantieren. Wie lang ist diese Sitzreihe dann mindestens?

A 51.4 Im Speisesaal des wieder errichteten Klosters Wan-Dan steht ein 250 Meter langer und 2 Meter breiter rechteckiger Tisch, an dem die Mönche jeden Tag ihre Mahlzeiten einnehmen. Für jeden Mönch muss hierbei der Reinlichkeit halber ein kreisrundes Platzdeckchen mit Durchmesser 1 Meter auf den Tisch passen, ohne über dessen Rand hinauszuragen und ohne mit anderen Platzdeckchen zu überlappen.

Können an dem Tisch mehr als 500 Mönche gleichzeitig essen?

Aufgabenblatt 52

A 52.1 Vor kurzem gelang Andrew Wiles der Beweis des großen Fermatschen Satzes. Dieser besagt, dass die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

keine Lösung mit positiven ganzen Zahlen x, y, z hat, wenn $n \geq 3$ ist. Über mehrere Jahrhunderte hinweg hatten sich die Mathematiker an diesem Problem erfolglos versucht.

Zeige den „sehr kleinen“ Fermatschen Satz: Die Gleichung

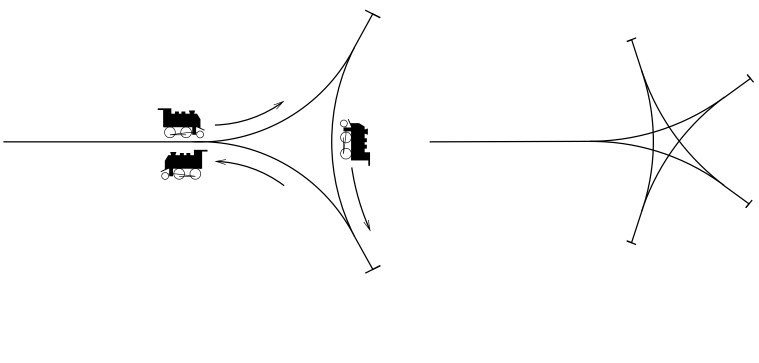
$$n^x + n^y = n^z$$

hat keine Lösung mit positiven ganzen Zahlen x, y, z, wenn $n \geq 3$ ist.

A 52.2 An der Wand im Wohnzimmer von Oma Kruse hängt eine Uhr. Die Wand ist genau $\frac{\sqrt{3}}{2}$-mal so hoch wie breit. Zum Frühstück schaut Oma Kruse auf die Uhr und stellt fest, dass der kleine Zeiger der Uhr genau in die linke obere Ecke der Wand zeigt. Drei Stunden später, zum Mittagessen, zeigt der kleine Zeiger in die rechte obere Ecke. Zum Kaffee schließlich, noch einmal zwei Stunden später, zeigt der kleine Zeiger in die rechte untere Ecke.

Wann hat Oma Kruse gefrühstückt?

A 52.3 Früher mussten bei der Eisenbahn die Dampflokomotiven oft gewendet werden. Dazu benutzte man auch so genannte Gleisdreiecke oder Gleisdreisterne, vgl. Abbildung. Zum Wenden muss man offensichtlich jede Weiche genau einmal stellen. In Mals in Südtirol gibt es sogar einen Gleisfünfstern, der braucht weniger Platz, aber man muss mehr Weichen stellen.



Interessant wird es, wenn man einen Wagen wenden will (auch das kommt vor), denn auf die kurzen Gleisabschnitte hinter den Weichen an den Sternspitzen passt nur ein Wagen *oder* eine Lok.

Wie oft muss man beim Gleisdrei- bzw. -fünfstern eine Weiche stellen, um einen Wagen mit Hilfe einer Lok zu wenden?

Bringt es Erleichterung, wenn man eine zweite Lok in das „Gleislabyrinth“ schickt?

Und schließlich: Wie lauten die Anzahlen allgemein für einen $(2n+1)$-Stern?

Bemerkung: Jede Weiche soll zu Beginn so gestellt sein, wie sie beim ersten Befahren gebraucht wird.

A 52.4 Zwei verschiedene Geraden in der Ebene können sich entweder in keinem oder in einem Punkt schneiden, je nachdem, ob sie parallel sind oder nicht.

Wie viele verschiedene mögliche Schnittpunktanzahlen gibt es für zehn verschiedene Geraden in der Ebene, wenn keine drei Geraden durch einen gemeinsamen Punkt gehen sollen?

Aufgabenblatt 53

A 53.1 Der König will vom Fischer wissen, wie viele Fische im Teich in seinem Schlossgarten sind. Der schlaue Fischer wirft sein Netz aus, holt es ein und zählt 72 Fische. Er markiert die Fische mit einem kleinen roten Punkt und lässt sie wieder frei. Am Tag darauf wirft er sein Netz wieder aus. Beim Einholen des Netzes zählt er diesmal 81 Fische. Von diesen haben vier einen kleinen roten Punkt.

Wie viele Fische sind (ungefähr) im Teich?

A 53.2 Wie viele vollständig gekürzte Brüche gibt es, die zwischen 0 und 1 liegen und bei denen das Produkt aus Zähler und Nenner genau 60 ist?

Bei wie vielen ist das Produkt genau $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100$?

A 53.3 Auf einer Wiese gibt es vier Obstbäume. Karolin liegt auf der Wiese auf ihrem Liegestuhl. Aus Langeweile steht sie auf und läuft geradeaus in Richtung des Kirschbaums, bis sie diesen erreicht, und dann weiter in derselben Richtung noch einmal dieselbe Strecke. Von dort aus läuft sie in Richtung des Apfelbaums, und nachdem sie diesen nach einer gewissen Wegstrecke erreicht hat, geht sie dieselbe Strecke noch einmal geradeaus weiter. Dasselbe tut sie nun noch mit dem Birn- und dem Pflaumenbaum. Überrascht stellt sie fest, dass sie wieder direkt vor ihrem Liegestuhl steht.
Karolin überlegt kurz und weiß dann, dass der Kirschbaum genauso weit vom Apfelbaum entfernt steht wie der Birn- vom Pflaumenbaum und dass der Abstand zwischen Apfel- und Birnbaum derselbe ist wie der Abstand von Pflaumen- zu Kirschbaum.

Woher weiß sie das?

A 53.4 Eine natürliche Zahl heißt *zusammengesetzt*, wenn man sie als Produkt von zwei natürlichen Zahlen, die beide größer als 1 sind, schreiben kann, wenn sie also nicht gleich 1 und keine Primzahl ist.

Finde die größte gerade Zahl, die sich nicht als Summe zweier ungerader zusammengesetzter Zahlen schreiben lässt!

Aufgabenblatt 54

A 54.1 Welches ist die kleinste positive natürliche Zahl n mit der Eigenschaft, dass $45 \cdot n$ nur die Ziffern 0 und 7 enthält?

A 54.2 Um die Dauer der Fußballweltmeisterschaft 2010 in Südafrika zu verkürzen, sollte einem Vorschlag zufolge unter den 32 teilnehmenden Teams der Weltmeister wie folgt bestimmt werden:
In jeder Runde werden die Mannschaften, die noch im Wettbewerb sind, zufällig in Paare aufgeteilt; sollte es eine ungerade Anzahl sein, muss eine Mannschaft in dieser Runde nicht spielen. Die entsprechenden Paare spielen ein Spiel gegeneinander, wobei es kein Unentschieden gibt. Sobald eine Mannschaft zweimal verloren hat, ist sie ausgeschieden.
Der Vorschlag wurde aber verworfen, weil er angeblich zu keiner Verkürzung des Turniers im Vergleich zu den bei den bisher üblichen Regeln gespielten 64 Spielen führt.

Stimmt das? Was ist die kleinste und was die größte mögliche Anzahl an auszutragenden Spielen?

A 54.3 In einem Dreieck mit Flächeninhalt 1 bilden sowohl die drei Seitenlängen als auch die Längen der drei Höhen eine arithmetische Zahlenfolge.

Bestimme die Seitenlängen dieses Dreiecks!

Hinweis: Drei Zahlen a, b, c bilden eine arithmetische Zahlenfolge, wenn es eine reelle Zahl d so gibt, dass $a + d = b$ und $b + d = c$ gilt.

A 54.4 Finde eine natürliche Zahl N so, dass jede der Zahlen

$$N\,,\ 2 \cdot N\,,\ 3 \cdot N\,,\ \ldots,\ 2006 \cdot N$$

eine durch 2006 teilbare Quersumme hat.

Gibt es auch eine natürliche Zahl N so, dass jedes Vielfache von N eine durch 2006 teilbare Quersumme hat?

Aufgabenblatt 55

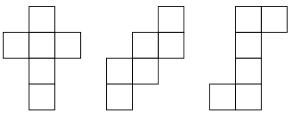
A 55.1 Karsten hat zehn Zahnräder, je eines mit 7, 13, 34, 103, 179, 234, 299, 303, 356 und 385 Zähnen. Er will sie so in eine Reihe legen (natürlich sollen dabei die Achsen geeignet gelagert werden, sodass sich die Räder um die Achsen drehen können), dass sie ineinandergreifen und dass bei einer Umdrehung des ersten Zahnrades das letzte möglichst viele Umdrehungen ausführt.

Wie muss er die Zahnräder dazu anordnen und wie viele Umdrehungen führt das letzte Rad dabei dann aus? Hat er mehr als eine Möglichkeit für die Anordnung der Zahnräder?

A 55.2 Alex und Ulrike wollen jeden der fünf platonischen Körper – Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder – aus Papier basteln. Dazu wollen sie ein Netz eines jeden Körpers auf Papier malen, dieses ausschneiden, falten und an den Kanten, wo dies nötig ist, zusammenkleben.

Bei welchem der Körper benötigen sie dabei die meisten Klebekanten, bei welchem die zweitmeisten usw.?

Hinweis: Man beachte, dass es für das Malen der Körpernetze jeweils mehrere Möglichkeiten gibt, bei denen auch die Anzahl der Klebekanten unterschiedlich sein könnte. Für den Würfel gibt es zum Beispiel elf wesentlich verschiedene Netze, von denen drei wie folgt aussehen:

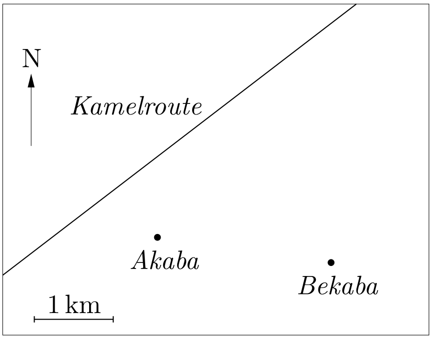


A 55.3 Benno hat 20 quaderförmige bunte Bauklötze, die jeweils ein Volumen von $125\,\mathrm{cm}^3$ haben. Bei jedem Bauklotz sind zwei gegenüberliegende Seitenflächen rot gefärbt, zwei andere gegenüberliegende blau und die letzten beiden (auch gegenüberliegenden) gelb. Benno baut nun nacheinander drei Türme: einen blau-gelben, indem er immer rote Flächen aufeinanderlegt, dann entsprechend einen blau-roten Turm und zuletzt einen gelb-roten.

Zeige, dass wenigstens einer der Türme mindestens einen Meter hoch ist.
Ist es auch immer so, dass einer der Türme höchstens einen Meter hoch ist?

Hinweis: Die Bauklötze haben natürlich nicht unbedingt alle die gleiche Form.

A 55.4 Auf der Jagd nach dem Goldschatz der vierzig Räuber ist Ali Baba anscheinend kurz vor dem Ziel: Er hat in einer alten Truhe die unten abgebildete Landkarte gefunden und weiß aus alten Erzählungen, dass der Schatz in der Mitte einer kreisrunden Oase vergraben liegt. Die Oase selbst ist über die Jahrhunderte hinweg leider verschwunden. Aber Ali Baba hat in Erfahrung gebracht, dass die beiden Dörfer Akaba und Bekaba damals direkt am südlichen Oasenrand lagen und dass die alte, schnurgerade Kamelroute damals schon existierte und auf einer Länge von genau 2 km durch die Oase führte.



Kann Ali Baba allein mit diesem Wissen und mit Zirkel und Lineal die Lage des Schatzes auf der Karte genau konstruieren?

Aufgabenblatt 56

Mathematischer Korrespondenzzirkel

A 56.1 Die drei Musketiere Porthos, Athos und Aramis streiten sich darum, wer in der bevorstehenden Nacht die erste Wache halten muss. Sie beschließen, dies durch Würfeln zu entscheiden: Es wird der Reihe nach gewürfelt und wer als Erster eine Sechs würfelt, muss Wache halten.

Ist das gerecht? Wie groß ist für jeden der drei die Wahrscheinlichkeit, Wache halten zu müssen, wenn sie der alphabetischen Reihenfolge nach würfeln?

Zusatz: Löse das Problem sicherheitshalber auch für die sieben Zwerge, Ali Baba und die vierzig Räuber bzw. gleich allgemein für n Streitende!

A 56.2 Auf einem Blatt Papier ist ein großes rotes gleichseitiges Dreieck gezeichnet. Malte hat einen Vorrat grüner Papierstücke, die alle gleich groß sind und ebenfalls alle die Form eines gleichseitigen Dreiecks haben. Er nimmt fünf davon und legt sie so auf das rote Dreieck, dass sie dieses vollständig abdecken.

Zeige, dass Malte dies auch schon mit vier grünen Dreiecken geschafft hätte.

A 56.3 Bei einer Mathematikarbeit stellte der Lehrer den Schülern zehn Fragen, die jeweils mit „wahr“ (w) oder „falsch“ (f) beantwortet werden sollten. Für eine richtige Antwort gab es einen Punkt, für eine falsche keinen Punkt. Ingo, Stephan, Elias und Jörg beantworteten die Fragen wie folgt:

	Frage									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ingo	w	w	w	f	w	w	f	f	w	w
Stephan	f	w	f	w	w	f	f	f	f	f
Elias	w	f	f	w	f	f	w	f	w	f
Jörg	w	w	f	w	w	f	f	w	w	f

Bei der Rückgabe der Arbeiten bekommt zuerst Ingo seine Arbeit wieder und erhält 6 Punkte, Stephan bekommt 8 Punkte und Elias erhält 7 Punkte.

Wie viele Punkte wird Jörg wohl bekommen?

$\boxed{\textbf{A 56.4}}$ Peter zeichnet zwei Sehnen in einen Kreis und stellt fest, dass diese sich gegenseitig halbieren. Zeige, dass Peter zwei Durchmesser gezeichnet haben muss.

Nun zeichnet Peter zwei Sehnen in eine Ellipse, und wieder halbieren sich diese gegenseitig. Muss es sich auch diesmal um Sehnen handeln, die durch den Mittelpunkt der Ellipse gehen?

Aufgabenblatt 57

A 57.1 Bei einem Mathewettkampf sendet jede teilnehmende Schule ein Team bestehend aus fünf Schülern. Die Teilnehmer der Gaußschule sind Stefan, Stefanie, Steffen, Steven und Carl-Friedrich.
Nach dem Wettkampf vergleichen die fünf ihre Ergebnisse. Es stellt sich heraus, dass Stefanie das beste Ergebnis ihrer Schule erreichte und in der Ergebnisliste aller Teilnehmer genau in der Mitte steht. Auch Steffen ist mit seinem 48. Platz in der Gesamtliste sehr zufrieden. Nur Carl-Friedrich, der auf Platz 76 gelandet ist, muss etwas getröstet werden.

Wie viele Schulen nahmen am Wettkampf teil?

A 57.2 Finde alle zehnstelligen Zahlen, in denen jede Ziffer von 0 bis 9 genau einmal vorkommt und bei denen für alle $k = 1, 2, 3, \dots, 10$ die Zahl, die aus den ersten k Ziffern (von links gezählt) gebildet wird, durch k teilbar ist.

A 57.3 Georg will auf einer großen Landkarte zwei Punkte, die genau 80 cm voneinander entfernt sind, durch eine schnurgerade Strecke verbinden. Er hat aber nur ein sehr kurzes Lineal der Länge 5 cm und einen großen Zirkel, den er auf jede beliebige Radiuslänge kleiner oder gleich 50 cm einstellen kann.

Kann er damit die gesuchte Strecke zeichnen?

A 57.4 Frau von Klim und Bim will den Abend im Spielkasino verbringen. Sie will nur am Roulettetisch spielen und jedes Mal 10 Euro auf ihre Lieblingsfarbe Rot setzen. Zu Beginn hat sie genau 100 Euro. Sobald sie 200 Euro beisammen hat oder aber sobald sie bankrott ist, hört sie auf zu spielen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Frau von Klim und Bim mit 200 Euro nach Hause fährt?

Hinweis: Beim Roulette gibt es die Zahlen von 0 bis 36, und genau 18 dieser Zahlen sind rot. Setzt man auf Rot und gewinnt, so erhält man das Doppelte des Einsatzes. Wenn keine rote Zahl fällt, ist der Einsatz verloren.

Aufgabenblatt 58

Mathematischer Korrespondenz-zirkel

A 58.1 Der Weihnachtsmann hat so viele Nichten, Neffen und Enkelkinder, dass er aufgegeben hat, sich die Namen zu merken. Er teilt sie nur noch ein in *Engelchen*, das sind die Kinder, die stets die Wahrheit sagen, und in *Teufelchen*, das sind die Kinder, die stets lügen. Zum Nikolaustag sind alle bei ihm zu Gast und sitzen – ohne ihn – um seinen runden Esstisch.

Nun behauptet jedes der Kinder, dass sein rechter Tischnachbar ein Teufelchen sei. Wie sieht die Sitzverteilung aus?

Hätte jedes der Kinder hingegen behauptet, zwischen einem Engelchen und einem Teufelchen zu sitzen, wie sähe dann die Tischordnung aus?

A 58.2 Weihnachtszeit – Knecht Ruprecht ist mit einem Helfer namens Franz unterwegs zum Geschenke-Verteilen. Sie fliegen mit Höchstgeschwindigkeit über die Ostsee auf Deutschland zu, Knecht Ruprecht in 2 km Höhe, Franz senkrecht unter ihm in nur 1 km Höhe, weil er seinen Rentierführerschein erst auf Probe hat. Natürlich sind die beiden über Sprechfunk miteinander verbunden – jedoch ist das Entfernungsradar ausgefallen. Um 15 Uhr meldet sich Knecht Ruprecht: „Ich sehe die Küste!“ Genau eine Viertelstunde später sieht auch Franz das Ufer. Er stellt fest: „Dann haben wir ja noch viel Reserve. Lass uns doch noch eine Viertelstunde auf der Insel der Ostsee-Engel ausruhen und noch ein paar Minuten mit den Seeschwalben plaudern.“ Knecht Ruprecht erwidert: „Solange du um Punkt 16 Uhr auf dem Land ankommst, kannst du alles tun, was du willst. Ich werde aber lieber direkt dorthin fliegen und mir die hoffentlich verschneite Landschaft anschauen.“

Wie viel Reserve haben die beiden tatsächlich – kann Franz sich noch einen langen Abstecher leisten?

A 58.3 Die vierte Klasse veranstaltet auf ihrer diesjährigen Weihnachstfeier ein Spiel um Schokoladentaler. Dazu legt die Lehrerin zunächst einen Taler in einen Topf und noch einen, als das erste Kind kommt. Bei jedem weiteren eintreffenden Kind verdoppelt sie die Anzahl der bereits im Topf liegenden Taler. Insgesamt kommen 27 Kinder. Das Spiel läuft dann folgendermaßen ab: Das Kind, das als Erstes gekommen ist, darf als Erstes den Topf auskippen und alle Taler behalten, die auf „Zahl“ gefallen sind. Falls nun noch Taler übrig sind, wird der Topf an das zweite Kind weitergereicht. Dieses mischt die restlichen

Taler, wirft sie wieder in den Topf, kippt ihn erneut um und behält ebenfalls alle auf „Zahl“ gefallenen Taler. So geht es weiter, bis alle Taler verteilt sind oder jedes Kind genau einmal dran war.

Ist die Wahrscheinlichkeit, dass das letzte Kind nicht mehr an die Reihe kommt, größer oder kleiner als 10 Prozent? Kann die Wahrscheinlichkeit größer als 15 Prozent werden, wenn mehr Kinder kommen?

A 58.4 Bekanntlich benutzt der Weihnachtsmann für seine Korrespondenz eine „SchreibFix 3000“, eine der neuesten Schreibmaschinen auf dem Markt, bei der die 26 Buchstaben kreisförmig auf einer drehbaren Scheibe angeordnet sind. Tim hat nun folgende Botschaft vom Weihnachtsmann erhalten:

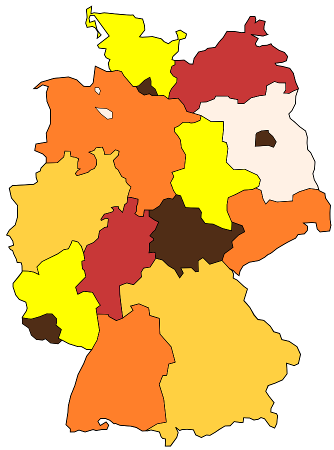
> But jxgayy, bus Cgrjk quss oin nkx;
> oin sayy kain ygmkt, ky ckontginzkz yknx ...

Er ahnt sofort, dass sich da die Weihnachtselfen einen Spaß erlaubt haben müssen und wahrscheinlich die Schreibmaschinenscheibe verdreht haben, ohne dass dies der Weihnachtsmann bemerkt hätte. Mit nur wenig Mühe kann er daraufhin die eigentliche Nachricht entziffern und freut sich, denn der Autor dieser Zeilen ist in derselben Stadt geboren, in der er selbst wohnt und in deren Schlosspark in jedem Frühjahr ganz bestimmte Blumen zu bewundern sind.

Welche Blumen sind das?

Mathematischer Korrespondenzzirkel

Aufgabenblatt 59



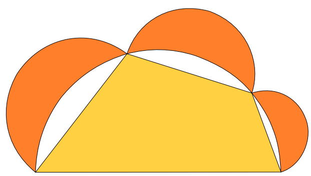
A 59.1 Nora muss im kooperativen Mathe-, Kunst- und Erdkundeunterricht die Karte der Bundesländer Deutschlands so färben, dass keine zwei benachbarten Länder gleich gefärbt sind. Im Atlas findet sie eine Version mit sechs Farben (siehe Abbildung rechts). Weil das Auswaschen des Pinsels so lästig ist, möchte sie mit möglichst wenig Farben auskommen – wie viele Farben benötigt sie mindestens?

Johanna möchte so viele Länder wie möglich mit ihrer Lieblingsfarbe färben: Wie oft kann sie sie verwenden?

A 59.2 Ist die Zahl

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{2006+\sqrt{2007}}}}}$$

kleiner oder größer als 2?



A 59.3 Das nebenstehende Bild zeigt ein Sehnenviereck, bei dem eine Seite ein Durchmesser seines Umkreises ist. Über den anderen drei Seiten wurden nach außen hin Halbkreise gezeichnet. Diese bilden zusammen mit den jeweiligen Abschnitten des Umkreises drei „Möndchen“.

Ist die Fläche der drei Möndchen zusammen dann größer, kleiner oder gleich der Fläche des Sehnenvierecks?

A 59.4 Finde eine positive reelle Zahl α so, dass

$$\lfloor\alpha\rfloor,\ \lfloor 2\cdot\alpha\rfloor,\ \lfloor 4\cdot\alpha\rfloor,\ \lfloor 8\cdot\alpha\rfloor,\ \lfloor 16\cdot\alpha\rfloor \text{ und } \lfloor 32\cdot\alpha\rfloor$$

alles Primzahlen sind.

Gibt es eine positive reelle Zahl α so, dass $\lfloor 2^n \cdot \alpha \rfloor$ für alle $n \geq 0$ eine Primzahl ist?

Hinweis: Hierbei ist $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x.

Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Aufgabenblatt 60

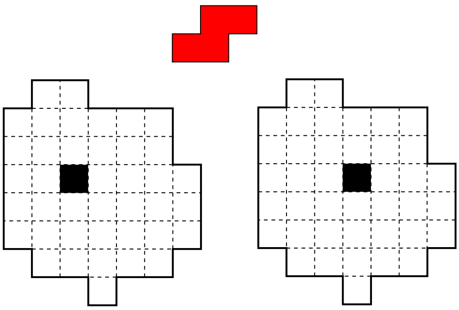
A 60.1 Rebekka muss auf ihrem Weg nach Hause an vier Ampeln vorbei, die (in dieser Reihenfolge) 60 m, 120 m und 80 m auseinander stehen. Alle Ampeln werden zu gleicher Zeit alle 60 Sekunden grün.
Rebekka startet an der ersten Ampel, als diese gerade grün wird, und will mit stets konstanter Geschwindigkeit so laufen, dass sie immer genau dann an der nächsten Ampel ankommt, wenn diese gerade grün wird.

Wie schnell kann sie maximal laufen, damit ihr Plan funktioniert?

A 60.2 Die Geschwister Ariadne und Bodo wollen ihre Zimmer vollständig mit roten Teppichfliesen – eine ist in der Abbildung dargestellt – auslegen. Die beiden Zimmer haben, wie im Bild dargestellt, denselben äußeren Grundriss. Allerdings befindet sich in beiden Zimmern je eine Säule quadratischen Querschnitts an unterschiedlicher Stelle, nämlich in Bodos (rechtem) Zimmer um eine quadratische Einheit weiter rechts.

Können beide Räume vollständig mit den Fliesen ausgelegt werden?

Hinweis: Die Fliesen dürfen hierbei auch gedreht, allerdings nicht gespiegelt werden – schließlich soll die rote Teppichseite oben bleiben.

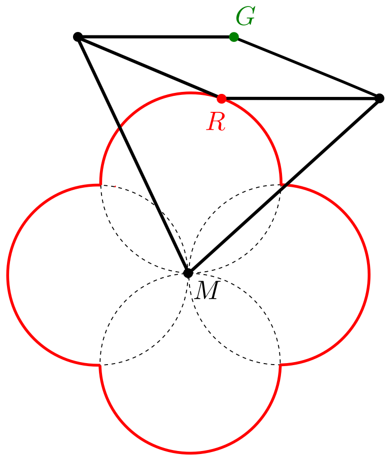


A 60.3 Ein Eisenbahnunternehmen transportiert täglich Container zwischen Adamshafen und Zweibergen: Jeweils um 12 Uhr setzen sich in beiden Orten Züge mit dem anderen Ort als Ziel in Bewegung. Für den Transport gibt es zum einen die „Standard-Wagen“, die zwei Container tragen können; von ihnen sind immer genügend vorhanden. Dazu gibt es auch Wagen, die nur einen Container tragen können; diese sind relativ teuer, weswegen die Firma davon möglichst wenige bereithalten möchte. Außerdem möchte sie niemals einen unbesetzten Transportplatz in einem Zug haben, weil das unnötig kostet und schlecht für das Image ist. Man darf davon ausgehen, dass bei jedem Transport wenigstens 5 Container befördert werden sollen und dass die genaue Anzahl für jeden Transport eine Stunde vor Beginn feststeht und beiden Verladestellen bekannt ist. Wie viele Wagen, die genau einen Container tragen können, muss die Firma daher mindestens besitzen?

Die Firma hat zudem eine Zweigstelle in den USA – dort ist ja alles etwas größer und es gibt nur Wagentypen, die 5 (Standardwagen) oder 2 (teurer Wagen) Container tragen können, außerdem werden bei jeder Fahrt mindestens 25 Container befördert. Wie lautet die Lösung des entsprechenden Problems für die Zweigstelle in den USA?

A 60.4 Robin hat auf dem Dachboden ein altes „Malwerkzeug“ gefunden.

Es besteht aus sechs Stäben, zwei der Länge 10 cm und vier der Länge 6 cm, die beweglich durch Gelenke miteinander verbunden sind (siehe Skizze). Weiterhin befindet sich im Gelenk R eine Abtastspitze, mit der man eine Linie abfahren kann, und im Gelenk G gibt es einen grünen Stift.
Robin probiert das Gerät an der abgebildeten Figur aus, bestehend aus vier Kreisbogenabschnitten von Kreisen mit Durchmesser 7 cm. Er fährt bei festgehaltenem Ende M also mit der Abtastspitze R die durchgezogene Linie ab, wobei der grüne Stift G eine Kurve auf das Papier malt.



Welche Kurve ist das und welche Länge hat sie?

Hinweis: Man kann bei dieser Aufgabe auch gern das „Gerät“ nachbauen (zum Beispiel aus Pappstreifen) und sie auf diese Weise „praktisch lösen“!

Aufgabenblatt 61

A 61.1 In einer kreativen Schaffenspause vertreibt sich das sechs Mann bzw. Frau starke Korrespondenzzirkelteam, bestehend aus (im linken Bild von oben nach unten und links nach rechts) Kristin, Karsten, Ulrike, Alex, Robert und Marco, die Zeit mit dem Bau von Menschenpyramiden – unten drei, darüber zwei und ganz oben eine Person. Jemand in einer der oberen beiden Reihen wird dabei also immer von genau zwei Personen darunter gestützt. Alle sechs sind verschieden schwer.

Wie viele verschiedene Pyramiden können gebaut werden, wenn nie eine leichtere Person eine schwerere halten soll?

Die Abbildung oben zeigt zwei mögliche Pyramiden. Ordne das Korrespondenzzirkelteam der Masse nach, wenn bekannt ist, dass Robert einen Hauch schwerer als Alex ist.

A 61.2 Die Firma „Ziegel-Klotz“ stellt quaderförmige Ziegelsteine mit den Abmessungen $1 \times 2 \times \sqrt{2}$ her. Aus 100 dieser Ziegel sollen Türme gebaut werden, indem diese direkt, das heißt immer einer auf den vorherigen, übereinandergestapelt werden – dabei müssen aber nicht immer Flächen gleicher Größe aufeinander liegen!

Wie viele verschiedene Turmhöhen sind möglich?

A 61.3 Gustav zeichnet ein gleichseitiges Dreieck, ein Quadrat und einen Kreis auf ein Blatt Papier und stellt verblüfft fest, dass der Umfang des Dreiecks gleich der Fläche des Quadrates, der Umfang des Quadrates aber gleich der Fläche des Kreises und der Umfang des Kreises schließlich gleich der Fläche des Dreiecks ist. Mit *Umfang* und *Fläche* ist hierbei jeweils die Maßzahl der entsprechenden Größe in cm bzw. cm^2 gemeint.

Wie groß sind die Seitenlängen von Dreieck und Quadrat und der Radius des Kreises?

A 61.4 Für zwei Zahlen x und y mit $x + y \neq 2003$ sei

$$x \odot y = \frac{x \cdot y + 8028}{x + y - 2003} \ .$$

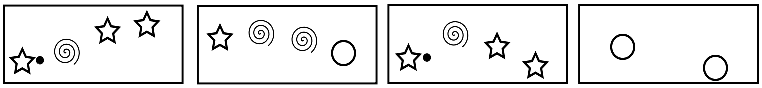
So gilt zum Beispiel $1 \odot 2 = \frac{1 \cdot 2 + 8028}{1 + 2 - 2003} = -\frac{803}{200}$.

Man berechne den Wert von

$$1 \odot (2 \odot (3 \odot (\ldots (999\,998 \odot (999\,999 \odot 1\,000\,000))))) \ .$$

Aufgabenblatt 62

A 62.1 „Holladrio!“ jubiliert Musikwissenschaftler Justus Klingtgut, als er zum ersten Mal das kürzlich entdeckte, altertümliche Notenblatt in Händen hält. Man vermutet, dass unsere Vorfahren, ebenso wie wir heute, für Noten



gleicher Länge gleiche Symbole verwendet und innerhalb jedes Kästchens Noten von einer Gesamtlänge von einem Takt (etwa 2 Sekunden) notiert haben. Ein Punkt hinter einem Notenzeichen scheint auch die Notenlänge um 50 Prozent zu verlängern. Die Höhe der Noten könnte durch die Höhe der Symbole im Kästchen angedeutet sein. In Fachkreisen munkelt man, bei obigem Stück handele es sich um ein auch heute noch bekanntes Volkslied.

Finde die Längen der einzelnen Notensymbole!

Zusatz: Für welches andere Musikstück ist der Dichter der zu den obigen Noten gehörenden Textzeilen *national* bekannt?

A 62.2 Kevin steht an einer dreispurigen Autobahn und sieht drei Autos gleichen Typs auf den drei Spuren ankommen. Als sie über eine Fuge fahren, die quer über die Fahrbahn verläuft, will es der Zufall, dass die Autos fünf Töne in genau gleichen Abständen verursachen, wobei der vierte Ton stärker als die anderen ist. Der Abstand vom ersten zum letzten Ton beträgt genau eine Sechstelsekunde.
Kevin weiß, dass der Achsstand der Autos 2,5 m beträgt, und an die Geschwindigkeitsbeschränkung von 130 km/h haben sich augenscheinlich auch alle Autos in etwa gehalten.

Wie schnell waren die Autos? Und auf welcher Spur fuhr das Auto, das den ersten Ton verursacht hat?

A 62.3 Im konvexen Viereck $ABCD$ liegt ein Kreis, der alle vier Seiten des Vierecks berührt. Es ist bekannt, dass $|AB| = 2$ cm, $|BC| = 3$ cm und $|CD| = 7$ cm ist. Außerdem ist der Innenwinkel bei B ein rechter Winkel.

Wie groß ist der Radius des Kreises?

A 62.4 Daniel denkt sich zuerst zwei positive, reelle Zahlen a und b, für die $a + b = 1$ gilt. Dann wählt er positive ganze Zahlen n und m und berechnet

$$(1 - a^m)^n + (1 - b^n)^m \ .$$

Kann dabei ein Wert kleiner als 1 herauskommen?

Aufgabenblatt 63

A 63.1 Sieben Zwerge graben sieben Tage lang täglich sieben Stunden an einem Tunnel durch den Berg und kommen dabei insgesamt sieben Meter vorwärts.
Zwerg Frosti wird krank, und da man sich um ihn kümmern muss, wird die Arbeitszeit aller Zwerge um eine Stunde verkürzt.

In den nächsten sechs Tagen graben also nur noch sechs Zwerge sechs Stunden täglich an dem Tunnel und kommen dabei ... ja, wie weit kommen die Zwerge dabei dann eigentlich vorwärts?

A 63.2 Finde ganze Zahlen a, b und c so, dass

$$\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} = a + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

gilt.

A 63.3 Die drei Musketiere Athos, Porthos und Aramis stehen wieder vor einer kniffligen Entscheidung: Wer muss am Abend den Abwasch erledigen?
Zur Entscheidungsfindung werfen sie diesmal jeder eine Münze so lange, bis sie zum ersten Mal „Zahl“ zeigt. Bei wem dies nach der geringsten Anzahl an Würfen geschieht, der muss abwaschen. Bei Gleichstand wird das Spiel wiederholt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss das Spiel wiederholt werden?

A 63.4 Die Zahlen von 1 bis 100 werden irgendwie zufällig auf die Felder eines 10×10-Spielbrettes verteilt.
Nun darf man in einem Zug beliebige zwei Zahlen auf dem Brett miteinander vertauschen. Ziel hierbei ist es, eine Konstellation zu erreichen, bei der die Summe keiner zwei horizontal, vertikal oder diagonal benachbarten Zahlen eine Primzahl ist.

Man beweise, dass man dies mit höchstens 38 Zügen erreichen kann.

Aufgabenblatt 64

mathematischer Korrespondenz-zirkel

A 64.1 Käpt'n Jakob Sperling und seine Piraten der *Schwarzen Perle* haben in ihrer letzten Seeschlacht schwere Verluste erlitten. Daher landen sie auf Tortuga und suchen nach Ersatz für ihre verletzten Kameraden. Da jedoch alle Piraten sehr abergläubisch sind, muss die Anzahl der neuen Männer gewisse Piratenregeln erfüllen: Sie muss eine Primzahl und ein Palindrom sein und die Anzahl ihrer Ziffern muss gerade sein.

Wie viele neue Mannschaftsmitglieder kann Käpt'n Jakob höchstens anheuern?

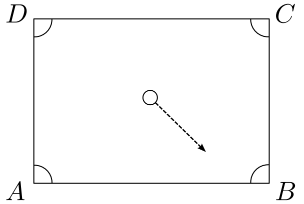
Hinweis: Ein Palindrom ist eine Zahl, die sich nicht ändert, wenn man ihre Ziffernreihenfolge umkehrt.

A 64.2 Eine Lösung der Gleichung $x^2 - 6x + 7 = 0$ hat an ihrer 2007. Nachkommastelle die Ziffer 8.

Welche Ziffer hat die andere Lösung an ihrer 2007. Nachkommastelle?

A 64.3 Ein Billardtisch ist 128 cm lang und 88 cm breit. An den vier Ecken hat er je ein viertelkreisförmiges Loch, durch das eine Billardkugel mit 5 cm Radius genau hindurchpasst.

Wie groß ist der Radius der Viertelkreise der Löcher?



Zu Beginn liegt eine Kugel genau in der Mitte des Tisches; ansonsten ist der Tisch leer. Die Kugel wird langsam im 45°-Winkel zu den Seiten gestoßen.

In welches Loch wird die Kugel fallen, wenn die Reibung vernachlässigbar ist?

Hinweis: Die Kugel fällt in ein Loch, sobald sich ihr Auflagepunkt auf dem Lochviertelkreis befindet. Sie wird von der Bande reflektiert, sobald ihr Rand (nicht ihr Mittelpunkt) diese berührt.

A 64.4 Auf einem kreisrunden Erdbeerkuchen sind neben vielen Erdbeeren auch zwei (für unsere Rechnungen: punktförmige) Heidelbeeren zufällig verstreut.

a) Der Kuchen wird in n gleiche Stücke geteilt, indem mit dem Messer von der Mitte des Kuchens n gerade Schnitte nach außen gemacht werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind dann die beiden Heidelbeeren auf demselben Stück?

b) Nun wird der Kuchen durch die gleiche Art von Schnitten in n Stücke zufälliger Größe geteilt. Man stelle sich zum Beispiel vor, dass der Kuchen auf einem Drehtablett liegt und vor jedem Schnitt der Kuchen zufällig irgendwie verdreht wird.

   Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die beiden Heidelbeeren nun in demselben Stück?

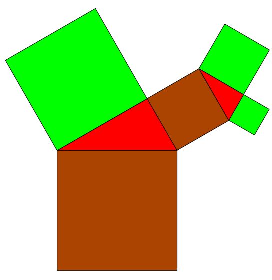
Aufgabenblatt 65

A 65.1 Welche regelmäßigen n-Ecke der Seitenlänge 1 kann man in kleinere regelmäßige Vielecke (nicht unbedingt n-Ecke!) der Seitenlänge 1 zerlegen und auf welche Art und Weisen ist dies gegebenenfalls machbar?

A 65.2 Käpt'n Sperling hat elf Kandidaten für seine Piratentruppe gefunden. Zu Beginn muss er sie aber in piratöser Lebensweise unterrichten. Heute steht das Lügen auf dem Programm – das soll ja nicht etwa plump sein!
Der Käpt'n sagt: „Jungs, ich weiß, dass ihr alle aus Schwarzdorf oder aus Knochenbrück kommt, aber ich weiß nicht, wer woher ist. Sagt mir, woher ihr kommt – aber denkt daran: Keiner darf die Wahrheit sagen."
Die Nr. 1 (alle anderen Neuen stehen in schöner Reihe links von ihm) sagt: „Die Zahl der Männer aus Schwarzdorf ist eine Quadratzahl." Nr. 2, 3, 6, 7 und 9 sagen: „Ich komme nicht aus derselben Stadt wie mein rechter Nachbar." Hingegen behaupten Nr. 4, 5, 10 und 11: „Ich komme aus derselben Stadt wie mein rechter Nachbar." Schließlich stellt Nr. 8 fest: „Aus Knochenbrück kommt eine ungerade Zahl Männer."

Der Käpt'n ist zufrieden mit seinen neuen Mannen – wer kommt woher?

A 65.3 Ein „Pythagorasbaum" entsteht, wenn man auf ein Quadrat der Seitenlänge 1 als Stamm ein rechtwinkliges Dreieck mit seiner Hypotenuse aufsetzt, dann die beiden Kathetenquadrate zeichnet und dann weiter beliebig (aber endlich) oft auf irgendein schon gezeichnetes Quadrat wieder ein dem ursprünglichen rechtwinkligen Dreieck ähnliches rechtwinkliges Dreieck aufsetzt (der Ästhetik zuliebe gleichorientiert zum ersten) und dann wieder die beiden Kathetenquadrate einzeichnet usw.
Die „äußeren" Quadrate am Baum werden „Blätter" des Baumes genannt. Die folgende Abbildung zeigt einen Baum mit drei verschieden großen Blättern.



Gibt es einen Pythagorasbaum mit mehr als 1000 Blättern, aber nur zwei verschiedenen Blattgrößen, bei dem das verwendete Dreieck nicht gleichschenklig ist?

A 65.4 Auf wie viele Arten kann man Spielsteine so auf ein 3×10-Spielbrett setzen, dass keine zwei Steine horizontal, vertikal oder diagonal benachbart sind?

athematischer orrespondenz-zirkel (MK)

Aufgabenblatt 66

A 66.1 Zehn Schüler nahmen an einem Mathewettbewerb teil. Jede Aufgabe wurde von genau sieben Schülern gelöst. Neun der zehn Schüler lösten jeweils genau vier Aufgaben.

Wie viele Aufgaben hat der zehnte Schüler gelöst?

A 66.2 Für eine bevorstehende große Seeschlacht hat Käpt'n Jakob Sperling 5100 frische Kanonenkugeln besorgt. Davon sind 5000 Stück für die „Dicke Bertha" und 100 Stück für die praktische kleine Handkanone „Flotte Lotte". Seine Jungs können es nun nicht lassen und spielen verbotenerweise mit einer zufällig ausgewählten Kugel Bowling auf dem Deck. Dabei wird die Kugel so lädiert, dass sie nicht mehr geradeaus fliegen wird. Die Crew versucht den „Unfall" zu vertuschen und legt die beschädigte Kugel einfach wieder zu den anderen. Käpt'n Jakob Sperling merkt jedoch natürlich sofort, dass etwas faul ist, und befragt seine Mannschaft. Einer der Piraten behauptet, sie hätten mit einer großen Kugel für die „Dicke Bertha" gespielt. Der Pirat ist trotz der Unterrichtsstunde im Lügen leider noch kein Profi, denn er lügt bei solchen Angelegenheiten nur in 95 Prozent aller Fälle.

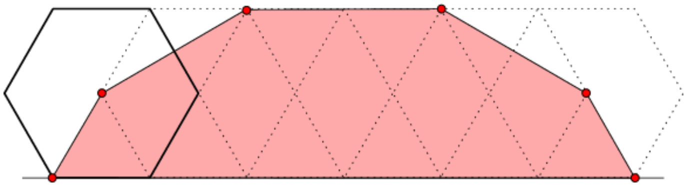
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft tatsächlich mit einer Kugel der „Dicken Bertha" gespielt hat?

A 66.3 Das Polynom $P(x) = x^2 + x^3 + x^5 + \ldots + x^{97}$ enthält als Summanden alle x-Potenzen mit Primzahlexponenten, die kleiner als 100 sind. Jemand berechnet das Polynom

$$Q(x) = P(x)^4 = a_{388}x^{388} + a_{387}x^{387} + a_{386}x^{386} + \ldots + a_1 x + a_0\,.$$

Was ist dann der Wert der Summe $a_0+a_2+a_4+\ldots+a_{386}+a_{388}$ der Koeffizienten mit geradem Index?

A 66.4 Ein regelmäßiges Sechseck „rollt" entlang einer Geraden, indem es fortlaufend über die rechte der beiden auf der Geraden liegenden Ecken gekippt wird. Zu Beginn ist die Position der linken unteren Ecke des Sechsecks markiert. Nach jeder Kippung wird wieder die Position dieser Ecke markiert. Nach fünf solcher Kippungen berührt die betrachtete Ecke zum ersten Mal wieder die Gerade.



Zeige, dass das Flächenstück, das durch die markierten Punkte und die Gerade begrenzt ist, genau dreimal so groß ist wie die Fläche des Sechsecks.

Wie ist das Verhältnis der entsprechenden Flächen bei anderen regelmäßigen n-Ecken? Behandle zunächst die Fälle $n = 3$ und $n = 4$, und stelle dann eine Vermutung auf und versuche, diese zu beweisen.

Mathematischer Korrespondenzzirkel

Aufgabenblatt 67

A 67.1 Finde alle natürlichen Zahlen n, für die $\frac{n+9}{n-9}$ eine natürliche Zahl ergibt.

Sei allgemeiner k eine natürliche Zahl – bestimme analog die Menge aller natürlichen Zahlen n, für die $\frac{n+k}{n-k}$ eine natürliche Zahl ist.

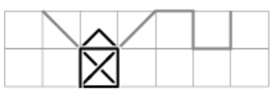
A 67.2 Zeige, dass die „Jahreswechselzahl“

$$111\ldots11222\ldots225\,,$$

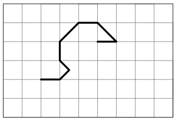
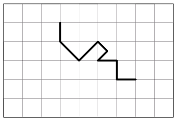
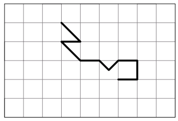
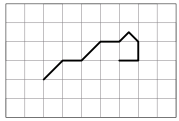
die mit 2007 Einsen und 2008 Zweien und einer Fünf geschrieben wird, eine Quadratzahl ist.

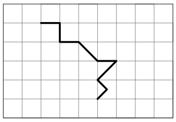
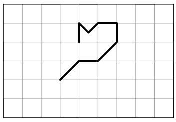
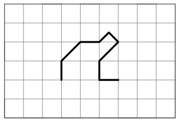
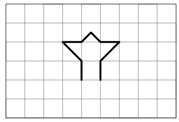
A 67.3 Die Crew um Käpt’n Sperling kreuzt im Nordmeer herum. Einige Schiffe werden gesichtet, doch der Chef bläst nie zum Angriff, was die Crew wundert. Darauf angesprochen, erklärt Sperling: „Seht ihr das hell erleuchtete Haus da hinten auf der Insel? Das ist das Haus vom Nikolaus. Und die meisten Schiffe hier liefern ihm Nachschub für die Weihnachtsgeschenke, bei denen er dem Weihnachtsmann hilft. Ehrensache, dass wir die nicht plündern! Die Schiffe erkennt man übrigens an einem speziellen Flaggentyp: Auf ihr ist ein Streckenzug, dessen einzelne Strecken in der gegebenen Reihenfolge Längen haben, wie sie auch auftreten können, wenn man das bekannte ‚Haus vom Nikolaus‘ zeichnet.“
Ein Beispiel für einen Streckenzug, der auf einer echten Flagge abgebildet sein könnte, ist der folgende:

Denn durch Umformen des Streckenzuges erhält man:



Welche der folgenden Flaggen sind echt, welche sind Fälschungen?

1: 
2: 
3: 
4: 

5: 
6: 
7: 
8: 

A 67.4 Die Funktion f habe die Eigenschaft

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$$

für alle reellen Zahlen x, y. Zeige, dass f eine konstante Funktion ist.

Aufgabenblatt 68

A 68.1 Für zwei positive reelle Zahlen a und b gelte $\frac{a^2+b^2}{ab} = 68$.

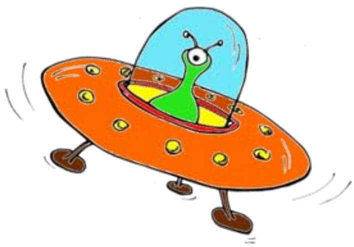
Welche Werte kann dann der Term $\frac{a+b}{a-b}$ annehmen?

A 68.2 Was ist die kleinste positive ganze Zahl n, für die $2008 \cdot n$ genau 2008 positive Teiler mehr hat als n selbst?

A 68.3 Fliesenleger Ingo benutzt am liebsten Schmuckfliesen, bei denen 3×4 Fliesen schon zusammengesetzt sind. Häufig schafft er es, die zumeist rechteckigen Grundrisse von Bädern und Küchen damit auszulegen, manchmal muss er jedoch Fliesen in ihre Einzelfliesen zerteilen. Natürlich fragt er sich dann, ob er sich nur dumm angestellt hat oder ob es wirklich nicht anders ging – also: Welche Rechtecke aus $m \times n$ quadratischen Feldern lassen sich mit Rechtecken der Größe 3×4 lückenlos und überschneidungsfrei belegen?

A 68.4 Die Kapitäne Kark, Kerk, Kork und Kurk steuern ihre stolzen (baugleichen) Raumschiffe durch die unendlichen Weiten der Galaxis.

Zur Verteidigung des Friedens der Galaxis sind sie als Außenposten stationiert, und zwar befindet sich Kark genau in der Mitte zwischen den Planeten Alpha und Beta, Kerk mittig zwischen Beta und Gamma, Kork ist genau zwischen Gamma und Delta stationiert und Kurk schließlich hält mit seinem Schiff in der Mitte zwischen Delta und Alpha Wache.



Am Freitagnachmittag starten die vier gleichzeitig zu einem intergalaktischen Treffen: Auf geradem Weg steuern Kark und Kork mit Maximalgeschwindigkeit aufeinander zu, ebenso tun dies Kerk und Kurk. Sobald je zwei aufeinandertreffen, bleiben sie am Treffpunkt stehen.

Zeige, dass sich bei dieser Taktik sogar alle vier an einem Ort treffen.

Mathematischer Korrespondenzzirkel

Aufgabenblatt 69

A 69.1 Es gibt Neues von unseren Piraten der *Schwarzen Perle*, nachdem sie eine Weile von der Bildfläche verschwunden waren: Sie waren untergetaucht! Käpt'n Sperling ist auf die Idee gekommen, dass man dank Erdkrümmung weniger Strecke mit einem Schiff zurücklegen muss, wenn man zwischendurch etwas taucht, und so wurde die *Schwarze Perle* zu einem U-Boot umgebaut, das bis zu 500 m tief gehen kann. (Nebeneffekt: Man entkommt so leichter den Verfolgern!) Zum Vergleich: Der Erdradius beträgt etwa 6366 km.

Auf der Demonstrationsfahrt möchte Käpt'n Sperling den wirklich kürzesten Weg durch den Ärmelkanal zwischen den Häfen von Dover und Calais nehmen, das sind normalerweise 41 km „erdgekrümmte" Strecke. Wie tief wird er dabei eintauchen?

Schließlich geht es auf große Fahrt: Die Mannschaft nimmt sich die (*auf* dem Wasser gemessen) 6431 km lange Strecke durch den Atlantik von Porto (in Portugal) bis zu – wer hätte es gedacht! – der Insel Tortuga in der Karibik vor. Wie viele Kilometer Strecke kann Sperling durch seine Tauchfähigkeit sparen?

A 69.2 Welche fünfstelligen Zahlen, bei denen keine Ziffer eine Null ist, haben die Eigenschaft, dass ihre letzte Ziffer die aus den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl teilt, dass die aus den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl die aus den letzten drei Ziffern gebildete Zahl teilt, dass die aus den letzten drei Ziffern gebildete Zahl die aus den letzten vier Ziffern gebildete Zahl teilt und dass schließlich die aus den letzten vier Ziffern gebildete Zahl die gesamte Zahl selbst teilt?

A 69.3 Beim Abheften des folgenden Gleichungssystems ist es leider an den falschen Stellen gelocht worden …

$$\begin{aligned} x + 4y &= \boxed{} \\ 2x \boxed{} y &= \boxed{} \end{aligned}$$

Die fehlenden Zahlen werden noch gefunden: $\boxed{-8}$, $\boxed{-4}$, $\boxed{+8}$, aber man weiß nicht mehr, welche Zahl in welcher Lücke war. Sjaan erinnert sich aber daran, dass es für das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung gab und dass x positiv war. Kann man daraus das Gleichungssystem rekonstruieren?

A 69.4 Das siebenköpfige Korrespondenzzirkelteam sitzt im Kreis und vertreibt sich die Zeit mit folgendem Spiel:

Zu Beginn hat jeder eine zufällige Anzahl von Äpfeln vor sich liegen, jedoch nicht mehr als 20. In der Mitte der Runde befindet sich außerdem ein sehr großer Apfelvorrat. Ein Spielzug besteht nun darin, dass zunächst alle Spieler mit einer ungeraden Anzahl von Äpfeln einen Apfel vom Vorrat nehmen. Danach geben alle Spieler gleichzeitig die Hälfte ihrer Äpfel an ihren jeweils rechten Sitznachbarn weiter.

Das Spiel ist beendet, sobald der Vorratsberg aufgebraucht ist.

Zeige, dass das Spiel niemals endet, wenn man den Vorrat nur groß genug (aber endlich) wählt.

Finde – abhängig von der Anfangssituation – einen möglichst kleinen Vorrat, der dafür ausreicht, dass das Spiel nicht endet.

Aufgabenblatt 70

athematischer
orrespondenz-
zirkel

A 70.1 Auf jedem Feld eines Schachbrettes liegen Reiskörner, dabei können auf verschiedenen Feldern durchaus verschieden viele Körner liegen. In der ersten Zeile des Brettes liegen mehr Körner als in der ersten Spalte, in der zweiten Zeile des Brettes liegen mehr Körner als in der zweiten Spalte und so weiter bis zur siebenten Zeile, in der mehr Körner liegen als in der siebenten Spalte.

Wo liegen mehr Körner: In der achten Zeile oder in der achten Spalte?

A 70.2 Welche der beiden Zahlen $A = \sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n} + \ldots + \sqrt[199]{n}$ bzw. $B = n$ ist die größere für

a) $n = 208$;

b) $n = 2008$?

A 70.3 Die Pfadfindergruppe „Fähnlein Möbiusband“ marschiert gemächlich mit konstanter Geschwindigkeit von 3 km/h in quadratischer Formation mit Seitenlänge 16 m durch das Göttinger Umland. Fähnleinführer Felix will die Formation kontrollieren und startet an der linken vorderen Ecke des Quadrates und läuft mit einer (größeren) konstanten Geschwindigkeit einmal entlang des Randes des Quadrates um die gesamte Gruppe herum. Als er wieder an seiner Ausgangsposition ankommt, ist der Trupp genau 54 m vorwärtsgekommen.

Wie schnell (in km/h) ist Felix bei seinem Kontrollgang gelaufen?

A 70.4 Platznot bei unseren Piraten. Daher wollen sie ihre Kanonenkugeln möglichst platzsparend unterbringen. Sie stellen fest: Wenn drei große Kugeln mit Durchmesser 45 cm so auf dem Boden liegen, dass sie sich gegenseitig berühren, passt darunter genau noch eine der mittelgroßen Kanonenkugeln, das heißt, sie berührt dann alle drei großen Kugeln. Und noch besser: In den Zwischenraum unter zwei großen und einer mittleren Kugel passt in gleicher Weise noch eine kleine Kugel.

Welche Durchmesser haben eine mittelgroße und eine kleine Kanonenkugel?

athematischer
orrespondenz-
zirkel

Aufgabenblatt 71

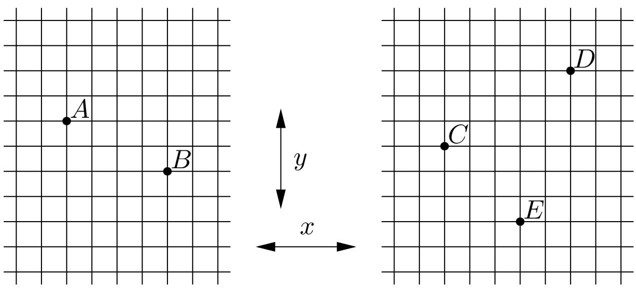
A 71.1 Carolin hat je ein Gewichtsstück der Masse 1 g, 2 g, 3 g, …, 70 g. Kann sie diese so auf die beiden Seiten einer Balkenwaage verteilen, dass diese im Gleichgewicht ist?

Wie ist die Antwort, wenn sie unterm Bett noch ein Gewichtsstück der Masse 71 g findet und dieses mit verwenden will?

A 71.2 Drei Spielsteine stehen zu Beginn auf den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge 1. In einem Zug darf einer der Steine an einem beliebigen anderen der Steine gespiegelt werden. Nach einer gewissen Anzahl an Zügen bilden die drei Steine wieder ein gleichseitiges Dreieck.

Welche Seitenlängen sind für dieses Dreieck möglich?

A 71.3 Unsere Piraten wollen sich auf Tortuga zur Ruhe setzen. Damit der Ruhestand möglichst angenehm wird, suchen sie noch ein letztes Mal Schätze im Wald der Insel. Von einem verstaubten Pergament vom Dachboden ihres Domizils wissen sie Folgendes:
Im – übrigens vollkommen ebenen – Wald gibt es bestimmte Bäume, in deren Rinde Abstandsdaten zu einem Schatz eingeritzt sind, und zwar jeweils der Abstand in x-, y- und z-Richtung; die z-Richtung beschreibt die Tiefe, in der der Schatz liegt. Die drei Zahlen sind allerdings in keiner bestimmten Reihenfolge angegeben.



Zum ersten Schatz gibt es die Bäume A und B (siehe Skizze – sie haben also einen Abstand 4 in x-Richtung und 2 in y-Richtung) mit den Abstandswerten (0, 1, 2) und (1, 2, 4).

Die drei Bäume zum zweiten Schatz sind älter, bei ihnen kann man nicht mehr alle Zahlen lesen – bei C nur 4 und 4, bei D nur 6 und 7 und bei E nur eine 7.

Wo (und wie tief) liegen die Schätze?

A 71.4 Gibt es positive, rationale Zahlen a und b, die beide nicht ganzzahlig sind, für die aber $a + b$ und $a^n + b^n$ ganzzahlig sind für

a) $n = 2008$?

b) $n = 2009$?

Aufgabenblatt 72

A 72.1 Die folgende „falsche" Kürzung eines Bruches führt zufälligerweise zu einem richtigen Ergebnis:

$$\frac{16}{64} = \frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}\,.$$

Finde alle Brüche mit zweistelligem Zähler und Nenner, die auf die gleiche (falsche) Weise zu einer richtigen Kürzung führen.

A 72.2 Theo hat zwei Würfel, auf denen jeweils wie üblich die Zahlen von 1 bis 6 je genau einmal verteilt sind. Susi hingegen hat zwei Würfel, von denen man nur weiß, dass auf jeder ihrer Seitenflächen eine positive ganze Zahl steht. Hierbei müssen Susis Würfel nicht unbedingt beide gleich beschriftet sein und es dürfen auch Zahlen mehrfach auf einem Würfel vorkommen.
Nun stellt sich heraus: Für jede der Zahlen $n = 2, 3, 4, \ldots, 12$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass Theo mit seinen Würfeln die Augensumme n wirft, genauso groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass Susi diese Augensumme wirft.

Muss Susi auch jeweils die Zahlen von 1 bis 6 auf jedem ihrer Würfel haben?

A 72.3 Die Bundeskanzlerin empfängt an einer langen Tafel Staatsgäste, und zwar zwei aus Triangulanien und drei aus Zirkulanien. Diese sollen alle an einer der langen Seiten eines rechteckigen Tisches sitzen und jeder Gast bekommt ein Platzdeckchen, welches sich mit keinem anderen Deckchen überlappt, nicht über den Rand des Tisches hinausragt, aber in jedem Fall die Seite des Tisches, an der die Gäste sitzen, in wenigstens einem Punkt berührt.
Die Zirkulanier essen bekanntlich nur von kreisförmigen Deckchen mit Durchmesser 1 Meter und die Triangulanier würden das Essen nicht anrühren, wenn ihre Deckchen nicht die Form gleichseitiger Dreiecke mit Höhe 1 Meter hätten.

Finde die Länge eines möglichst kurzen Tisches, der ein zufriedenes Essen garantiert.

A 72.4 Stefan baut ein Mobile: Er sägt aus einem Holzbrett fünf kongruente Vierecke aus, markiert auf jedem Viereck denselben Punkt und befestigt an jedem der Vierecke eine Schnur am markierten Punkt. Anschließend befestigt Stefan vier der Vierecke mit ihren Schnüren an den vier Ecken des fünften. Er hebt die Konstruktion an der Schnur des fünften Vierecks in die Luft und stellt fest, dass alle Vierecke genau waagerecht hängen (wie das bei einem Mobile auch sein soll ...).

Zeige, dass Stefan kongruente Parallelogramme ausgeschnitten haben muss.

Aufgabenblatt 73

A 73.1 Es gilt bekanntlich $\frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots$ Gibt es noch weitere Brüche mit einstelligen Zählern und Nennern, für die

$$\frac{a}{b} = 0{,}abbb\ldots$$

gilt?

A 73.2 Karl ist Gärtner und hat ein Blumenbeet, das gleichmäßig mit acht mal acht roten Blumen bepflanzt ist. Um etwas Abwechslung ins Beet zu bekommen, möchte er einige der roten Blumen durch blaue ersetzen, und zwar so, dass sich ein vollständiges blaues Blumenrechteck ergibt, dessen Kanten parallel zu den Kanten des Blumenbeets liegen.

Wie viele solcher Rechtecke gibt es?

A 73.3 Ein Frosch sitzt auf einer Ecke eines Tetraeders. Am Ende jeder Minute entscheidet er sich für eine der benachbarten Ecken und springt dorthin.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit sitzt der Frosch nach genau einem Tag wieder auf seiner Ausgangsecke?

A 73.4 Ein 120 Meter langes Seil ist an den Spitzen zweier 50 Meter bzw. 100 Meter hoher Bäume befestigt. Die beiden Bäume stehen 100 Meter voneinander entfernt.
An dem Seil ist eine bewegliche Rolle befestigt, mit deren Hilfe der kleine, mutige Klaus, an der Rolle hängend, vom höheren zum niedrigeren Baum gelangen will. Bei dieser Bewegung ist das Seil stets von der aktuellen Rollenposition zu den Befestigungsenden an den Bäumen straff gespannt.

Welches ist die kleinste Höhe über dem Erdboden, die Klaus bei seiner akrobatischen Übung haben wird? Der kleine Klaus misst übrigens bei nach oben gestreckten Armen gerade mal 2 Meter.

Aufgabenblatt 74

Mathematischer Korrespondenzzirkel

A 74.1 Gustav schreibt am 1. Januar 2009 die Zahl 1 auf ein Blatt, am 2. Januar schreibt er die Zahlen 2 und 3 auf, am 3. Januar dann die Zahlen 4, 5 und 6 usw. Er setzt also an jedem Tag die Zahlenreihe des Vortages um genau eine Zahl mehr als am vorherigen Tag fort.

Was ist die Summe der Zahlen, die er am 31. Dezember 2009 aufschreibt?

A 74.2 Es ist Semesterbeginn, und zwanzig neue Mathematik-Studenten spielen ein Kennenlernspiel. Sie sitzen in einem Stuhlkreis, und genau einer der Stühle ist rot. Wer auf dem roten Stuhl sitzt, hat zwei Möglichkeiten, für eine neue Sitzordnung zu sorgen: Entweder dreht sich die Runde so weit im Kreis, dass ein von dem Spieler bestimmter anderer Mitspieler auf den roten Stuhl kommt. Oder der Spieler auf dem roten Stuhl kann mit dem Spieler vier Plätze weiter rechts oder vier Plätze weiter links den Platz tauschen.

a) Klara sitzt auf dem roten Stuhl und genau gegenüber von Sebastian – und würde gerne neben ihm sitzen ... Wenn alle mithelfen: Wie viele Runden dauert es, bis sie nebeneinander sitzen?

b) Wie lautet die Antwort auf die erste Frage, wenn sich rechts von Klara noch ein einundzwanzigster Mitspieler dazugesellt?

A 74.3 Vier Wüstenspringmäuse stehen an den Eckpunkten eines Quadrates mit der Seitenlänge 5 m. Jede von ihnen hat eine saftige Beere, aber wie das so ist, schielt jede Maus auf die Beere ihrer rechten Nachbarin, ob diese nicht größer ist. Da man dies aus dieser Entfernung nicht genau feststellen kann, springen alle Mäuse – gleichzeitig – zu ihrer jeweils rechten Nachbarin los und landen nach der Hälfte der Strecke. Dort merkt jede Maus, dass ihre rechte Nachbarin ebenfalls ihren Standort gewechselt hat und springt erneut die Hälfte des Weges auf ihre Nachbarin zu. Dies setzen die Mäuse immer weiter fort, bis zwei sich treffen.

a) Wie groß ist die Strecke, die jede Maus zurücklegt?

b) Wie verändert sich die Streckenlänge, wenn jede Maus nicht die Hälfte, sondern einen n-ten Teil des Weges springt? Was passiert dann für sehr große n?

A 74.4 Welche Polynomfunktionen haben einen Graphen mit einer Symmetrieachse, die nicht parallel zur y-Achse ist?

Aufgabenblatt 75

A 75.1 Ein Systemadministrator möchte seinen Hauptrechner mit einer Lüftung versehen. Die Luft geht dabei durch ein kreisrundes Rohr in den Rechnerraum hinein und durch ein ebenso großes Rohr wieder hinaus. In der Wand ist bereits eine rechteckige Öffnung von 37 mal 59 Zentimetern, die für die Rohre genutzt werden kann.

Wie groß kann man den Durchmesser der Rohre maximal wählen, wenn man das Loch nicht erweitern möchte?

A 75.2 Es gilt $(20 + 25)^2 = 2025$. Finde alle Paare zweistelliger Zahlen (wobei führende Nullen erlaubt sind), bei denen das Quadrat der Summe gleich der Zahl ist, die beim Hintereinanderschreiben entsteht.

A 75.3 Der Reiseleiter Marco Olo ist mit einer Gruppe von Touristen in New York. Heute will er ihnen das Gebiet zwischen der 47th und 59th Street in Nord-Süd-Richtung sowie der 1st und 13th Avenue zeigen – mit Ausnahme des Broadway, den sie schon gestern besichtigt haben und der sich nicht so klar an einer einzigen Richtung orientiert. Die übrigen Straßen in diesem Teil Manhattans sind – etwas idealisiert – nach einem Schachbrettmuster angeordnet mit einer Ausdehnung von jeweils 12 „Feldern“ in Nord-Süd- bzw. Ost-West-Richtung. Sie starten bei der Metro-Station an der Kreuzung 53rd Street / Seventh Avenue genau in der Mitte des Gebietes.
Die Reisegruppe, die übrigens nur aus Mathematikern besteht, wünscht sich dabei eine Stadtführung der besonderen Art: An jeder Kreuzung soll mit Hilfe zweier Münzwürfe ausgelost werden, in welche der vier Himmelsrichtungen die Gruppe weitergehen wird. Für den Weg zwischen zwei Kreuzungen will man sich jeweils eine halbe Stunde Zeit nehmen. Insgesamt soll die Stadtführung drei Stunden dauern, da Marco damit rechnet, dass die Touristen nach dieser Zeit erschöpft sein werden.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht die Gruppe die 59th Street, wo man sich im Central Park ausruhen könnte?

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Gruppe innerhalb der drei Stunden noch einmal an ihrem Ausgangspunkt vorbeikommt?

A 75.4 Im Weihnachtsengelland müssen noch die vielen Bäume mit Kerzen versehen werden. Es gibt drei Arten, einen Baum zu schmücken: Einmal mit 71, dann mit 101 und auch noch mit 147 Kerzen. Das Schmücken eines solchen Baumes benötigt 4 bzw. 5 bzw. 6 Arbeitsstunden.
Im vergangenen Jahr wurden genau eine Million Kerzen verwendet, und die Arbeit umfasste 48 600 Arbeitsstunden. Ein junger Engel erinnert sich noch daran, dass genau 9 984 Bäume geschmückt wurden. Der Leiter der Baumdekorationsabteilung bestätigt diese Zahl, stellt aber fest: „Im letzten Jahr haben wir allerdings auch ein paar Bäume zu schmücken vergessen, das darf nicht wieder vorkommen. Es könnte aber auch sein, dass inzwischen ein paar Bäume verschwunden sind. Trotzdem sollen wir in diesem Jahr wieder die gleiche Zahl an Kerzen und an Arbeitsstunden aufwenden. Ich frage mich gerade, welchen Spielraum wir da haben ...“

Könnt ihr dem Engel helfen? Für welche Anzahlen an Bäumen ist es möglich, sie gemäß den Vorgaben zu schmücken?

Teil II

Lösungen

Lösungen zu Aufgabenblatt 51

L 51.1 Es ist

$$\begin{aligned} \frac{7}{13} &= \frac{7\cdot 30\cdot 17}{13\cdot 30\cdot 17} = \frac{3570}{6630}\,, \\ \frac{11}{17} &= \frac{11\cdot 30\cdot 13}{17\cdot 30\cdot 13} = \frac{4290}{6630} \quad \text{und} \\ \frac{7+11}{13+17} &= \frac{18}{30} = \frac{18\cdot 13\cdot 17}{30\cdot 13\cdot 17} = \frac{3978}{6630}\,. \end{aligned}$$

Nun sieht man:

$$\frac{7}{13} = \frac{3570}{6630} < \frac{7+11}{13+17} = \frac{3978}{6630} < \frac{11}{17} = \frac{4290}{6630}\,.$$

Kristins Bruch $\frac{7+11}{13+17}$ liegt also zwischen den Brüchen $\frac{7}{13}$ und $\frac{11}{17}$.
Gilt für die beiden Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ Gleichheit, so sind alle drei Brüche gleich, denn aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ folgt $c = \frac{ad}{b}$ und daher

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a+\frac{ad}{b}}{b+d} = \frac{ab+ad}{b(b+d)} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\,.$$

Im Weiteren sei nun $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$; dann kann o. B. d. A.[1] angenommen werden, dass $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ gilt. Dies ist zu $ad < bc$ äquivalent.
Weiter gilt nun:

$$\begin{aligned} && ad &< bc \\ \iff && ad+ab &< bc+ab \\ \iff && a(d+b) &< b(c+a) \\ \iff && \tfrac{a}{b} &< \tfrac{a+c}{b+d} \end{aligned}$$

und analog gilt:

$$\begin{aligned} && ad &< bc \\ \iff && ad+cd &< bc+cd \\ \iff && d(a+c) &< c(b+d) \\ \iff && \tfrac{a+c}{b+d} &< \tfrac{c}{d}\,. \end{aligned}$$

[1] o. B. d. A. = „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“: Da die Buchstaben a, c bzw. b, d symmetrisch auftreten, dürfen wir uns aussuchen, welcher Bruch der kleinere ist; und trotz unserer willkürlichen Wahl ist der folgende Beweis allgemein gültig.

Zusammen folgt dann $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$, der neue Bruch $\frac{a+c}{b+d}$ liegt also immer zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$.

Um eine allgemeine Aussage darüber treffen zu können, wann $\frac{a+c}{b+d}$ näher an $\frac{a}{b}$ oder näher an $\frac{c}{d}$ liegt, betrachten wir den Abstand d_1 von $\frac{a+c}{b+d}$ zu $\frac{a}{b}$:

$$d_1 = \left|\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{ab+bc-ab-ad}{(b+d)b}\right| = \left|\frac{bc-ad}{(b+d)b}\right|$$

und den Abstand d_2 von $\frac{a+c}{b+d}$ zu $\frac{c}{d}$:

$$d_2 = \left|\frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d}\right| = \left|\frac{ad+cd-bc-cd}{(b+d)d}\right| = \left|\frac{-bc+ad}{(b+d)d}\right| = \left|\frac{bc-ad}{(b+d)d}\right| .$$

Nun sehen wir, dass sich d_1 und d_2 nur im Nenner unterscheiden und $d_1 > d_2$ genau dann gilt, wenn $d > b$ ist. Umgekehrt ist $d_2 > d_1$ für $b > d$.
Es folgt also, dass $\frac{a+c}{b+d}$ näher an $\frac{a}{b}$ liegt, wenn $b > d$ ist, und dass $\frac{a+c}{b+d}$ näher an $\frac{c}{d}$ liegt, wenn $d > b$ ist. Der neue Bruch liegt also näher an dem Bruch mit dem größeren Nenner.
Gilt $b = d$, so sind d_1 und d_2 gleich groß und $\frac{a+c}{b+d}$ liegt genau in der Mitte der Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$.

L 51.2 Sei a, $a+1$, ..., $a+k$ eine solche Zahlenfolge mit Summe n, dann gilt:

$$\begin{aligned} 2n = {} & \quad a \quad + \quad (a+1) \quad + \ldots + (a+k-1) + (a+k) \\ & + (a+k) + (a+k-1) + \ldots + \quad (a+1) \quad + \quad a \\ = {} & (k+1) \cdot (2a+k) . \end{aligned}$$

Offenbar ist $k+1 < 2a+k$, d. h. $k+1$ ist stets der kleinere Teiler.

Wir zeigen nun, dass für jeden ungeraden Teiler von n genau eine Folge mit den geforderten Eigenschaften existiert. Dazu müssen wir zwei Richtungen zeigen:

(1) Sei t ein ungerader Teiler von n, dann gibt es eine dazugehörende Folge, die die Voraussetzungen erfüllt.

Beweis zu (1): Zunächst haben wir $2n = t \cdot r$ mit einer ganzen Zahl r. Da $2n$ gerade ist, muss auch r gerade sein. Ist nun $t < r$, so setzen wir $t = k+1$ und $r = 2a+k$. Wir finden somit eine Lösung des Problems durch die Wahlen $k = t-1$ und $a = \frac{r-t+1}{2}$. Eine Probe ergibt, dass diese Folge wirklich die geforderten Eigenschaften hat, insbesondere ist a eine positive ganze Zahl. Ist andersherum $t > r$, so setzen wir $t = 2a+k$ und $r = k+1$ und erhalten analog zu den obigen Überlegungen mit $k = r-1$ und $a = \frac{t-r+1}{2}$ eine Lösung.

(2) Es gibt keine weiteren solche Folgen.

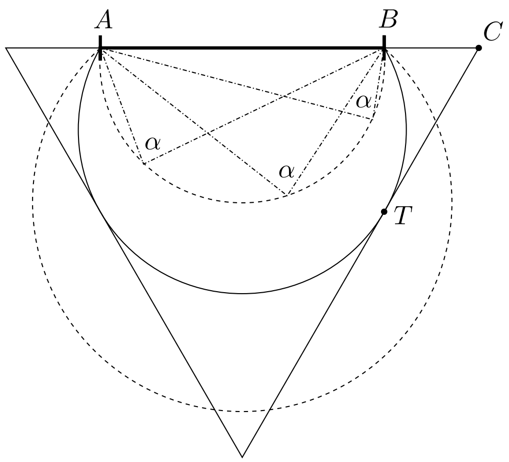
Beweis zu (2): Zu jeder Folge gehört eine Zerlegung $2n = (k+1)(2a+k)$. Dabei ist $k+1$ genau dann gerade, wenn k ungerade ist, also genau dann, wenn $2a+k$ ungerade ist. Somit gehört zu jeder Folge ein ungerader Teiler von $2n$ und damit auch von n. Es muss nur noch gezeigt werden, dass dieser Teiler in Teil (1) zu derselben Folge führt. Das jedoch ist der Fall, weil $k+1$ stets der kleinere Teiler ist; die Zuordnung in Teil (1) berücksichtigt dies.

Für $n = 2006$ gibt es also vier solcher Summendarstellungen, da 2006 gerade die vier ungeraden Teiler 1, 17, 59 und 1003 hat. Diese vier Darstellungen sind:

$$
\begin{aligned}
2006 &= 2006 \\
2006 &= 110 + 111 + \ldots + 126 \\
2006 &= 5 + 6 + \ldots + 63 \\
2006 &= 500 + 501 + 502 + 503\,.
\end{aligned}
$$

Eine Zahl besitzt genau dann nur eine solche Darstellung, wenn sie genau einen ungeraden Teiler hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Zahl eine reine Zweierpotenz ist. Die nächste Jahreszahl mit nur einer Darstellung ist folglich 2048 ($= 2^{11}$).

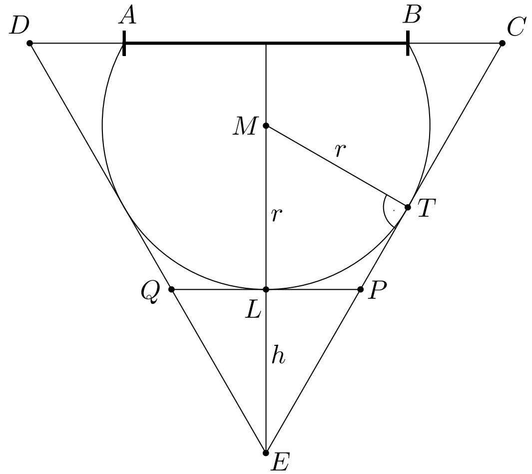
L 51.3 Zu dieser Aufgabe gibt es einige verschiedene Lösungswege. Wir wollen hier einen Weg angeben, der möglichst „elementar“ ist – also mit Elementargeometrie arbeitet. Nach dem Umfangswinkel- oder Peripheriewinkelsatz liegen



bekanntlich alle diejenigen Punkte, von denen aus man die Bühne unter einem bestimmten Winkel sieht, auf einem Kreisbogen, der die beiden Randpunkte A und B der Bühne enthält. Dabei gilt, da ja die Länge der Sehne (das ist hier die Bühnenbreite) fest vorgegeben ist, dass der Blickwinkel umso kleiner wird, je größer der Kreisradius ist. Einen Punkt auf dem Dreiecksrand mit bester Sicht finden wir also, indem wir denjenigen Kreisbogen bestimmen, der zwischen A und B verläuft und eine andere Dreiecksseite (aus Symmetriegründen dann beide) berührt. In der Skizze ist das der durchgezogen gezeichnete Kreisbogen. Den Abstand $|CT|$ bestimmen wir über den Tangentensatz: Die Gerade durch C und T ist eine Tangente an diesen Kreis, die Gerade durch C, B und A eine Sekante; nach dem Tangentensatz gilt dann

$$\begin{aligned} & |CT|^2 = |CA| \cdot |CB| = 40\,\mathrm{m} \cdot 10\,\mathrm{m} = 400\,\mathrm{m}^2 \\ \Longrightarrow \quad & |CT| \;\; = 20\,\mathrm{m}\,. \end{aligned}$$

Da eine parallel zur Bühne eingebaute Sitzreihe umso länger wird, je dichter sie an der Bühne ist, ist die kürzeste Sitzreihe, die den Bedingungen an eine Oberbürgermeisterloge genügt, diejenige, die den Kreis der Punkte mit optimaler Sicht gerade tangiert. Um die nötige Länge dieser Sitzreihe zu bestimmen, bestimmen wir zunächst den Radius r des besagten Kreises durch A, B und T. Sein Mittelpunkt sei mit M bezeichnet.



Da der Zuschauerraum ein gleichseitiges Dreieck ist, ist $\angle TEM = 30°$. Außerdem hat das Dreieck ETM bei T einen rechten Winkel. Spiegeln wir M an der Geraden ET zu M', so ist ETM eine Hälfte des gleichseitigen Dreiecks $EM'M$, sodass $r = |MT| = \frac{1}{2}|ME| = \frac{1}{2}(r+h)$ ist. Daraus folgt $r = h$ und mit Pythagoras $(2r)^2 = |ME|^2 = |MT|^2 + |ET|^2 = r^2 + (|EC| - |CT|)^2 = r^2 + (30\,\mathrm{m})^2$, also

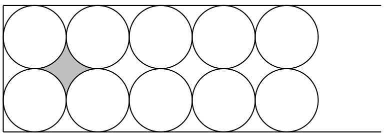
$3r^2 = 900\,\mathrm{m}^2$ und $h = r = \sqrt{3} \cdot 10\,\mathrm{m}$. Es ist h die Höhe des gleichseitigen Dreiecks EPQ, das folglich die Seitenlänge $\frac{2}{\sqrt{3}}h = 20\,\mathrm{m}$ hat. Die kürzeste Sitzreihe PQ mit der Möglichkeit für eine Bürgermeisterloge ist daher $20\,\mathrm{m}$ lang.

Bemerkungen: Wegen $|LP| = |BC| = 10\,\mathrm{m}$ ist PC parallel zu LB. Entsprechendes gilt für QD und LA. Daher ist auch LBA ein gleichseitiges Dreieck, und deswegen beträgt der optimale Blickwinkel $60°$.

Aus der Umkehrung des Strahlensatzes folgt, dass BT parallel zu ME ist, also senkrecht auf AB steht. Das ist reiner Zufall; wäre die Bühne breiter, so würde man vor ihr sitzen, wäre sie schmaler, säße man außerhalb der Bühnenbreite am besten.

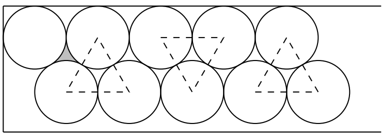
$\boxed{\textbf{L 51.4}}$ Ja, bei geschickter Verteilung der Platzdeckchen passen tatsächlich mehr als 500 Mönche daran.

Legt man von den Deckchen je zwei gegenüber und je 250 nebeneinander auf den Tisch, so passen genau $2 \cdot 250 = 500$ Mönche an den Tisch.

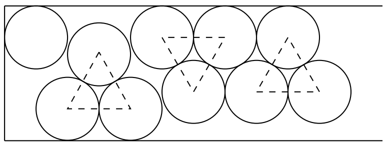


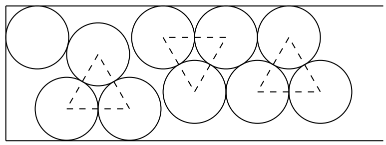
So, wie die Deckchen jetzt liegen, ist natürlich kein Platz für einen weiteren Mönch frei, aber in der Mitte zwischen je vier Deckchen bleibt eine relativ große Fläche ungenutzt.

Legen wir nun die erste Reihe der Deckchen wieder nebeneinander an die eine Tischkante, die zweite Reihe aber versetzt auf Lücke direkt an die erste Reihe, so sind die freien Zwischenräume in der Mitte schon kleiner als eben.

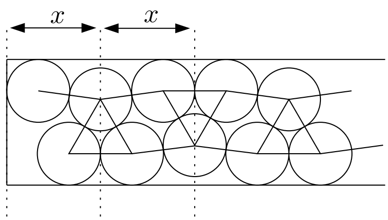


Allerdings passen so nur noch $250 + (250 - 1) = 499$ Mönche an den Tisch, weil wir diesmal an den Enden ungenutzten Platz haben.
Um jetzt Platz für weitere Mönche zu schaffen, fassen wir die Platzdeckchen zu Dreiergruppen zusammen, wie es in der obigen Abbildung durch die Dreiecke markiert ist. Die erste Dreiergruppe von links verschieben wir an den unteren Tischrand; die Kreise (Deckchen) liegen dann immer noch überschneidungsfrei auf dem Tisch.



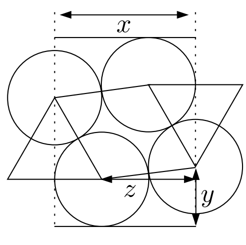


Außerdem ist danach zwischen der Dreiergruppe und dem einzelnen Platz links oben ein kleiner Freiraum, so dass wir die Dreiergruppe auch noch ein wenig nach links schieben können. Dadurch erreichen wir, dass die Mittelpunkte der verschobenen Kreise (ein ganz klein bisschen) weiter links als die ursprünglichen Mittelpunkte liegen.
Die zweite Dreiergruppe schieben wir an der oberen Tischkante so weit wie möglich nach links, das heißt so weit, bis sie die beiden rechten Kreise der ersten Dreiergruppe berührt.
Die dritte Dreiergruppe verschieben wir so wie die erste wieder ein Stück schräg nach links unten, die vierte wieder nur nach links. So fortfahrend erhalten wir das folgende Muster:



Dabei gilt: Sind zwei Mittelpunkte durch eine Strecke miteinander verbunden, so haben sie den Abstand 1, ansonsten ist ihr Abstand größer.

Nun müssen wir nur noch ausrechnen, wie viele dieser Dreiergruppen oder vielmehr wie viele solcher Streifen der Breite x an den Tisch passen:



Da ein Platzdeckchen den Durchmesser 1 hat, hat auch das gleichseitige Dreieck Seitenlänge 1. Seine Höhe ist dann $\frac{\sqrt{3}}{2}$, und wir berechnen

$$y = 2 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Der Satz von Pythagoras liefert dann

$$z^2 = 1^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \sqrt{3} - \frac{3}{4}$$

und es folgt, dass der Streifen insgesamt die Breite

$$x = \frac{1}{2} + \sqrt{\sqrt{3} - \frac{3}{4}} \approx 1{,}491 < 1\frac{1}{2}$$

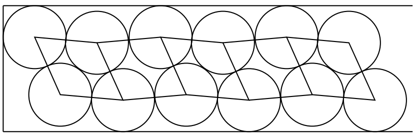
hat.

Es gilt $167 \cdot x \approx 248{,}994\ldots < 249$, wie der Taschenrechner sagt. (Da die Abschätzung sehr knapp ist, der Taschenrechner aber nur eine gewisse Genauigkeit hat, sollte man eigentlich noch mal zu Fuß durch Quadrieren nachrechnen, dass wirklich $167 \cdot x < 249$ gilt!) Damit können wir 167 Streifen der Breite x auf den ersten 249 m des Tisches unterbringen. Rechts daneben auf dem freien Meter bleibt noch Platz für den fehlenden Halbkreis des letzten Streifens und für einen weiteren vollständigen Kreis.
Der Streifen links außen enthält $2\frac{1}{2}$ Kreise und jeder andere Streifen enthält $\frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2} = 3$ Kreise.

Insgesamt können auf diese Art und Weise $2\frac{1}{2} + 166 \cdot 3 + 1\frac{1}{2} = 502$ Mönche an dem Tisch speisen.

Nachbetrachtungen:
Wir haben hiermit nur bewiesen, dass wir mindestens 502 Mönche an dem Tisch unterbringen können, aber nicht widerlegt, dass vielleicht sogar 503 Mönche Platz finden könnten. Ob dies möglich ist oder nicht, wissen wir auch nicht.

Variante:
Ohne Beweis wollen wir noch angeben, dass bei der folgenden Sitzordnung



501 Mönche gemeinsam an dem Tisch speisen können.

Außerdem gilt bei beiden Anordnungen: Haben die beiden Mönche auf der linken Seite ihren Platz erst einmal fest gewählt, so erhalten wir die angegebenen Sitzverteilungen, wenn sich die anderen Mönche nacheinander so dazusetzen, dass der Mittelpunkt ihres Deckchens so weit links wie möglich ist. So gesehen ergeben sich diese Anordnungen dann doch recht natürlich.

Lösungen zu Aufgabenblatt 52

L 52.1 Da nach Voraussetzung $x > 0$ und $y > 0$ sind und außerdem $n \geq 3$ gelten soll, muss $z > x$ und $z > y$ sein. Wir teilen die Gleichung $n^x + n^y = n^z$ durch n^z und erhalten

$$n^{x-z} + n^{y-z} = 1\,.$$

Nun zeigen wir, dass die linke Seite der Gleichung für $n \geq 3$ immer kleiner als 1 ist, die Gleichung also für $n \geq 3$ keine Lösung besitzt: Weil $x - z$ und $y - z$ nach obiger Überlegung jeweils höchstens gleich -1 sein können und die Summe $n^{x-z} + n^{y-z}$ umso größer wird, je größer $x - z$ und $y - z$ werden, ist sie also maximal für $x - z = y - z = -1$. Dann ist $n^{x-z} + n^{y-z} = n^{-1} + n^{-1}$. Der Term $n^{-1} + n^{-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$ wiederum wird dann maximal, wenn n möglichst klein ist, also wenn n gerade gleich 3 ist. Wir erhalten, dass $n^{x-z} + n^{y-z}$ maximal $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ sein kann und damit in keinem Fall gleich 1 ist. Die Gleichung $n^x + n^y = n^z$ hat also für $n \geq 3$ keine Lösung.

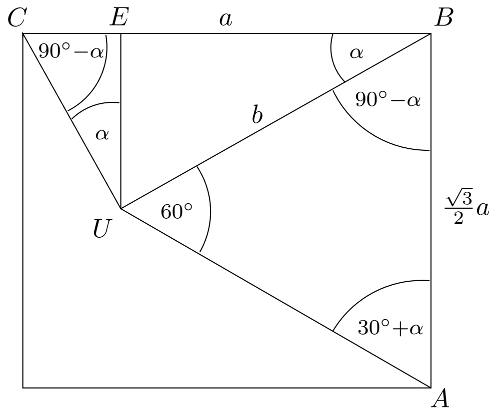
Alternative Lösungsmöglichkeit:
Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $z > y \geq x$ gilt. Dann erhält man durch Ausklammern von n^x:

$$n^x \cdot (1 + n^{y-x}) = n^z$$

mit $y - x \geq 0$. Die höchste Potenz von n, die die linke Seite der Gleichung teilt, ist n^x, weil $(1 + n^{y-x})$ wegen $n \geq 3$ nicht durch n teilbar ist. Die rechte Seite der Gleichung ist aber durch n^z teilbar. Da $z > x$ gilt, können die beiden Seiten nicht gleich sein.

Bemerkung: Für $n = 2$ hat die Gleichung $n^x + n^y = n^z$ Lösungen mit positiven ganzen Zahlen, denn es gilt $2^x + 2^x = 2^{x+1}$.

L 52.2 Eine ganze Drehung des kleinen Zeigers der Uhr entspricht einer Zeitdauer von zwölf Stunden. Also entsprechen die drei Stunden zwischen Frühstück und Mittagessen einer Drehung um $\frac{3h}{12h} \cdot 360 = 90$ Grad. Die zwei Stunden zwischen Mittagessen und Kaffee entsprechen einer Drehung um $\frac{2h}{12h} \cdot 360 = 60$ Grad.
Sei nun mit U der Mittelpunkt der Uhr bezeichnet, mit A die rechte untere Ecke der Wand, mit B die rechte obere Ecke und mit C die linke obere Ecke. Der Zeiger zeigt also zum Frühstück in Richtung des Punktes C, zum Mittag in Richtung B und zum Kaffee in Richtung A.

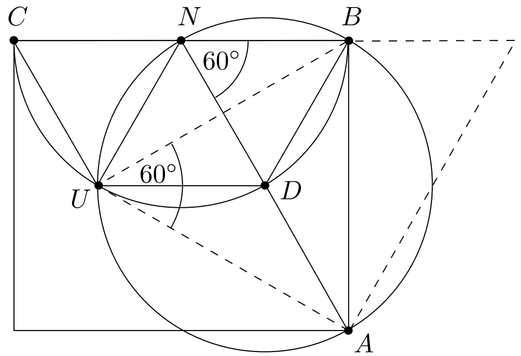


Deshalb ist $\angle BUC = 90°$ und $\angle AUB = 60°$. Sei E der Fußpunkt des Lotes von U auf die Strecke CB. Dann ist $\alpha := \angle EUC$ der Winkel zwischen Frühstücksstellung und 12-Uhr-Stellung des kleinen Zeigers. Da die beiden Dreiecke CUB und CUE in zwei Winkeln übereinstimmen, ist auch der dritte Winkel identisch, also $\angle CBU = \alpha$. Aus $\angle AUB = 60°$ und $\angle UBA = 90° - \alpha$ ergibt sich: $\angle BAU = 180° - 60° - (90° - \alpha) = 30° + \alpha$.
Sei a die Länge der Strecke CB und b die Länge der Strecke UB. Damit hat nach Voraussetzung die Strecke AB die Länge $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$. Im rechtwinkligen Dreieck UBC gilt: $\sin(90° - \alpha) = \frac{b}{a} \iff b = a \cdot \sin(90° - \alpha)$. Nach dem Sinussatz gilt im Dreieck ABU: $\frac{\sin(30°+\alpha)}{b} = \frac{\sin(60°)}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a}$. Ersetzen von b liefert mit Hilfe von $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\frac{\sin(30° + \alpha)}{a \cdot \sin(90° - \alpha)} = \frac{\sin(60°)}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a} = \frac{1}{a} \iff \sin(30° + \alpha) = \sin(90° - \alpha)\,.$$

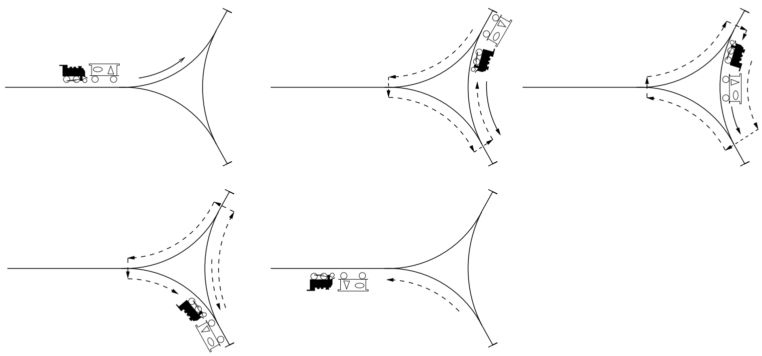
Da α zwischen $0°$ und $90°$ liegen muss, folgt: $\alpha + 30° = 90° - \alpha \iff \alpha = 30°$.
Eine Drehung des kleinen Zeigers um den Winkel 30 Grad entspricht einer Zeitdauer von $\frac{30}{360} \cdot 12 = 1$ Stunde.
Oma Kruse hat also eine Stunde vor 12 Uhr, d. h. genau um 11 Uhr gefrühstückt.

Eine *alternative Lösung* (fast) ohne Verwendung von Winkelfunktionen ergibt sich zum Beispiel wie folgt:
Wie oben überlegt man sich, dass $\angle BUC = 90°$ und $\angle AUB = 60°$ gelten muss. Nun sei N der Mittelpunkt von BC. Dann ist aufgrund des gewählten Seitenverhältnisses im Rechteck das Dreieck ABN ein „halbes“ gleichseitiges Dreieck



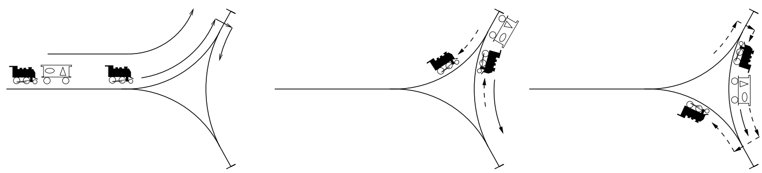
(beachte hierzu: Die Höhe in einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge x hat die Länge $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x$). Also ist $\angle ANB = 60°$. Nach dem Peripheriewinkelsatz ist also U gerade der (neben B zweite) Schnittpunkt des Umkreises des Dreiecks ABN mit dem Thaleskreis über BC. Sei D der Mittelpunkt von NA und damit der Mittelpunkt des Umkreises vom Dreieck ABN.
Weil das Dreieck DBN gleichseitig ist (gleichschenklig mit $|ND| = |BD|$ und Basiswinkel 60°), ist dann $|BD| = |NB| = |ND| = |NU| = |NC| = \frac{1}{2} \cdot a$. Aus Symmetriegründen (man nehme die Gerade (ND) durch die Mittelpunkte der beiden Kreise als Spiegelachse) ist auch das Dreieck DNU gleichseitig und damit dann auch das Dreieck UNC. Hieraus folgt schließlich, dass das Lot von U auf NC mit dem Strahl UC einen 30°-Winkel einschließt; die Oma hat also um 11 Uhr gefrühstückt.

L 52.3 Wir wenden zunächst einen Wagen im Gleisdreistern mit einer Lok. Sie schiebt ihn zuerst auf z. B. das obere Endstück, was nach Voraussetzung noch ohne Weichenstellen geht. Um den Wagen dann weiterzubewegen, muss die Lokomotive von der anderen Seite der Weiche an dieses Ende heranfahren. Dazu muss sie einmal fast ganz um den Stern herumfahren, wobei jede Weiche (also drei) einmal gestellt wird.
Wenn die Lok den Wagen aus dem Gleisende herausgezogen hat, kann sie ihn natürlich nicht auf das nächste Ende abstellen. Dazu muss sie wieder auf die andere Seite des Wagens fahren – was wieder drei Weichenumstellungen plus eine weitere kostet, weil die Weiche, von der der Wagen gerade heruntergezogen wurde, „falsch“ stand. Und auch zum Einschieben des Wagens muss noch die Weiche gestellt werden, über die zuvor die Lok gewendet hatte. Zum Herausholen des Wagens muss die Lok nun erneut um den Stern fahren (drei Weichenumstellungen), dann ist sie aber schon fertig – insgesamt wurden elf Weichenumstellungen benötigt.

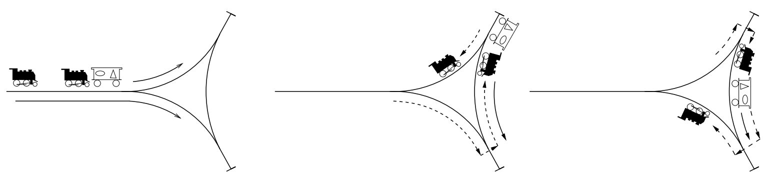


Für das Wenden eines Wagens auf einem Gleis-k-Stern mit $k = 2n+1$ erkennt man nun folgendes Prinzip: Wir betrachten den Aufwand, um den Wagen, nachdem er in ein Gleisende geschoben wurde, in das nächste Gleisende zu bringen. Zuerst muss also wie oben die Lok von der anderen Weichenseite an den Wagen heranfahren, um ihn herausziehen zu können. Dazu muss sie einmal durch den gesamten Stern fahren, das braucht also k Weichenumstellungen. Nach dem Herausziehen muss sie wieder herumfahren, um ihn in das nächste Ende hineinschieben zu können, das braucht wieder k plus eine Weichenumstellungen plus eine Umstellung zum Hineinschieben in das Gleisende.
Der komplette Wendevorgang setzt sich nun zusammen aus dem Einschieben in die erste Spitze, das kein Weichenstellen erfordert; dann muss der Wagen von der ersten zu der $(k-1)$-ten Spitze gebracht werden, das ist $((k-1)-1) = (k-2)$ Mal der oben beschriebene Ablauf und man braucht $(k-2)\cdot(2k+2)$ Stellvorgänge. Dann steht die Lok noch am falschen Ende der Weiche, muss also noch einmal komplett durch den Stern und kann dann den Wagen herausziehen. Zusammen muss man $(k-2)\cdot(2k+2)+k = 2k^2-k-4$ Mal eine Weiche stellen.
Nun zu der Frage, ob man mit einer zweiten Lokomotive Zeit sparen kann. Im Prinzip sieht es recht vielversprechend aus: Man kann die eine Lok vor den Wagen stellen, so dass diese ihn immer aus einem Gleisende herauszieht und die andere ihn immer hineindrückt. Der Vorgang, den Wagen von einem Gleisende zum nächsten zu bringen, erfordert dann folgende Rangiermanöver: Die Lok, die den Wagen in das Gleisende geschoben hat, fährt wieder ein Stück zurück, um die Weiche freizugeben. Die Weiche wird gestellt und die andere Lok, die weiter davor gewartet hat, zieht den Wagen heraus. Sie lässt ihn in der Mitte des Gleises stehen, fährt auf das nächste Gleisende (dort steht die Weiche passend, weil die Lok zu Anfang von dort gekommen ist, vgl. unten) und von diesem Ende (Weichenumstellen!) zur anderen Seite hinaus, um wieder zu warten. Die schiebende Lok fährt nun über das erste Gleisende an den Wagen

heran (dafür muss die Weiche zweimal gestellt werden) und drückt ihn in das nächste Ende – auch dafür muss die Weiche dort noch einmal gestellt werden, weil die vordere Lok dieses Ende in die andere Richtung verlassen hatte.
Für einen solchen Schritt muss also fünfmal eine Weiche gestellt werden.



Zu Anfang muss die eine Lok jedoch noch in die vordere Position gebracht werden; eine Möglichkeit dazu ist, dass sie einfach vorausfährt, quasi um die erste Ecke herum, und es muss dafür zweimal die Weiche am ersten Ende gestellt werden.
Nach diesem Anfang folgen wie oben $k-2$ Schritte, den Wagen ein Gleisende weiterzubringen.
Zum Schluss muss wieder die letzte Weiche gestellt werden, um den Wagen herausziehen zu können, dazu noch die erste Weiche, die ja noch vom Anfang anders steht. Außerdem muss die schiebende Lok aus dem Stern herausfahren, das kostet zwei weitere Umstellungen.
Insgesamt braucht man bei diesem Verfahren also $2+(k-2)\cdot 5+4 = 5k-4$ Weichenumstellungen.
Die andere Möglichkeit zu beginnen, ist, die ziehende Lok andersherum in den Stern einfahren zu lassen. Wenn man zuerst mit der einen Lok den Wagen einschiebt und dann die andere Lok einfahren lässt, erfordert das $k-1$ Weichenumstellungen. Der Vorteil dabei ist, dass die erste Weiche dann am Ende nicht umgestellt zu werden braucht. Oder man lässt analog am Ende die schiebende Lok andersherum herausfahren. Man erhält eine Gesamtzahl von $k-1+(k-2)\cdot 5+3 = 6k-8$ Stellvorgängen. Für $k=3$ bringt das mit $6\cdot 3-8 = 10$ gegen $2+1\cdot 5+4 = 11$ Weichenumstellungen einen Gewinn von einer Umstellung, für größere k bringt diese Möglichkeit des Beginnens keinen Vorteil.



Für $k = 3$ ist $2k^2 - k - 4 = 11 > 10$, daher ist hier das Verfahren mit zwei Lokomotiven besser, jedoch nur knapp. Für $k \geq 5$ bekommt man die Abschätzung $2k^2 - k - 4 = (2k-1) \cdot k - 4 \geq 9k - 4 > 5k - 4$. Hier ist der Unterschied schon deutlicher, weswegen man dann wirklich zwei Lokomotiven einsetzen sollte.

L 52.4 Zunächst kann man die Geraden in Gruppen paralleler Geraden so einteilen, dass zwei Geraden genau dann in einer Gruppe sind, wenn sie parallel sind. Wenn zum Beispiel keine zwei der Geraden parallel sind, dann gibt es genau zehn Gruppen mit jeweils einer Gerade. Wir notieren dies als $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Gibt es hingegen eine Gruppe mit sechs parallelen Geraden, dann eine andere Gruppe mit drei Parallelen und schließlich eine einzelne Gerade, die zu keiner der vorigen parallel ist, so notieren wir dies als $(6, 3, 1)$. Wir schreiben also stets die Größen der vorkommenden Gruppen in abnehmender Reihenfolge hintereinander. Da die Summe der Gruppengrößen stets genau 10 ist, spricht man hierbei auch von *Partitionen der Zahl* 10. Wichtig ist nun, dass es für die

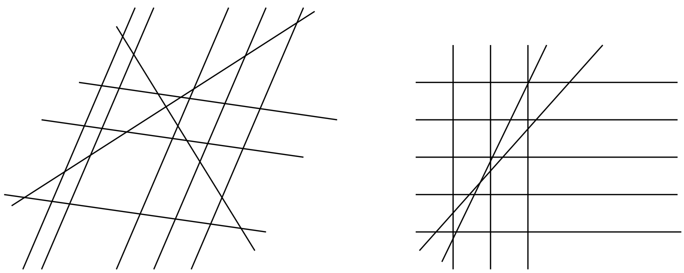


Abbildung 52.1: Zwei mögliche Konstellationen zur Partition $(5, 3, 1, 1)$

Anzahl der Schnittpunkte unter den Geraden nicht auf die genaue Lage der Geraden, sondern einzig auf die ihnen zugeordnete Partition ankommt!

Dies liegt einfach daran, dass es für das Vorhandensein eines Schnittpunktes nur darauf ankommt, ob zwei Geraden parallel sind oder nicht, und nicht, *wie* „unparallel" sie sind.

Für eine Partition der Form $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ schneidet dabei jede Gerade einer Gruppe genau jede Gerade der anderen Gruppen; das sind insgesamt genau $n_1 \cdot (10 - n_1) + n_2 \cdot (10 - n_2) + \ldots + n_k \cdot (10 - n_k)$ Überschneidungen. Hierbei haben wir aber jeden Schnittpunkt zweimal gezählt (nämlich den Schnittpunkt der Geraden g und h einmal als „g schneidet h" und einmal als „h schneidet g").

Also gibt es für die Konstellation (Partition) $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ genau

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot (n_1 \cdot (10 - n_1) + n_2 \cdot (10 - n_2) + \ldots + n_k \cdot (10 - n_k)) \\ &= 5 \cdot (n_1 + n_2 + \ldots + n_k) - \frac{1}{2}\left(n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_k^2\right) \\ &= 50 - \frac{1}{2}\left(n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_k^2\right) \end{aligned}$$

Schnittpunkte. Die folgende Tabelle enthält nun alle möglichen Partitionen und die zugehörigen Schnittpunktanzahlen.

Partition	S	Partition	S	Partition	S
(10)	0	$(5,3,2)$	31	$(3,3,3,1)$	36
$(9,1)$	9	$(5,3,1,1)$	32	$(3,3,2,2)$	37
$(8,2)$	16	$(5,2,2,1)$	33	$(3,3,2,1,1)$	38
$(8,1,1)$	17	$(5,2,1,1,1)$	34	$(3,3,1,1,1,1)$	39
$(7,3)$	21	$(5,1,1,1,1,1)$	35	$(3,2,2,2,1)$	39
$(7,2,1)$	23	$(4,4,2)$	32	$(3,2,2,1,1,1)$	40
$(7,1,1,1)$	24	$(4,4,1,1)$	33	$(3,2,1,1,1,1,1)$	41
$(6,4)$	24	$(4,3,3)$	33	$(3,1,1,1,1,1,1,1)$	42
$(6,3,1)$	27	$(4,3,2,1)$	35	$(2,2,2,2,2)$	40
$(6,2,2)$	28	$(4,3,1,1,1)$	36	$(2,2,2,2,1,1)$	41
$(6,2,1,1)$	29	$(4,2,2,2)$	36	$(2,2,2,1,1,1,1)$	42
$(6,1,1,1,1)$	30	$(4,2,2,1,1)$	37	$(2,2,1,1,1,1,1,1)$	43
$(5,5)$	25	$(4,2,1,1,1,1)$	38	$(2,1,1,1,1,1,1,1,1)$	44
$(5,4,1)$	29	$(4,1,1,1,1,1,1)$	39	$(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$	45

Man sieht somit, dass es genau die folgenden 27 möglichen Schnittpunktanzahlen gibt: 0, 9, 16, 17, 21, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45.

Lösungen zu Aufgabenblatt 53

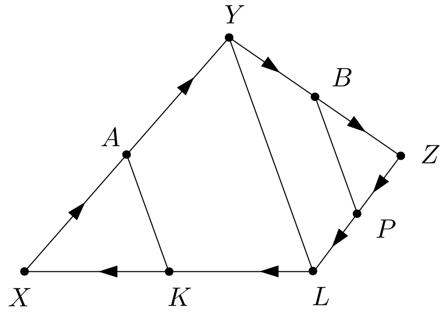
L 53.1 Zunächst muss man sagen, dass sich die Anzahl der Fische im Teich durch das beschriebene Vorgehen nicht exakt bestimmen lässt. Sicher ist nur, dass mindestens $72 + 81 - 4 = 149$ Fische im Teich schwimmen. Wir können jedoch davon ausgehen, dass sich die 72 freigelassenen, markierten Fische wieder gleichmäßig mit den übrigen Fischen vermischt haben. Das bedeutet, dass beim zweiten Fang das Verhältnis von markierten Fischen zur Gesamtzahl der gefangenen Fische ungefähr genauso groß ist wie das Verhältnis der beim ersten Fang markierten Fische zur Anzahl der Fische im ganzen Teich. Sei nun N die Anzahl der Fische im Teich. Dann gilt:

$$\frac{4}{81} = \frac{72}{N} \iff N = 72 \cdot \frac{81}{4} = 1458\,.$$

Es schwimmen also ungefähr 1458 Fische im Teich.

L 53.2 Wir lösen die Aufgabe am besten gleich allgemein: Bei wie vielen vollständig gekürzten Brüchen ist das Produkt aus Zähler und Nenner gleich einer fest vorgegebenen Zahl $n > 1$?
Wenn $\frac{a}{b}$ ein solcher gekürzter Bruch ist, dann haben a und b keine gemeinsamen Primteiler. Da aber auch $a \cdot b = n$ gelten soll, müssen sich alle Primteiler von n auf a und b verteilen. Wenn $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$ die Primfaktorzerlegung von n ist, muss man also für jeden der m Primteiler p_i $(1 \leq i \leq m)$ von n entscheiden, ob er a oder ob er b teilen soll (und dann müssen aufgrund der Teilerfremdheit von a und b gleich alle in n enthaltenen derartigen Primfaktoren $p_i^{k_i}$ in a bzw. b enthalten sein).
Für die Verteilung der m Primteiler auf die zwei Zahlen a und b hat man 2^m Möglichkeiten. Allerdings führt nur genau die Hälfte dieser Möglichkeiten zu einem Bruch $\frac{a}{b}$, der kleiner als 1 ist, denn unter den beiden Brüchen $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ ist stets genau einer kleiner als 1.
Es gibt also insgesamt genau 2^{m-1} Brüche der geforderten Art.
Speziell für $n = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ ist $m = 3$; es gibt daher genau $2^2 = 4$ gesuchte Brüche. Diese sind $\frac{1}{60}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{3}{20}$ und $\frac{5}{12}$.
Die Zahl $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100$ hat genau die 25 Primfaktoren 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 und 97 (diese Primfaktoren kommen dabei natürlich meist mehrfach vor).
Also gibt es für dieses n genau $2^{24} = 16\,777\,216$ Brüche der geforderten Art, die wir hier aus Platzmangel verständlicherweise nicht alle auflisten können.

L 53.3 Es bezeichnen L den Standort des Liegestuhls, K, A, B und P die Standorte des Kirsch-, Apfel-, Birn- und Pflaumenbaumes. Außerdem seien X, Y und Z die Orte, die Karolin erreicht, nachdem sie am Kirsch-, Apfel- bzw. Birnbaum vorbeigelaufen ist.



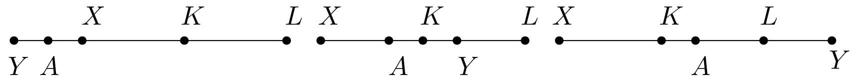
Liegen die drei Punkte L, K und A nicht auf einer gemeinsamen Geraden, so tun dies auch die drei Punkte L, X und Y nicht. Aus der Bedingung

$$\frac{|LX|}{|KX|} = \frac{2}{1} = \frac{|YX|}{|AX|}$$

folgt mit der Umkehrung des Strahlensatzes, dass die beiden Strecken YL und AK parallel zueinander sind. Wiederum mit Hilfe des Strahlensatzes folgt dann das Verhältnis

$$\frac{|YL|}{|AK|} = \frac{|LX|}{|KX|} = \frac{2}{1}\,.$$

Die (äußere) Gleichheit bzw. $|AK| = \frac{1}{2}|YL|$ gilt auch dann, wenn L, K und A auf einer gemeinsamen Geraden liegen:



Wie oben folgt aus der Aufgabenstellung $\frac{1}{2}|XL| = |XK| = |KL|$ und $\frac{1}{2}|XY| = |XA| = |AY|$. Wir unterscheiden, ob A links von, zwischen oder rechts von X und K liegt: Liegt X zwischen A und K, so gilt $|AK| = |XK| + |XA| = \frac{1}{2}(|XL| + |XY|) = \frac{1}{2}|YL|$. Liegt A zwischen X und K, so liegt auch Y zwischen X und L und es gilt $|AK| = |XK| - |XA| = \frac{1}{2}(|XL| - |XY|) = \frac{1}{2}|YL|$. Liegt K zwischen A und X, so liegt auch L zwischen X und Y und es gilt $|AK| = |XA| - |XK| = \frac{1}{2}(|XY| - |XL|) = \frac{1}{2}|YL|$.

In allen Fällen gilt also

$$|YL| = 2 \cdot |AK|\,. \tag{53.1}$$

Genauso erhalten wir für die zweite Weghälfte von Y über B nach Z und weiter über P nach L, dass auch

$$|YL| = 2 \cdot |BP|$$

gilt. Zusammen mit der obigen Gleichung (53.1) ergibt das die behauptete Aussage

$$|AK| = |BP|\,.$$

Beginnen wir den Rundweg nun bei X statt am Liegestuhl L, so erhalten wir entsprechend die zweite Aussage $|AB| = |PK|$.

L 53.4 Sei n eine gerade Zahl. Wenn n durch 3 teilbar und $n \geq 18$ ist, dann ist $n = (n-9) + 9$ eine Darstellung von n als Summe zweier ungerader zusammengesetzter Zahlen, denn 9 ist offenbar zusammengesetzt und ungerade und auch $n - 9$ ist in diesem Fall ungerade, durch 3 teilbar und größer als 3 und demnach zusammengesetzt.

Wenn n bei Division durch 3 den Rest 1 lässt und $n \geq 34$ ist, dann ist $n = (n-25) + 25$ eine gesuchte Darstellung, denn 25 ist offenbar ungerade und zusammengesetzt und in diesem Fall ist auch $n - 25$ ungerade, durch 3 teilbar (weil auch 25 bei Division durch 3 den Rest 1 lässt) und größer als 3 und demnach zusammengesetzt.

Wenn schließlich n bei Division durch 3 den Rest 2 lässt und $n \geq 44$ ist, dann hat man mit $n = (n-35) + 35$ eine Darstellung von n als Summe zweier ungerader zusammengesetzter Zahlen gefunden, weil wieder 35 selbst ungerade und zusammengesetzt ist und $n - 35$ ungerade, durch 3 teilbar und größer als 3 ist.

Zusammengefasst sieht man also, dass, falls $n \geq 44$ ist, stets eine Darstellung als Summe zweier ungerader zusammengesetzter Zahlen existiert.

Auch für $42 = 33 + 9$ und $40 = 15 + 25$ gibt es je eine gesuchte Darstellung.

Für $n = 38$ allerdings gibt es nur folgende Darstellungen als Summe zweier ungerader Zahlen: $38 = 1+37 = 3+35 = 5+33 = 7+31 = 9+29 = 11+27 = 13+25 = 15+23 = 17+21 = 19+19$. In jedem Fall ist hier aber wenigstens einer der Summanden nicht zusammengesetzt.

Die gesuchte größte Zahl mit der geforderten Eigenschaft ist demnach 38.

Anmerkung: Mit nur wenig mehr Arbeit kann man einsehen, dass die oben gefundenen Bedingungen sogar notwendig für eine Zahl n der entsprechenden Restklasse modulo 3 sind, um eine Darstellung der geforderten Art zu finden. Alle positiven geraden Zahlen, die keine Darstellung als Summe zweier ungerader zusammengesetzter Zahlen haben, sind demnach 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 20, 22, 26, 28, 32 und 38.

Lösungen zu Aufgabenblatt 54

$\boxed{\textbf{L 54.1}}$ Eine Zahl ist genau dann durch 45 teilbar, wenn sie durch 5 und durch 9 teilbar ist. Da eine Zahl genau dann durch 5 teilbar ist, wenn sie als letzte Ziffer eine 0 oder eine 5 aufweist, und da nach Voraussetzung die Zahl $45 \cdot n$ nur die Ziffern 0 und 7 enthalten soll, ist die letzte Ziffer von $45 \cdot n$ eine 0. Außerdem ist eine Zahl genau dann durch 9 teilbar, falls sie eine durch 9 teilbare Quersumme hat. Die Anzahl der in $45 \cdot n$ vorkommenden Siebenen muss also ein Vielfaches von 9 sein. Die kleinste Zahl $45 \cdot n$, die die geforderten Eigenschaften aufweist, besteht somit aus 9 Siebenen und der 0 als letzter Ziffer, ist folglich 7777777770. Für das kleinste natürliche n ergibt sich damit der Wert $\frac{7777777770}{45} = 172839506$.

$\boxed{\textbf{L 54.2}}$ Bei unserem neuen Turniermodus finden 63 oder 62 Spiele statt, je nachdem, ob der Weltmeister selbst auch einmal verloren hat oder nicht. Im Vergleich zu jetzt (um den Weltmeister zu bestimmen, braucht man genau genommen auch bisher nur 63 Spiele, das 64. Spiel ist das um den dritten Platz) finden also genauso viele oder ein Spiel weniger statt, das Turnier wird demnach nicht länger.

Da es in jedem Spiel genau einen Verlierer gibt, können wir die Gesamtanzahl der Spiele ermitteln, indem wir zählen, wie oft jemand verloren hat. Jede ausgeschiedene Mannschaft hat genau zweimal verloren, denn nach den Turnierregeln scheidet sie ja genau dann aus, wenn sie das zweite Mal verliert. Am Ende des Turniers ist noch genau eine Mannschaft „im Spiel", und die restlichen 31 Mannschaften sind ausgeschieden. Letztere haben zusammen $31 \cdot 2 = 62$ Spiele verloren. Außerdem kann es sein, dass der Sieger selbst auch einmal verloren hat. Daher werden insgesamt 62 oder 63 Spiele ausgetragen.

Anmerkung: Die Anzahl der Spiele spricht also nicht gegen unseren neuen Turniermodus. Aber dadurch, dass vorher unbekannt ist, wie viele Mannschaften zu einem Zeitpunkt noch im Turnier sind und wie viele Runden gespielt werden müssen, wird die Organisation der Weltmeisterschaft erheblich erschwert.
Zum Beispiel könnten am zweiten Spieltag dieselben 16 Mannschaften verlieren, die schon am ersten Spieltag verloren haben, dann gibt es am dritten Spieltag nur noch $16 : 2 = 8$ Spiele; es könnten im anderen Extremfall aber auch alle Gewinner des ersten Spieltages am zweiten Spieltag verlieren, dann gibt es am dritten Spieltag noch einmal $32 : 2 = 16$ Spiele.

In diesem zweiten Fall hat nach dem zweiten Spieltag jede Mannschaft genau einmal verloren, folglich scheidet an allen folgenden Spieltagen der Verlierer des Spiels sofort aus. Es werden dann insgesamt sieben Runden gespielt (dritte Runde 16 Spiele, vierte Runde 8 Spiele, danach 4, 2 und 1 Spiel).
Auch ein Turnier mit zwölf Runden ist möglich. Ein Beispiel hierfür kann aus folgender Tabelle gelesen werden:

	Runde											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
verbliebene Teams	32	32	16	16	9	7	5	4	3	2	2	2
unbesiegte Teams	32	16	16	8	7	5	4	3	2	2	1	0

Die Tabelle wurde dabei spaltenweise aufgebaut. Sind in einer Runde noch n Mannschaften im Spiel, so werden in dieser Runde $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ Spiele gespielt, und in jedem Spiel verringert sich entweder die Anzahl der im Turnier verbliebenen Mannschaften oder die Anzahl der unbesiegten Mannschaften um genau eins. Somit gelangt man von einer Spalte zur nächsten, indem man beliebig (unter der Nebenbedingung, dass natürlich nur diejenigen Mannschaften aus dem Turnier ausscheiden können, die bis dato schon einmal verloren haben) die beiden Zahlen der Spalte um insgesamt $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ erniedrigt.

Wer mag, kann noch beweisen, dass die Anzahl der Spieltage tatsächlich minimal 7 und maximal 12 beträgt.

L 54.3 Seien mit a, b, c die Dreiecksseiten und mit h_a, h_b, h_c die entsprechenden Höhen im Dreieck bezeichnet. Nun gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$ und damit

$$ah_a = bh_b = ch_c \,.$$

Ist b die zweitlängste Seite, so ist auch h_b die zweitgrößte Höhe im Dreieck. Nach Voraussetzung gibt es dann reelle Zahlen d, e so, dass $a+d=b$, $b+d=c$ und $h_c + e = h_b$, $h_b + e = h_a$ gelten. Setzen wir dies für a, h_a bzw. für c, h_c in die obige Gleichung ein und formen weiter um, erhalten wir

$$\begin{aligned}
& ah_a = bh_b = ch_c \\
\iff\quad & (b-d)(h_b+e) = bh_b = (b+d)(h_b-e) \\
\iff\quad & bh_b + be - dh_b - de = bh_b = bh_b - be + dh_b - de \\
\iff\quad & be - dh_b = de \text{ und } -(be - dh_b) = de \\
\implies\quad & de = 0 \\
\iff\quad & d = 0 \text{ oder } e = 0 \,.
\end{aligned}$$

Dann ist auch $be - dh_b = de = 0$. Falls $e = 0$ ist, folgt $dh_b = 0$ und damit $d = 0$, denn h_b ist als Dreieckshöhe echt positiv. In jedem Fall ist also $d = 0$ und es ergibt sich $a = b = c$. Das Dreieck ist somit gleichseitig.
Umgekehrt bilden in jedem gleichseitigen Dreieck sowohl die Seitenlängen als auch die Längen der Höhen eine arithmetische Zahlenfolge.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt für die Höhe h in einem gleichseitigen Dreieck $h^2 = a^2 - (\frac{1}{2}a)^2$, also $h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Mit der Anfangsbedingung $1 = A = \frac{1}{2}ah = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$ folgt nun $a = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$.

Das gesuchte Dreieck ist somit gleichseitig mit Seitenlänge $a = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$.

L 54.4 Eine mögliche Lösung für den ersten Teil der Aufgabe ist die Zahl

$$N = 1000100010001\ldots00010001\,,$$

die mit genau 2006 Einsen (und $2005 \cdot 3$ Nullen) geschrieben wird. Jedes der Vielfachen $k \cdot N$ mit $1 \leq k \leq 2006$ besteht dann aus 2006 hintereinandergeschriebenen Zahlen k (mit eventuell führenden Nullen, um k „vierstellig“ zu machen). Die Quersumme einer solchen Zahl $k \cdot N$ ist dann das 2006fache der Quersumme von k, also insbesondere durch 2006 teilbar.

Obige Zahl N funktioniert im Allgemeinen nicht mehr für Vielfache größer als $9999 \cdot N$. Tatsächlich gibt es gar keine Zahl N so, dass *alle* ihre Vielfachen eine durch 2006 teilbare Quersumme haben. Um dies zu beweisen, nehmen wir das Gegenteil an: Angenommen, es gebe eine Zahl N so, dass jedes ihrer Vielfachen eine durch 2006 teilbare Quersumme hat. Angenommen, N habe n Ziffern. Dann kann man die beiden Vielfachen $A = (10^{n+1} - 1) \cdot N = 10^{n+1} \cdot N - N$ und $B = (10^{n+2} - 1) \cdot N = 10^{n+2} \cdot N - N$ von N betrachten. A besteht aus den Ziffern von N, gefolgt von einer Neun und dann gefolgt von den Ziffern der Zahl $10^n - N$. B hingegen besteht aus den Ziffern von N, gefolgt von zwei Neunen und dann ebenfalls gefolgt von den Ziffern der Zahl $10^n - N$.
Die Quersummen von A und B, die ja nach Annahme beide durch 2006 teilbar sind, unterscheiden sich also um genau 9 – ein Widerspruch.
Es gibt daher keine solche Zahl N.

Lösungen zu Aufgabenblatt 55

L 55.1 Wir betrachten zunächst zwei ineinandergreifende Zahnräder mit m und n Zähnen: Führt das erste Rad eine volle Umdrehung aus, so macht das zweite Zahnrad $\frac{m}{n}$ Umdrehungen. Nun schauen wir, was passiert, wenn noch weitere Zahnräder dazwischengeschaltet werden: Bei einer Umdrehung des ersten Zahnrades drehen sich alle weiteren Zahnräder um m Zähne weiter und das letzte Zahnrad führt also immer noch $\frac{m}{n}$ Umdrehungen aus.

Die Anzahl der Umdrehungen des letzten Zahnrades in der Reihe mit zehn Zahnrädern soll nun maximal werden. Wie eben gezeigt, kommt es dabei nur auf die Anzahl der Zähne des ersten und des letzten Zahnrades an. Hat das erste Zahnrad wie oben m Zähne und das letzte Zahnrad n Zähne, so wird die Anzahl der Umdrehungen des letzten Zahnrads genau dann maximal, wenn m möglichst groß und n möglichst klein ist. Karsten muss also das Zahnrad mit 385 Zähnen zuerst und das mit 7 Zähnen zuletzt anordnen, und das letzte Zahnrad macht dann $\frac{385}{7} = 55$ Umdrehungen. Die Reihenfolge der übrigen acht Zahnräder ist beliebig und Karsten hat insgesamt $8! = 40320$ verschiedene Möglichkeiten für eine Anordnung der Zahnräder, bei der das letzte Zahnrad möglichst viele Umdrehungen ausführt.

L 55.2 Um die Anzahl der Klebekanten zu bestimmen, nimmt man die Anzahl aller Kanten des Polyeders und subtrahiert davon die Anzahl der Kanten, die nicht geklebt werden müssen. Diese erhält man durch folgende Überlegung:

Beim Erstellen der Körpernetze werden die zugrunde liegenden Vielecke in entsprechender Anzahl nebeneinandergemalt, wobei jedes weitere Vieleck an genau einer Kante an den bereits gezeichneten Teil des Körpernetzes angehängt wird. Sei mit f die Anzahl der Flächen und damit die Anzahl der Vielecke bezeichnet. Bei jeder der verschiedenen Möglichkeiten entstehen dann $f - 1$ Zeichenkanten, die später nicht mehr geklebt werden müssen, unabhängig von der genauen Gestalt des Körpernetzes.

Sei mit k die Anzahl der Kanten des Polyeders bezeichnet. Dann ergibt sich die Anzahl der Klebekanten zu $k - (f - 1) = k - f + 1$.

Wer die Eulersche Polyederformel $f - k + e = 2$ kennt, wobei mit e die Anzahl der Ecken bezeichnet sei, kann dieses Ergebnis noch vereinfachen: Es gibt $k - f + 1 = e - 1$ Klebekanten.

	Tetraeder	Würfel	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
Flächen (f)	4	6	8	12	20
Kanten (k)	6	12	12	30	30
Ecken (e)	4	8	6	20	12
Klebekanten	3	7	5	19	11

Die meisten Klebekanten benötigt also das Dodekaeder, gefolgt vom Ikosaeder, dem Würfel und dem Oktaeder. Die wenigsten Klebekanten hat das Tetraeder.

L 55.3 Seien r_1, g_1, b_1 die drei Kantenlängen des ersten Quaders in Zentimetern, und zwar so, dass r_1 der Abstand der beiden roten Flächen, g_1 der Abstand der beiden gelben und b_1 der Abstand der beiden blauen Flächen ist. Dann trägt dieser erste Quader zum blau-gelben Turm genau die Höhe r_1 bei, im blau-roten Turm hat er die Höhe g_1 und im gelb-roten die Höhe b_1.
Entsprechend bezeichnen wir die Kantenlängen der anderen 19 Quader mit r_2, g_2, b_2 bis r_{20}, g_{20}, b_{20}. Die drei Türme sind dann

$$\begin{aligned} &r_1 + r_2 + \ldots + r_{20}\,\text{cm}\,, \\ &g_1 + g_2 + \ldots + g_{20}\,\text{cm} \quad \text{und} \\ &b_1 + b_2 + \ldots + b_{20}\,\text{cm} \end{aligned}$$

hoch.

Angenommen, alle drei Türme wären echt kleiner als einen Meter. Dann wäre die Summe der drei Höhen echt kleiner als drei Meter.
Wenn wir nun aber zeigen können, dass diese Summe mindestens drei Meter sein muss, ist unsere Annahme falsch und wir haben bewiesen, dass mindestens einer der Türme einen Meter hoch sein muss.

Behauptung: Die drei Türme sind zusammen mindestens drei Meter, also 300 cm hoch:

$$(r_1 + r_2 + \ldots + r_{20}) + (g_1 + g_2 + \ldots + g_{20}) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_{20}) \geq 300\,.$$

Die Summanden in dieser Gleichung können wir statt nach Farben auch wieder nach den Quadern sortieren; wir haben dann zu zeigen, dass $(r_1 + g_1 + b_1) + (r_2 + g_2 + b_2) + \ldots + (r_{20} + g_{20} + b_{20}) \geq 300$ gilt. Dazu reicht es zu zeigen, dass für jeden der zwanzig Quader $r_i + g_i + b_i \geq 300 : 20 = 15$ gilt.
Im Weiteren betrachten wir erst mal nur einen Quader mit den drei Seitenlängen r, g und b. Wäre unser Quader ein Würfel, so wären alle drei Seiten gleich lang, und zwar $r = g = b = \sqrt[3]{rgb} = \sqrt[3]{125} = 5$. In diesem Fall gilt in der oben

zu zeigenden Ungleichung sogar Gleichheit $r + g + b = 15 \geq 15$, und wir sehen, dass sich die 15 auf der rechten Seite gerade als $3 \cdot \sqrt[3]{rgb}$ zusammensetzt.
Die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel (siehe unten) besagt, dass $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ für beliebige positive a, b, c ist. In unserem Fall gilt damit tatsächlich $\frac{r+g+b}{3} \geq 5$ bzw. $r + g + b \geq 15$ für jeden Quader mit Volumen $125\,\mathrm{cm}^3$.
Wie oben ausgeführt ist, folgt dann, dass mindestens einer der drei Türme mindestens einen Meter hoch ist.

Behauptung: Es kann sein, dass keiner der drei Türme höchstens einen Meter hoch ist.

Dazu seien drei Quader mit den Seitenlängen 1 cm, 1 cm, 125 cm gegeben. Bei dem ersten färben wir die kleine $1 \cdot 1\,\mathrm{cm}^2$-Fläche rot, beim zweiten färben wir die kleine Fläche blau und beim dritten gelb. Dann ist jeder der drei Türme mindestens 125 cm hoch, also größer als einen Meter, egal wie die anderen 17 Quader geformt sind.

Die obige Mittelungleichung dürft ihr bei uns jederzeit ohne Beweis benutzen; für diejenigen, die sie bisher noch nicht kannten, folgt hier ein Beweis.

Behauptung: Für alle positiven Zahlen a, b, c gilt die sogenannte *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel*

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}\,.$$

Links steht dabei die Zahl, die man umgangssprachlich als Durchschnitt oder Mittelwert der drei Zahlen a, b, c bezeichnet. Der Mathematiker sagt dazu *arithmetisches Mittel*. Da wir drei Zahlen addieren, müssen wir auch wieder durch 3 teilen.
Auf der rechten Seite steht eine Art multiplikativer Durchschnitt, das sogenannte *geometrische Mittel*. Dabei wird die Addition durch die Multiplikation ersetzt, deshalb muss das Teilen auch durch Wurzelziehen ersetzt werden; und weil es drei Faktoren sind, muss die dritte Wurzel gezogen werden.

Diese Ungleichung gibt es auch für zwei positive Zahlen: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Sie wollen wir nun beweisen: Seien A und B zwei positive Zahlen. Da jede Quadratzahl nichtnegativ ist, gilt $0 \leq (A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ oder umgestellt $A^2 + B^2 \geq 2AB$. Teilen wir noch durch 2 und ersetzen $A = \sqrt{a}, B = \sqrt{b}$ (Letzteres dürfen wir tun, solange A, B, a, b nichtnegativ sind), so erhalten wir die geforderte Ungleichung für zwei Zahlen

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}\,. \tag{55.1}$$

Jetzt machen wir einen kleinen Umweg und zeigen zuerst, dass die entsprechende Ungleichung auch für vier positive Zahlen a, b, c, d gilt: $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$. Es ist nämlich $\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}\right)$. Wenden wir die Ungleichung (55.1) für zwei Zahlen auf die beiden Summanden einzeln an, erhalten wir $\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}\right) \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd}\right)$; ein drittes Anwenden der Ungleichung liefert $\frac{1}{2}\left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd}\right) \geq \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}}$. Zusammengesetzt ergibt das die Ungleichung

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd} \qquad (55.2)$$

für vier positive Zahlen.

Damit können wir nun abschließend die Ungleichung für drei Zahlen beweisen. Wir wählen $d := \frac{a+b+c}{3}$ und erhalten mit der Ungleichung (55.2) für vier Zahlen

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{abc \cdot \frac{a+b+c}{3}} = \sqrt[4]{abc} \cdot \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Nun teilen wir noch durch den zweiten Faktor der rechten Seite

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{\frac{3}{4}} \geq \sqrt[4]{abc},$$

potenzieren mit $\frac{4}{3}$ und erhalten wie gewünscht und behauptet

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

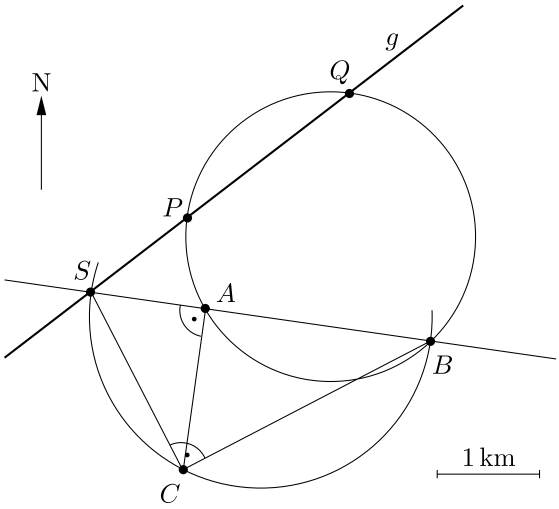
Bemerkung: Ohne Beweis sei noch erwähnt, dass diese Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

auch für n positive Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gilt. Gleichheit gilt dabei genau dann, wenn alle n Zahlen gleich sind.

L 55.4 Ja, Ali Baba kann die Lage des Schatzes exakt rekonstruieren.

Zunächst vereinfachen wir die Bezeichnungen und schreiben A für Akaba, B für Bekaba und g für die Gerade der Kamelroute. Dann zeichnen wir in die Skizze die Gerade durch A und B; ihr Schnittpunkt mit g heiße S. Die beiden Punkte, an denen der frühere Rand(-Kreis) der Oase die Kamelroute schneidet, seien mit P und Q bezeichnet, wobei P näher an S liegt.



Nach dem Sekantensatz[1] gilt nun:

$$\begin{aligned}|SA| \cdot |SB| &= |SP| \cdot |SQ| \\ &= |SP| \cdot (|SP| + 2)\,. \end{aligned} \tag{55.3}$$

Damit ist die Lage von P fast eindeutig bestimmt, denn $|SP|$ muss eine Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + 2x - |SA| \cdot |SB| = 0$ sein. Eine der beiden Lösungen dieser Gleichung ist jedoch negativ, so dass zumindest die Länge $|SP|$ eindeutig ist; und da A und B am südlichen Rand der früheren Oase liegen sollen, muss P – mit Abstand $|SP|$ – nördlich von S liegen. Die zweite Lösung der quadratischen Gleichung ist übrigens $-|SQ| = -(|SP| + 2)$.
Weil durch drei Punkte (hier A, B und P) höchstens ein Kreis geht, ist hiermit auch der Mittelpunkt der Oase eindeutig bestimmt.

Die Gleichung (55.3) wollen wir jetzt für unsere geometrische Konstruktion verwenden. Als Erstes konstruieren wir den Thaleskreis über SB und die Senkrechte auf der Geraden (AB) durch A (die Hilfskreise und -strecken dafür sind nicht eingezeichnet) und bezeichnen einen der Schnittpunkte mit dem Thaleskreis mit C. Es ist dann SCB ein rechtwinkliges Dreieck, so dass nach dem

[1] Der Sekantensatz besagt: Wenn zwei Geraden, die durch einen gemeinsamen Punkt S gehen, Sekanten eines Kreises sind, d. h. diesen Kreis in je zwei Punkten A und B bzw. C und D schneiden, dann gilt $|SA| \cdot |SB| = |SC| \cdot |SD|$. Der Satz gilt auch noch, wenn eine oder beide der Sekanten zu Tangenten entarten oder anders gesagt die Schnittpunkte zusammenfallen: Wenn man zwei Tangenten hat, ist die Aussage aus Symmetriegründen trivial; wenn man genau eine Tangente hat, heißt die Aussage *Sekanten-Tangenten-Satz*.

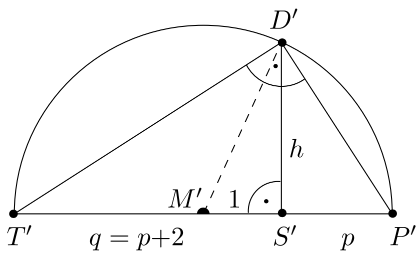
Kathetensatz gilt:

$$|SC|^2 = |SA| \cdot |SB| \,. \tag{55.4}$$

Nun ist $|SP|$ zu konstruieren; da aus (55.3) und (55.4) die Gleichung

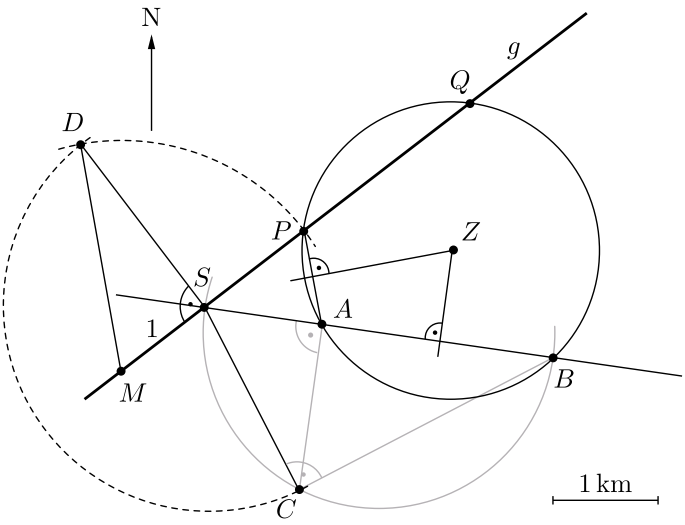
$$|SC|^2 = |SP| \cdot (|SP| + 2)$$

folgt, kann man $|SP|$ mithilfe des Höhensatzes gewinnen. Dazu folgende Überlegung: Der Höhensatz besagt, dass in einem rechtwinkligen Dreieck gilt: $h^2 = pq$ (vergleiche Skizze).



Hier soll nun $q = p + 2$ gelten, das bedeutet andersherum, dass der Mittelpunkt M' der Strecke $T'P'$ um eine Einheit vom Höhenfußpunkt entfernt liegt. Da M' gleichzeitig der Mittelpunkt des Thaleskreises des rechtwinkligen Dreiecks ist, kann man zu gegebener Höhe h die Strecken p und q wie folgt konstruieren: Man zeichnet eine Gerade (auf der die Hypotenuse des Dreiecks liegen soll), konstruiert eine dazu senkrechte Strecke $S'D'$ der Länge h, trägt auf der Geraden eine Strecke $S'M'$ der Länge 1 ab (Anmerkung: diese Länge ist ja in unserer Zeichnung als Maßstab angegeben) und schlägt den Kreis um M' mit Radius $|M'D'|$, die Schnittpunkte P' und T' mit der Geraden liefern dann die Streckenlängen $p = |S'P'|$ und $p + 2 = |S'T'|$.

Diese Konstruktion übertragen wir nun auf unsere Landkarte: Wir konstruieren zunächst die Senkrechte durch S auf g, tragen auf ihr die Strecke SD der Länge $|SC|$ ab, auf g dann eine Strecke SM der Länge 1 entgegen der Richtung, in der wir den Punkt P finden wollen. Jetzt zeichnen wir den Kreis um M mit Radius $|MD|$ und finden so P als Schnittpunkt mit g auf der gewünschten Seite. (Q ist für den Rest gar nicht mehr wichtig.) Den Mittelpunkt Z der früheren Oase bekommt man dann als Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABP über die übliche Konstruktion der Mittelsenkrechten.



Anmerkungen: Dort, wo wir den Kathetensatz verwendet haben, hätten wir auch den Höhensatz benutzen können und umgekehrt.

Auf die Konstruktion von M als Hilfspunkt kann man auch auf rechnerischem Wege kommen: Aus (55.3) und (55.4) folgt:

$$\begin{aligned} |SC|^2 &= |SP| \cdot (|SP| + 2) \\ &= |SP|^2 + 2|SP| + 1 - 1 \\ &= (|SP| + 1)^2 - 1\,. \end{aligned}$$

Daher ist $|SP|+1$ die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit Katheten $|SC|$ und 1.

Lösungen zu Aufgabenblatt 56

L 56.1 Betrachten wir zunächst die drei Musketiere Aramis, Athos und Porthos: Allgemein beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs beim Werfen eines Würfels $\frac{1}{6}$, die Wahrscheinlichkeit, keine Sechs zu werfen, $\frac{5}{6}$.
Also beträgt die Wahrscheinlichkeit, bereits nach der ersten Runde Würfeln Wache halten zu müssen, für Aramis $\frac{1}{6}$, für Athos $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$ (da dies voraussetzt, dass Aramis zuvor keine Sechs gewürfelt hat) und für Porthos $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$ (es dürfen weder Aramis noch Athos eine Sechs gewürfelt haben). Sollte nach der ersten Runde keiner der drei eine Sechs geworfen haben, so wiederholt sich der Ablauf des Spiels und in der zweiten Runde gelten für jeden wieder die gleichen Wahrscheinlichkeiten, nach dieser Runde Wache halten zu müssen.
Insgesamt kann man also sagen, dass die Wahrscheinlichkeit für Athos $\frac{5}{6}$-mal so groß und die für Porthos $\left(\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}\right)$-mal so groß ist wie die für Aramis, die erste Wache halten zu müssen.
Sei nun mit p die Wahrscheinlichkeit für Aramis bezeichnet. Da die Summe der drei Wahrscheinlichkeiten genau 1 ergeben muss, gilt:

$$\begin{aligned} & 1 = p + \frac{5}{6} \cdot p + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot p \\ \iff \quad & 1 = \frac{91}{36} \cdot p \\ \iff \quad & p = \frac{36}{91} \approx 0{,}3956 = 39{,}56\,\%\,. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeiten für Aramis, Athos und Porthos sind also

$$\frac{36}{91} \approx 39{,}56\,\%, \quad \frac{36}{91} \cdot \frac{5}{6} = \frac{30}{91} \approx 32{,}97\,\% \quad \text{und} \quad \frac{36}{91} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{91} \approx 27{,}47\,\%\,.$$

Das Spiel ist nicht gerecht.

Für n Streitende lösen wir das Problem analog:
Sei wieder p die Wahrscheinlichkeit, dass der Erste in der Runde zuerst Wache halten muss. Dann gilt

$$1 = p + \frac{5}{6} \cdot p + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot p + \ldots + \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot p \tag{56.1}$$

und damit

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \quad 1 &= \frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}} \cdot p \\ \Longleftrightarrow \quad p &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n} = \frac{6^{n-1}}{6^n-5^n}\,. \end{aligned}$$

Für den i-ten Streitenden der Würfelreihenfolge ergibt sich dann eine Wahrscheinlichkeit von

$$p_i = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n} = \frac{5^{i-1} \cdot 6^{n-i}}{6^n-5^n}\,.$$

Bemerkung: In Gleichung (56.1) haben wir einen Rechentrick, nämlich die Formel für die endliche geometrische Reihe benutzt, welche man sich wie folgt überlegen kann:
Sei $s = 1 + \left(\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$. Dann ist $\frac{5}{6} \cdot s = \left(\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{5}{6}\right)^n$. Diese Gleichungen subtrahiert man nun und erhält $\left(1-\frac{5}{6}\right) \cdot s = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$, also

$$1 + \left(\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = s = \frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}}\,.$$

L 56.2 Sei mit a die Seitenlänge des roten und mit b die der grünen Dreiecke bezeichnet.
Wir nehmen nun an, dass $b < \frac{a}{2}$ ist: Da mit den grünen Dreiecken das rote vollständig bedeckt werden soll, müssen insbesondere auch die drei Ecken und die drei Seitenmitten des roten Dreiecks bedeckt werden. In einem Dreieck der Seitenlänge a haben je zwei Seitenmitten und somit auch je zwei der sechs genannten Punkte einen Abstand von mindestens $\frac{a}{2}$. Deshalb kann ein grünes Dreieck, das einen dieser Punkte bedeckt, keinen weiteren der Punkte bedecken. Man benötigt in diesem Fall also mindestens sechs grüne Dreiecke.
Aus der Tatsache, dass für Malte schon fünf Dreiecke ausreichend sind, folgt, dass $b \geq \frac{a}{2}$ ist.
Da man durch Verbinden der Seitenmittelpunkte das rote Dreieck in vier gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge $\frac{a}{2}$ zerteilen kann, folgt direkt, dass Malte das rote auch mit vier der grünen Dreiecke bedecken kann.

L 56.3 Wenn man sich die ersten drei Zeilen der Tabelle genau ansieht, so erkennt man, dass sich Ingo, Stephan und Elias nur bei Frage 8 einig waren und demnach bei allen neun anderen Fragen wenigstens einer der drei falsch geantwortet hat. Somit konnten die drei zusammen nicht mehr als $3 \cdot 10 - 9 = 21$ Punkte erhalten. Da $6+7+8 = 21$ ist, sie also tatsächlich genau diese maximale Punktanzahl erhielten, müssen sie (zusammen) bei jeder Frage außer Frage 8 genau einen Punkt verloren und bei Frage 8 gar keinen Punkt verloren haben. Demnach ist die richtige Antwort auf jede Frage genau diejenige, für die sich die Mehrheit der drei entschieden hat:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
richtige Antwort	w	w	f	w	w	f	f	f	w	f

Vergleicht man dies mit Jörgs Antworten, so sieht man, dass er sich nur bei Frage 8 geirrt hat und daher genau 9 Punkte erhalten wird.

L 56.4 Seien AC und BD die beiden Sehnen, die sich im Punkt S schneiden und sich gegenseitig halbieren. Dann ist zum einen $|AS| = |CS|$ und $|BS| = |DS|$ und zum anderen $\angle ASB = \angle CSD$ und $\angle BSC = \angle DSA$. Nach Kongruenzsatz sws sind die Dreiecke ABS und CDS sowie die Dreiecke BCS und DAS also kongruent. Insbesondere heißt das aber, dass $|AB| = |CD|$ und $|BC| = |DA|$ ist. Das Viereck $ABCD$ ist daher ein Parallelogramm.

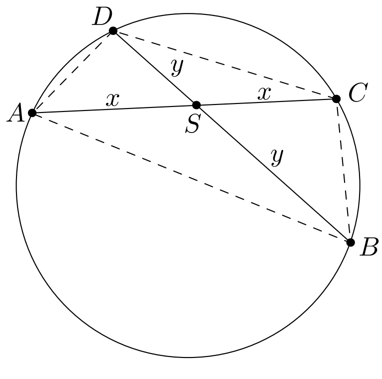


Abbildung 56.1: Skizze (eines Falles, der letztlich falsch ist)

In einem Parallelogramm sind die Innenwinkel in gegenüberliegenden Ecken gleich groß (nach dem Wechselwinkelsatz). Da es sich bei dem Parallelogramm $ABCD$ aber auch um ein Sehnenviereck handelt, ergänzen sich gegenüberliegende Winkel auch zu 180°. Daraus folgt, dass jeder Innenwinkel gleich 90° sein muss. Das Viereck $ABCD$ ist also sogar ein Rechteck.

Daraus folgt dann aber schließlich nach der Umkehrung des Satzes des Thales, dass die beiden Sehnen AC und BD Durchmesser des Kreises sein müssen.
Auch bei einer Ellipse können sich zwei Sehnen nur halbieren, wenn sie durch den Mittelpunkt der Ellipse gehen. Um dies einzusehen, wenden wir einen kleinen Trick an. Legt man die Ellipse E so in ein Koordinatensystem, dass der Mittelpunkt im Ursprung und die große Halbachse auf der x-Achse liegt, so hat sie bekanntlich die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

wobei a und b die Längen der großen und kleinen Halbachsen sind. Wir wenden nun auf die Ellipse die folgende Abbildung an:

$$f : (x, y) \mapsto (x, \frac{a}{b}y)\,.$$

Diese Abbildung streckt also gewissermaßen das ganze Koordinatensystem in y-Richtung.
Wichtig ist dabei Folgendes: Ist M der Mittelpunkt der Strecke AB, so ist $f(M)$ der Mittelpunkt der Strecke $f(A)f(B)$.
Dies sieht man schnell ein, denn sind $M = (x_M, y_M)$, $A = (x_A, y_A)$ und $B = (x_B, y_B)$ die Koordinaten der beteiligten Punkte, so gilt, wenn M Mittelpunkt von AB ist,

$$x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B) \qquad \text{und} \qquad y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B)\,.$$

Dann ist aber auch

$$x_{f(M)} = x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B) = \frac{1}{2}(x_{f(A)} + x_{f(B)})$$

und

$$y_{f(M)} = \frac{a}{b}y_M = \frac{1}{2}(\frac{a}{b}y_A + \frac{a}{b}y_B) = \frac{1}{2}(y_{f(A)} + y_{f(B)})\,.$$

Also ist tatsächlich $f(M)$ der Mittelpunkt von $f(A)$ und $f(B)$.
Außerdem ist das Bild der Ellipse E unter der Abbildung f ein Kreis mit Radius a und Mittelpunkt im Ursprung $(0, 0)$, denn der Punkt (x, y) liegt genau dann auf der Ellipse, wenn

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ist, wenn also

$$x^2 + \left(\frac{a}{b}y\right)^2 = a^2$$

ist. Das ist aber genau dann der Fall, wenn $f(x, y)$ auf dem Kreis $X^2+Y^2 = a^2$ liegt.
Nun ist der eigentliche Beweis nicht mehr schwer. Seien AC und BD zwei Sehnen in der Ellipse E, die sich in S schneiden und sich gegenseitig halbieren. Dann wenden wir die Abbildung f auf die gesamte Konstellation an und sehen, dass $f(A)f(C)$ und $f(B)f(D)$ zwei Sehnen im Kreis $f(E)$ sind, die sich in $f(S)$ schneiden und sich immer noch gegenseitig halbieren (weil $f(S)$ immer noch Mittelpunkt beider Sehnen ist). Wie im ersten Teil der Aufgabe bewiesen, muss dann aber notwendig $f(S) = (x_S, \frac{a}{b}y_S) = (0, 0)$ (der Mittelpunkt des Kreises $f(E)$) sein. Daraus folgt aber sofort, dass schon S selbst der Koordinatenursprung und damit der Mittelpunkt der Ellipse E war.

Bemerkung: Sehr erfreut hat uns an den eingesandten Lösungen der Aufgabe, dass es sehr viele verschiedene (erfolgreiche) Ansätze gab: Wir kennen jetzt sechs wesentlich verschiedene Lösungen. Eine weitere Lösung sei im Folgenden skizziert (nach Daniel). Die anderen Lösungen verwendeten geeignet gewählte Koordinaten und die Kreisgleichung, den Sehnensatz, betrachteten die Mittelsenkrechten der Sehnen oder zeigten, dass es zu jedem Punkt außer dem Mittelpunkt im Inneren einer Ellipse genau eine Sehne gibt, die ihren Mittelpunkt auf diesem Punkt hat.

2. Lösung:
Sei AB eine Sehne im Kreis, deren Mittelpunkt S sei. Angenommen, es gebe eine andere Sehne CD, die durch S halbiert werde. Die Figur aus den beiden Sehnen ist dann punktsymmetrisch um den Punkt S.
Nun werde auch der Kreis an dem Punkt S gespiegelt. Da die Punkte A, B, C und D nach Voraussetzung bei der Punktspiegelung in dieser Reihenfolge auf die Punkte B, A, D und C abgebildet werden, hat der Bildkreis mit dem originalen Kreis vier verschiedene Punkte gemeinsam. Das geht nur, wenn die beiden Kreise identisch sind, und das heißt, dass S mit dem Kreismittelpunkt zusammenfallen muss.

Diese Argumentation lässt sich sogar auch für Ellipsen anwenden, denn das Bild einer Ellipse unter einer Punktspiegelung (Drehung um $180°$) ist eine dazu kongruente Ellipse, deren Halbachsen parallel zu denen der originalen Ellipse sind. Und zwei verschiedene solche Ellipsen können ebenfalls nur zwei Schnittpunkte haben, wie man sich überlegen kann.

Lösungen zu Aufgabenblatt 57

L 57.1 Zunächst bemerken wir, dass die Anzahl der Teilnehmer durch 5 teilbar sein muss, weil jede Schule ein Team aus fünf Schülern sendet. Außerdem muss sie ungerade sein, da es sonst nicht möglich wäre, dass es genauso viele bessere wie schlechtere Schüler als Stefanie gibt. Weil Steffen schlechter ist als Stefanie, befindet sich Stefanie schlechtestenfalls auf Platz 47. Daher ist die Teilnehmeranzahl kleiner oder gleich $47 + 46 = 93$. Da Carl-Friedrich auf dem 76. Platz ist, gibt es andererseits mindestens 76 Teilnehmer. Das einzige ungerade Vielfache von 5 zwischen 76 und 93 ist 85. Die Teilnehmeranzahl muss also 85 betragen. Damit haben $\frac{85}{5} = 17$ Schulen teilgenommen.

L 57.2 Die einzige Zahl, die die Anforderungen erfüllt, ist 3816547290.

Sei a eine Zahl, die die Anforderungen erfüllt. Mit a_i bezeichnen wir die Zahl, die aus den ersten i Ziffern von a gebildet wird. Es bezeichne z_i die i-te Ziffer von a.

Der Anfang des Beweises ist einfach: Da a durch 10 teilbar sein soll, muss die letzte Ziffer, z_{10}, die 0 sein. a_5 muss durch 5 teilbar sein; da die Null schon vergeben ist, ist $z_5 = 5$.

Weil a_2, a_4, a_6 und a_8 jeweils durch eine gerade Zahl teilbar sein sollen, aber nur noch vier gerade Ziffern (2, 4, 6 und 8) zur Verfügung stehen, verteilen sich diese auf die zweite, vierte, sechste und achte Ziffer von a. Die erste, dritte, siebte und neunte Ziffer sind daher – in noch unbekannter Reihenfolge – die Ziffern 1, 3, 7 und 9.

Weiter geht es mit der Betrachtung von a_4 und a_8, die beide durch (mindestens) 4 teilbar sein sollen. Nach dem bekannten Teilbarkeitskriterium sind dafür jeweils die letzten beiden Ziffern zu betrachten. Die jeweils vorletzte Ziffer ist, wie wir bereits wissen, ungerade. Ein ungerades Vielfaches von 10 ist nicht durch 4 teilbar, deswegen darf die jeweils letzte Ziffer ebenso nicht durch 4 teilbar sein, damit die letzten beiden Ziffern insgesamt durch 4 teilbar sind. (Das kann man auch an den Zahlen direkt überprüfen.) Also sind z_4 und z_8 die Ziffern 2 und 6, womit z_2 und z_6 die Ziffern 4 und 8 sein müssen.

Nun machen wir uns Teilbarkeiten durch 3 zunutze, das betrifft zunächst a_3 und a_6. (Die Teilbarkeit von a_9 durch 9 ist automatisch gegeben, denn wegen $z_{10} = 0$ enthält a_9 genau alle Ziffern von 1 bis 9 und hat daher die Quersumme 45.) Es müssen $z_1 + z_2 + z_3$ und $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6$ durch 3 teilbar sein, also auch $z_4 + z_5 + z_6$. Das bedeutet: Wenn $z_4 = 2$ ist, muss $z_6 = 8$ sein; ist $z_4 = 6$, so folgt $z_6 = 4$.

Wir fassen den bisherigen Stand zusammen: a ist von einer der beiden Formen

$$\text{(a) } {*}4{*}258{*}6{*}0 \quad \text{oder} \quad \text{(b) } {*}8{*}654{*}2{*}0\,.$$

Dabei steht $*$ für eine ungerade Ziffer.
Noch einmal nutzen wir die Teilbarkeit von a_8 durch 8 aus: Im Fall (a) muss z_7 gleich 1 oder 9 sein, denn 836 und 876 sind nicht durch 8 teilbar. Ebenso ergibt sich, dass im Fall (b) z_7 gleich 3 oder 7 sein muss. Nach analoger Argumentation wie oben muss $z_7 + z_8 + z_9$ durch 3 teilbar sein. Im Fall (a) ist daher für $z_7 = 1$ die Ziffer z_9 gleich 2, 5 oder 8 (alles unmöglich, weil schon verwendet!), bzw. falls $z_7 = 9$ ist, ist z_9 gleich 3 (oder unmöglicherweise 6 oder 9). Im Fall (b) ist, falls $z_7 = 3$ ist, z_9 gleich 1 (oder 4) oder 7, und für $z_7 = 7$ ist z_9 gleich (0 oder) 3 (oder 6) oder 9.
Zum Schluss brauchen wir noch eine kleine Fallunterscheidung der verbliebenen Möglichkeiten – und prüfen, ob a_7 durch 7 teilbar ist:

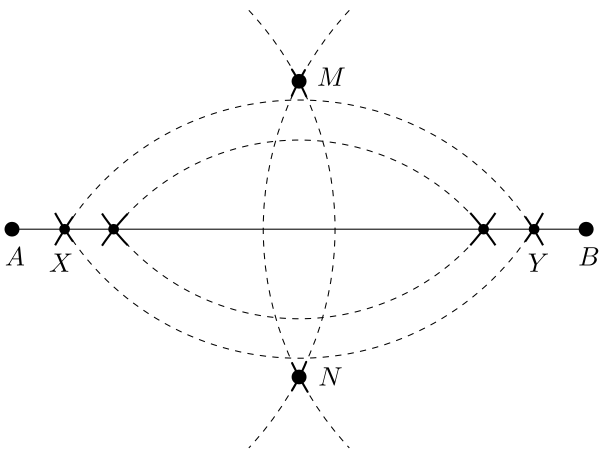
	z_7	z_9	z_1	z_3	a_7	a_7 durch 7 teilbar?
Fall (a)	1	–				–
	9	3	1	7	1472589	nein
	9	3	7	1	7412589	nein
Fall (b)	3	1	7	9	7896543	nein
	3	1	9	7	9876543	nein
	3	7	1	9	1896543	nein
	3	7	9	1	9816543	nein
	7	3	1	9	1896547	nein
	7	3	9	1	9816547	nein
	7	9	1	3	1836547	nein
	7	9	3	1	3816547	ja, $7 \cdot 545221$

Bei allen Fällen hier sind alle geforderten Teilbarkeiten außer die durch 7 erfüllt, denn die verwendeten Kriterien sind für die Teilbarkeit auch hinreichend, und damit ergibt sich, dass es genau eine Zahl gibt, die alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt, nämlich $a = 3816547290$.

L 57.3 Ja, Georg kann selbst mit seinen eingeschränkten Hilfsmitteln die beiden Punkte durch eine schnurgerade Strecke verbinden.

Seien A und B die beiden zu verbindenden Punkte auf der Landkarte. Zuerst stellt Georg den Zirkel auf 50 cm (oder eine beliebige Strecke größer als 40 cm) ein und schlägt jeweils einen Kreis um die beiden Punkte A und B. Da deren

Abstand $80\,\text{cm} < 2 \cdot 50\,\text{cm}$ beträgt, schneiden sich die beiden Kreise in zwei Punkten, die wir M und N nennen. Aufgrund dieser Konstruktion ist die (nicht eingezeichnete) Gerade durch M und N die Mittelsenkrechte der gesuchten (aber ebenfalls noch nicht eingezeichneten) Strecke AB und vor allem ist auch umgekehrt die Gerade (AB) die Mittelsenkrechte der Strecke MN.
Nun stellt Georg den Zirkel auf eine Länge knapp unter 50 cm ein, schlägt damit die Kreise um M und N und bestimmt deren beide Schnittpunkte X_1 und Y_1. Diese beiden Punkte liegen dann auf der Mittelsenkrechten von MN, also auf der Geraden durch A und B. Hat Georg den Radius groß genug gewählt, so beträgt der Abstand der beiden Punkte A und X_1 weniger als 5 cm und er kann sie auch mit seinem kurzen Lineal durch eine schnurgerade Strecke verbinden.
Indem Georg den Radius seines Zirkels nun nach und nach verringert, kann er weitere Punkte $X_2, X_3, X_4, \ldots$ und $Y_2, Y_3, Y_4, \ldots$ konstruieren, die zueinander jeweils einen Abstand von weniger als 5 cm besitzen und sämtlich auf der Geraden AB liegen.
Wählt er den Abstand der Punkte nicht zu klein, so wird er nach endlich vielen Schritten fertig sein.



L 57.4 Zunächst bemerken wir, dass Frau von Klim und Bim ihren Roulette-Abend genau dann beendet, wenn die Anzahl der siegreichen Runden die Anzahl der verlustbringenden Runden das erste Mal um genau 10 übersteigt (dann hat sie 200 Euro) bzw. wenn der umgekehrte Fall eintritt (dann ist sie bankrott). Wenn wir also die Gesamtzahl N der Spielrunden kennen und mit X die Anzahl der Siege, mit Y die Anzahl der Niederlagen bezeichnen, dann gilt am

Ende des Abends:

$$\begin{aligned} &X + Y = N \quad \text{und} \quad (X = Y + 10 \quad \text{oder} \quad Y = X + 10)\,, \\ \iff \qquad &X = \frac{N+10}{2} \quad \text{oder} \quad X = \frac{N-10}{2}\,. \end{aligned}$$

Es ist $p = \frac{18}{37}$ die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Rouletterunde eine rote Zahl fällt, also $1 - p = \frac{19}{37}$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl nicht rot ist.
Nun berechnen wir die Wahrscheinlichkeit $G(N)$, dass Frau von Klim und Bim nach N Runden mit 200 Euro nach Hause geht:

$$G(N) = p^{\frac{N+10}{2}} \cdot (1-p)^{\frac{N-10}{2}} \cdot A\,,$$

dabei bezeichnet A die Anzahl der möglichen Abfolgen von siegreichen und verlustreichen Runden, bei denen Frau von Klim und Bim nach genau N Runden das Spiel mit 200 Euro beendet.
Analog ergibt sich die Wahrscheinlichkeit $V(N)$, dass sie nach N Runden mit 0 Euro nach Hause geht:

$$V(N) = p^{\frac{N-10}{2}} \cdot (1-p)^{\frac{N+10}{2}} \cdot B\,,$$

wobei B entsprechend die Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten von Sieg- und Verlustrunden, die zum Bankrott nach genau N Runden führen, bezeichnet. Man beachte, dass sowohl A als auch B nur genau dann von null verschieden sind, wenn N größer oder gleich 10 und gerade ist.
Frau von Klim und Bim startet ihr Spiel mit 100 Euro, also genau in der Mitte von 0 und 200 Euro. Deshalb erhält man aus jeder Anordnung, die zum Bankrott führt, durch Austauschen von Gewinnrunden und Verlustrunden eine Anordnung, die zum 200-Euro-Ausgang führt. Man hat also in beiden Fällen die gleiche Anzahl von Anordnungsmöglichkeiten, d. h. A und B sind gleich. Daher gilt für gerades $N \geq 10$:

$$\frac{V(N)}{G(N)} = \frac{(1-p)^{10}}{p^{10}} = \left(\frac{19}{18}\right)^{10} \iff V(N) = \left(\frac{19}{18}\right)^{10} \cdot G(N)\,.$$

Letztere Gleichung gilt natürlich auch für alle ungeraden N und alle $N < 10$, denn in diesen Fällen ist ja $G(N) = V(N) = 0$.
Das Spiel ist mit Wahrscheinlichkeit 1 nach endlich vielen Runden zu Ende, denn für ein unendlich langes Spiel dürfte insbesondere niemals 19 Mal hintereinander „Schwarz oder 0“ auftauchen; die Wahrscheinlichkeit hierfür ist für jedes natürliche n kleiner als $\left(1 - \left(\frac{19}{37}\right)^{19}\right)^n$, was für großes n gegen 0 geht.

Also summieren sich die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Ausgänge zu 1. Die einzelnen $G(N)$ summieren sich zu unserer gesuchten Wahrscheinlichkeit G, dass Frau von Klim und Bim das Casino mit 200 Euro verlässt:

$$\begin{aligned}
& 1 = G(1) + V(1) + G(2) + V(2) + G(3) + V(3) + \dots \\
\iff & 1 = G(1) \cdot \left(1 + \left(\frac{19}{18}\right)^{10}\right) + G(2) \cdot \left(1 + \left(\frac{19}{18}\right)^{10}\right) + \dots \\
& = G \cdot \left(1 + \left(\frac{19}{18}\right)^{10}\right) \\
\iff & G = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{19}{18}\right)^{10}\right)} \approx 0{,}368\,.
\end{aligned}$$

Frau von Klim und Bim fährt also nur mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 36,8 Prozent mit 200 Euro nach Hause; mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 63,2 Prozent geht sie leer aus.

Lösungen zu Aufgabenblatt 58

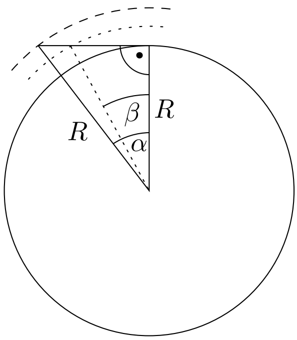
L 58.1 Wenn jedes der Kinder behauptet, dass sein rechter Nachbar ein Teufelchen ist, so sitzt rechts neben einem Engelchen tatsächlich ein Teufelchen (weil die Engelchen stets die Wahrheit sagen), wohingegen rechts von jedem Teufelchen ein Engelchen sitzt (da die Teufelchen stets lügen).
Also sitzen im ersten Fall Engelchen und Teufelchen abwechselnd am Tisch.

Betrachten wir nun den Fall, dass jedes Kind behauptet, zwischen einem Engelchen und einem Teufelchen zu sitzen. Wieder haben die Teufelchen gelogen, d. h. jedes Teufelchen sitzt entweder zwischen zwei Teufelchen oder zwischen zwei Engelchen. Angenommen, ein Teufelchen sitzt zwischen zwei weiteren Teufelchen: Diese können nun jeweils nicht mehr zwischen zwei Engelchen sitzen, haben also ebenfalls zwei Teufelchen als direkte Sitznachbarn. Führt man diese Argumentation fort, kommt man zu dem Schluss, dass nur Teufelchen am Tisch sitzen.
Ist dagegen mindestens ein Engelchen am Tisch, so gilt: Da es nicht lügt, sitzt es zwischen einem Engelchen und einem Teufelchen. Das Teufelchen wiederum muss dann als zweiten Tischnachbarn ein weiteres Engelchen haben. Dieses muss ein Engelchen als zweiten Nachbarn haben und so weiter. Als Sitzordnung ergibt sich also die Abfolge $E\;E\;T\;E\;E\;T\;\ldots\;E\;E\;T$, wobei mit E ein Engelchen und mit T ein Teufelchen bezeichnet sei.
Somit gibt es im zweiten Fall zwei mögliche Sitzordnungen: Entweder es sitzen nur Teufelchen am Tisch oder es sitzen abwechselnd zwei Engelchen und ein Teufelchen nebeneinander.

L 58.2 Ein Punkt auf der Erdoberfläche erscheint genau dann am Horizont, wenn die Strecke von dem Punkt zum Beobachter eine Tangente an die Erdoberfläche ist; vgl. dazu die Skizze. Der (Erd-)Radius beträgt $R \approx 6371\,\mathrm{km}$.
Die beiden Geschenkebringer fliegen übereinander, das heißt, dass sie sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit bewegen.
Zum Zeitpunkt t_1, an dem Knecht Ruprecht die Küste erblickt, ist er noch um den Winkel α von der Küste entfernt, und es gilt die Gleichung

$$\cos\alpha = \frac{R}{R + 2\,\mathrm{km}}\,.$$

Daraus ergibt sich: $\alpha \approx 1{,}4356°$.
Franz sieht die Küste zum ersten Mal zum Zeitpunkt t_2 bei einem Winkel β, für den $\cos\beta = \frac{R}{R+1\,\mathrm{km}}$ und damit $\beta \approx 1{,}0152°$ gilt. Seit t_1 haben die



beiden also 0,4204 Grad zurückgelegt; die Winkelgeschwindigkeit beträgt somit $\frac{0{,}4204}{15} \approx 0{,}0280$ Grad pro Minute. Für die restlichen 1,0152 Grad brauchen sie daher noch $\frac{1{,}0151}{0{,}0280} \approx 36{,}2$ Minuten. Es verbleiben knapp 9 Minuten Reserve – zu wenig, als dass sich Franz noch einen Abstecher zu den Ostsee-Engeln erlauben könnte, allenfalls wäre eine Plauderei mit den Seeschwalben drin, wenn ihm gerade welche über den Weg fliegen sollten.

L 58.3 Zunächst bestimmen wir die Anzahl der Taler im Topf vor Spielbeginn: Es kommen 27 Kinder und die Anzahl wird mit jedem Kind verdoppelt; also sind nach dem 27. Kind 2^{27} Taler im Topf. Nun betrachten wir einen einzelnen Taler und berechnen die Wahrscheinlichkeit, dass dieser nach 26-maligem Ausschütten des Topfes nicht mehr im Spiel ist. Um nach 26 Runden noch im Topf zu sein, müsste der Taler immer auf „Kopf“ fallen. Hierfür ist die Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^{26}$. Da es für den Taler nur die zwei Möglichkeiten gibt, entweder noch im Spiel zu sein oder nicht mehr im Spiel zu sein, addieren sich die beiden genannten Wahrscheinlichkeiten zu 1. Also beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelner Taler nach 26 Runden nicht mehr im Topf ist, $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{26}$.
Damit das letzte Kind nicht mehr an die Reihe kommt, müssen alle 2^{27} Taler nach 26 Runden nicht mehr im Topf sein. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist somit

$$\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{26}\right)^{2^{27}} \approx 0{,}1353 = 13{,}53\% > 10\%\,.$$

Sollten nun n statt 27 Kinder kommen, so ergibt sich ganz genau wie eben, dass das letzte Kind mit der Wahrscheinlichkeit

$$W(n) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)^{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^n}$$

nicht mehr an die Reihe kommt.
Wir behaupten, dass diese Wahrscheinlichkeit, selbst bei noch so großem n, nie größer als 15% ist. Um das zu beweisen, kann man entweder „schwere Geschütze" aus der Analysis bemühen, die einem (gewissermaßen definitionsgemäß) sagen, dass die Folge $W(n)$ von unten gegen den Grenzwert $1/e^2 \approx 0{,}13533\ldots$ konvergiert (hierbei ist e die Eulersche Konstante $e \approx 2{,}71828\ldots$), oder aber man argumentiert wie folgt:
Wir betrachten die Vergleichsfolge

$$U(n) = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}+1}\right)^{2^n} .$$

Dann ist zunächst sicher $W(n) < U(n)$ für alle n. Außerdem ist aber auch $U(n+1) < U(n)$ für jedes $n \geq 1$, denn diese Ungleichung ist der Reihe nach äquivalent zu:

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{1}{2^n+1}\right)^{2^{n+1}} &< \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}+1}\right)^{2^n} \\
\left(\left(1 - \frac{1}{2^n+1}\right)^2\right)^{2^n} &< \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}+1}\right)^{2^n} \\
1 - 2 \cdot \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{(2^n+1)^2} &< 1 - \frac{1}{2^{n-1}+1} ,
\end{aligned}$$

und dies wiederum wird nach Subtraktion von 1 und anschließender Multiplikation mit $-(2^n+1)^2(2^{n-1}+1)$ und Ausmultiplizieren zu den äquivalenten Ungleichungen

$$\begin{aligned}
2 \cdot (2^n+1)(2^{n-1}+1) - (2^{n-1}+1) &> (2^n+1)^2 \\
2^{2n} + 3 \cdot 2^n + 2 - 2^{n-1} - 1 &> 2^{2n} + 2 \cdot 2^n + 1 \\
2^{n-1} &> 0 .
\end{aligned}$$

Da Letzteres eine wahre Aussage darstellt und wir nur Äquivalenzumformungen gemacht haben, ist also in der Tat $U(n+1) < U(n)$ für alle n. Das heißt aber auch, dass für alle $n \geq 5$

$$W(n) < U(n) \leq U(5) = \left(\frac{16}{17}\right)^{32} \approx 0{,}1437\ldots < 0{,}15$$

gilt. Für $n = 1, 2, 3, 4$ kann man $W(n) < 0{,}15$ von Hand nachrechnen. Damit haben wir alles gezeigt.

Bemerkung 1: Die Folge der $U(n)$ konvergiert von oben gegen $1/e^2$. Außerdem zeigt eine analoge Rechnung wie oben für die $U(n)$, dass die $W(n)$ eine monoton steigende Folge bilden.

Bemerkung 2: Die letzte Abschätzung kann man der Vollständigkeit halber auch exakt machen (sollte man auch, weil man ansonsten eigentlich die mögliche Rechenungenauigkeit des Taschenrechners bestimmen müsste):

$$\left(\frac{16}{17}\right)^{32} < 0{,}15 = \frac{3}{20}$$

ist äquivalent zu

$$2^{130} \cdot 5 < 17^{32} \cdot 3\,.$$

Nach Ausmultiplizieren ist die linke Zahl gleich

$$6805647338418769269267492148635364229120$$

und die rechte gleich

$$7103734784281401737532318891962853742083\,,$$

womit die Ungleichung also wahr ist.
Zugegeben, auch diese Zahlen wird man kaum ohne Rechnerhilfe ermitteln können oder wollen, obwohl es dann immerhin ganzzahlige Rechnungen sind, die geeignete Programme ohne Probleme exakt ausführen können.
Wenn man bereit ist, mit bis zu fünfstelligen Zahlen ohne Taschenrechner zu rechnen, kann man die Ungleichung sogar – zumindest theoretisch – von Hand auflösen: Dazu erweitert man die Ungleichung Schritt für Schritt, um dann geeignet (nichtäquivalent) abschätzen zu können und so die Zahlen immer weiter zu verkleinern:

$$\begin{aligned}
& 2^{130} \cdot 5 < 3 \cdot 17^{32} \\
\Leftrightarrow\quad & 2^{130} \cdot 307^{10} \cdot 5 < 3 \cdot 17^{32} \cdot 307^{10} \\
\Leftarrow\quad & 2^{90} \cdot 5 < 3 \cdot 17^{2} \cdot 307^{10} \\
& \qquad \text{wegen } 2^4 \cdot 307 = 4912 < 4913 = 17^3\,, \\
\Leftrightarrow\quad & 2^{90} \cdot 23^5 \cdot 5 < 3 \cdot 17^{2} \cdot 23^5 \cdot 307^{10} \\
\Leftarrow\quad & 2^{30} \cdot 5 < 3 \cdot 17^{2} \cdot 23^5 \\
& \qquad \text{wegen } 2^{12} \cdot 23 = 94208 < 94249 = 307^2\,,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & 2^{30} \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 5 < 3^3 \cdot 11^2 \cdot 17^2 \cdot 23^5 \\
\Leftarrow \quad & 2^{22} \cdot 5 < 3^3 \cdot 11^2 \cdot 17^2 \cdot 23 \\
& \qquad \text{wegen } 2^4 \cdot 3 \cdot 11 = 528 < 529 = 23^2\,, \\
\Leftrightarrow \quad & 2^{22} \cdot 3^2 \cdot 5 < 3^5 \cdot 11^2 \cdot 17^2 \cdot 23 \\
\Leftarrow \quad & 2^{17} \cdot 5 < 3^5 \cdot 11^2 \cdot 23 \\
& \qquad \text{wegen } 2^5 \cdot 3^2 = 288 < 289 = 17^2\,, \\
\Leftarrow \quad & 2^{13} < 3 \cdot 11^2 \cdot 23 \\
& \qquad \text{wegen } 2^4 \cdot 5 = 80 < 81 = 3^4\,, \\
\Leftrightarrow \quad & 2^{13} \cdot 3 \cdot 5 < 3^2 \cdot 5 \cdot 11^2 \cdot 23 \\
\Leftarrow \quad & 2^{10} < 3^2 \cdot 5 \cdot 23 \\
& \qquad \text{wegen } 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120 < 121 = 11^2\,, \\
\Leftrightarrow \quad & 2^{10} = 1024 < 1035 = 23 \cdot 3^2 \cdot 5\,.
\end{aligned}
$$

Die letzte Aussage ist offensichtlich wahr, daher gilt auch die Ungleichung zu Beginn.

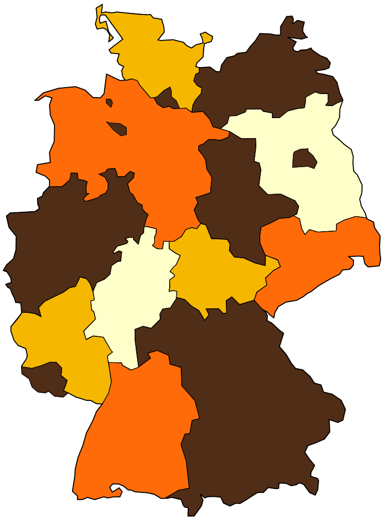
L 58.4 Die Weihnachtselfen haben die Schreibmaschinenscheibe wohl um sechs Stellen verdreht, und zwar so, dass aus jedem a ein g wurde, aus jedem b ein h usw.
Der entschlüsselte Text lautet dann:

> Von drauss, vom Walde komm ich her;
> ich muss euch sagen, es weihnachtet sehr …

Dies sind die Anfangszeilen des Gedichts „Knecht Ruprecht“ von Theodor Storm, der 1817 in Husum geboren wurde. Der Husumer Schlosspark ist bekannt für seine Krokusblüte im Frühjahr.

Lösungen zu Aufgabenblatt 59

L 59.1 Nora benötigt mindestens vier Farben und Johanna kann höchstens acht Bundesländer in ihrer Lieblingsfarbe färben, wenn beide sich an die genannten Regeln halten, die Deutschlandkarte zu färben.



Dass es nicht mit nur drei Farben geht, liegt quasi an Thüringen: Denn Thüringen liegt im Inneren von Deutschland und hat eine ungerade Anzahl an benachbarten Bundesländern. Nehmen wir also an, dass man zum Färben nur drei Farben bräuchte: Dann hat Thüringen eine Farbe A, Niedersachsen eine andere Farbe, B, und Sachsen-Anhalt eine weitere, C. Nun geht man im Kreis um Thüringen herum: Weil Sachsen-Anhalt mit C gefärbt ist, kann Sachsen nur Farbe B haben, entsprechend Bayern Farbe C. Hessen hat nun mit Bayern, Thüringen und Niedersachsen bereits alle drei Farben in den Nachbarländern, es ergibt sich daher ein Widerspruch.
Mit vier Farben hingegen ist eine Färbung problemlos möglich, ein Beispiel ist in der Abbildung dargestellt.

Bemerkung: Man kann diese Teilantwort auch rein theoretisch begründen: Wie viele von euch sicherlich schon gehört und teils auch geschrieben haben, gilt allgemeiner als nur für Deutschland die folgende berühmte Aussage:

Vierfarbensatz: *Jede Landkarte (einer Ebene oder einer Kugel), deren Länder zusammenhängende Flächen darstellen, kann mit höchstens vier Farben gefärbt werden.*

Und dass in Deutschland das zweigeteilte Bremen keine Probleme macht, ist auch offensichtlich.

Nun zur zweiten Frage:
Wie man am Beispiel sieht, ist es möglich, mindestens acht Länder mit einer vorgegebenen Farbe zu versehen. Dies ist auch die maximal mögliche Anzahl.

Beweisen kann man dies wie folgt: Wir teilen die Menge der Bundesländer so in acht Teilmengen auf, dass jedes Land einer Teilmenge jedes andere Land dieser Teilmenge berührt:

1	Schleswig-Holstein (SH), Hamburg (HH)
2	Niedersachsen (NI), Bremen (HB)
3	Mecklenburg-Vorpommern (MV)
4	Berlin (BE), Brandenburg (BB)
5	Sachsen-Anhalt (ST), Sachsen (SN), Thüringen (TH)
6	Nordrhein-Westfalen (NW), Hessen (HE)
7	Rheinland-Pfalz (RP), Saarland (SL)
8	Baden-Württemberg (BW), Bayern (BY)

Da in der Tat jedes Land einer Teilmenge jedes andere Land dieser Teilmenge berührt, kann in jeder Menge höchstens ein Land mit Johannas Lieblingsfarbe gefärbt werden. Alle 16 Bundesländer werden in der Tabelle verwendet, daher können höchstens acht Länder nach Johannas Wunsch gefärbt werden.

Zusätzliche Überlegungen:
Bleibt zum Beispiel die Frage: Wie viele Möglichkeiten einer solchen Färbung gibt es? Wo hat man noch Freiheiten in der Gestaltung? Dazu machen wir eine neue Tabelle (links):

1	SH, HH, NI
2	HB, NI
3	MV, BB
4	BE, BB
5	ST, SN, TH
6	NW, HE, RP
7	RP, SL
8	BW, BY, HE

1	SH, HH
2	HB
3	MV
4	BE
5	ST, SN, TH
6	NW
7	SL
8	BW, BY

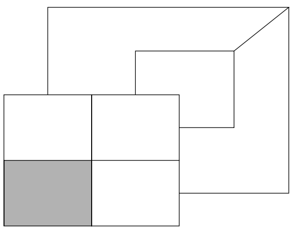
Wiederum kann in jeder Teilmenge nur ein Land lieblingsgefärbt werden. Außerdem wurde jedes Land mindestens einmal eingetragen, manche aber auch zweimal. Jetzt sei angenommen, ein Land, das in zwei Teilmengen enthalten ist, könne gefärbt werden. Dann „belegt“ es die beiden Zeilen in der Tabelle, kann insgesamt aber ja nur einmal gezählt werden – womit nur noch höchstens sieben Länder die Wunschfarbe erhalten können, ein Widerspruch. Damit fallen schon einmal NI, BB, RP und HE weg. Die Teilmengen reduzieren sich somit auf die Mengen in der rechten Tabelle oben.

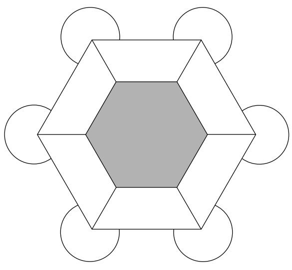
Andererseits müssen dann, um überhaupt noch acht Länder lieblingsfärben zu können, HB, MV, BE, NW und SL so gefärbt werden. Weil MV gefärbt wurde, fällt auch SH weg, so dass auch HH gefärbt werden muss.
Bleiben die Teilmengen 5 und 8. Hier kann man tatsächlich noch wählen: Nimmt man TH oder SN in Menge 5, so muss man BW nehmen; bei ST kann man bei Teilmenge 8 frei wählen. Es ergeben sich daher genau vier Möglichkeiten, von denen die gezeigte den größten Flächenanteil aufweist.

Dass die vorige Betrachtung überhaupt eine Lösung liefert, liegt daran, dass die Teilmengen geschickt gewählt waren. Bei größeren Karten wird man das nicht so schnell sehen. Hier wird man zunächst *heuristisch* herangehen, indem man zuerst Länder färbt, die möglichst wenig Nachbarn haben, um sich nicht zu viel zu verbauen. In den allermeisten Fällen wird das zu einem ziemlich guten Ergebnis führen, in sehr vielen sicherlich auch zum Optimum.
Aber: An diesem Beispiel kann man gut klarmachen, worin der Unterschied zwischen einer Heuristik, das heißt einer Vorgehensweise, die der Erfahrung nach in den meisten Fällen das Gewünschte liefert, und einer erwiesenermaßen optimalen Strategie liegt.
Wohl jeder, der sich die Deutschlandkarte anschaut, wird intuitiv zuerst BE, SL und HB mit Johannas Farbe färben, vielleicht auch gleich HH. Das ist auch völlig „richtig“, denn es gilt folgende Aussage:

Satz. *Hat ein Land nur ein Nachbarland oder zwei Nachbarländer, die sich gegenseitig berühren, so ist unter allen Färbungen mit der maximalen Zahl an Lieblingsfarben auch eine, bei der dieses Land gefärbt ist.*

Das ist schnell einzusehen: Sollte in einer solchen Färbung eines der anderen beteiligten Länder gefärbt sein, so kann man die Färbung ohne Weiteres austauschen, da es mit Sicherheit keine Konflikte mit Nachbarländern gibt; dass gar keines der zwei oder drei Länder gefärbt wird, kann gar nicht vorkommen, denn dann könnte man das betroffene Land noch zusätzlich färben.





Hat man jedoch ein Land, das zwei Nachbarn hat, die sich nicht berühren, so gibt es bereits ein Beispiel, bei dem man dieses Land nicht färben darf, um die

maximale Zahl zu erhalten – siehe Abbildung (linke Figur mit dem Land links unten).
Und auch andersherum gibt es ein Beispiel, in dem ausgerechnet das Land gefärbt werden muss, das die meisten Nachbarn hat (das zentrale Land in der rechten Figur).
Man muss sich also immer überlegen, ob Naheliegendes auch wirklich richtig ist.

Bei allen diesen Betrachtungen haben wir fast aus den Augen verloren, ob man nach der Auswahl der Länder mit der Lieblingsfarbe die Karte insgesamt noch mit vier Farben färben kann – um ehrlich zu sein: Für Deutschland geht es, aber im allgemeinen Fall wissen wir es (noch) nicht, würden uns jedoch über Hinweise freuen.

L 59.2 Da $46^2 = 2116$ ist, gelten $\sqrt{2007} < 46$ sowie die folgenden Abschätzungen $\sqrt{2006 + \sqrt{2007}} < \sqrt{2006 + 46} < 46$,

$$\sqrt{2005 + \sqrt{2006 + \sqrt{2007}}} < \sqrt{2005 + 46} < 46$$

und so weiter bis

$$\sqrt{4 + \sqrt{5 + \sqrt{6 + \ldots + \sqrt{2006 + \sqrt{2007}}}}} < 46\,.$$

Daraus folgt dann aber

$$\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \ldots + \sqrt{2006 + \sqrt{2007}}}}} < \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + 46}}} = 2\,.$$

Der Wurzelausdruck ist also kleiner als 2.
Bemerkung: Man kann sogar zeigen, dass allgemein die Folge

$$a_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \ldots + \sqrt{n - 1 + \sqrt{n}}}}}$$

monoton wachsend (das ist sofort klar) und nach oben beschränkt durch 2 ist: Wir nehmen hierzu an, dass a_n für irgendein n größer oder gleich 2 ist: Wiederholtes Quadrieren und Isolieren des verbleibenden Wurzelausdruckes liefern uns:

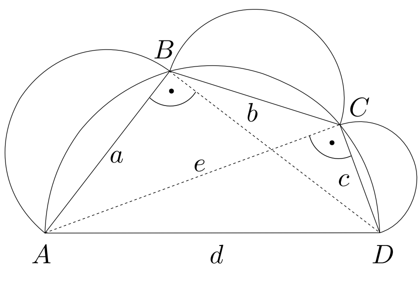
$$\begin{aligned}
&\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}} \geq 2 \\
\Rightarrow\quad &\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}} \geq 3 \\
\Rightarrow\quad &\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}} \geq 7 \qquad \text{usw.}
\end{aligned}$$

Diesem Vorgehen entsprechend definieren wir eine Folge b_k ganzer Zahlen durch $b_1 = 2$ und $b_{k+1} := b_k^2 - k$. Das k-te Folgenglied gibt also an, wie groß die k-te geschachtelte Wurzel mindestens sein muss, damit unsere Annahme zutrifft.
Nun zeigen wir durch vollständige Induktion, dass stets $b_k \geq k+1$ gilt:
Induktionsanfang: Es ist $b_1 = 2 \geq 1+1$.
Induktionsannahme: Es gelte $b_k \geq k+1$ für ein bestimmtes $k \geq 1$.
Induktionsschluss: Wegen $b_k \geq k+1$ gilt nun für b_{k+1}:

$$b_{k+1} = b_k^2 - k \geq (k+1)^2 - k = k+1+k^2 \geq k+2\,.$$

Allerdings ist $b_n = \sqrt{n} \leq n$, was im Widerspruch zum gerade Gezeigten steht. Die Annahme ist damit falsch und damit ist die Folge der a_n nach oben beschränkt durch 2.
Sie konvergiert also gegen einen Grenzwert, der irgendwo zwischen $a_1 = 1$ und 2 liegt. Den genauen Wert – mit einem *genauen Wert* meinen wir einen exakten Ausdruck wie $\frac{3}{2}$ oder $\sqrt{3}$ oder auch $\ln 2 \cdot \frac{\pi}{e}$ – haben wir nicht bestimmt. Natürlich ist es möglich, die ersten Nachkommastellen des Dezimalbruchs zu berechnen: 1,75793…

L 59.3 Die gesamte, vom Durchmesser d und den drei Halbkreisbögen über a, b und c eingeschlossene Fläche setzt sich einmal zusammen aus der Flä-



che F des Sehnenvierecks und den drei Halbkreisflächen, andererseits ist sie auch gleich der Summe der Flächen der drei Möndchen F_a, F_b und F_c und der (großen) Halbkreisfläche über d (siehe Skizze). Es gilt also:

$$F + \frac{1}{8}\pi a^2 + \frac{1}{8}\pi b^2 + \frac{1}{8}\pi c^2 = F_a + F_b + F_c + \frac{1}{8}\pi d^2$$

bzw.

$$F - (F_a + F_b + F_c) = \frac{1}{8}\pi\left(d^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\right) .$$

Nach Satz des Thales ist das Dreieck ADC rechtwinklig. Es gilt demnach

$$e^2 + c^2 = d^2 .$$

Da auch das Dreieck ADB nach Satz des Thales rechtwinklig ist, ist das Dreieck ACB stumpfwinklig mit stumpfem Winkel bei B. Deswegen[1] gilt

$$a^2 + b^2 < e^2 .$$

Addiert man hierzu die letzte Gleichung, so folgt $a^2+b^2+c^2 < d^2$. Das bedeutet aber, dass

$$F > F_a + F_b + F_c$$

ist; die drei Möndchen sind also zusammen stets kleiner als das Sehnenviereck.

Bemerkung: In den entarteten Fällen, dass zwei der Punkte A, B, C und D zusammenfallen, würde übrigens Gleichheit gelten. Die dabei entstehende Figur ist unter dem Namen „Möndchen des Hippokrates“ bekannt.

L 59.4 Setzt man $\alpha = 89{,}99$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\lfloor\alpha\rfloor &= 89\\
\lfloor 2\cdot\alpha\rfloor &= 179\\
\lfloor 4\cdot\alpha\rfloor &= 359\\
\lfloor 8\cdot\alpha\rfloor &= 719\\
\lfloor 16\cdot\alpha\rfloor &= 1439\\
\lfloor 32\cdot\alpha\rfloor &= 2879\,.
\end{aligned}$$

[1] Dies folgt entweder mathematisch exakt aus dem Kosinus-Satz $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\angle ABC) > a^2 + b^2$, oder aber einfach durch den anschaulichen Vergleich mit einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b, in dem die Hypotenuse dann kleiner als e sein muss. Oder man konstruiert einen exakten Vergleich: Dazu verlängere man die Höhe über der Grundseite e, bis man ein rechtwinkliges Dreieck erhält. Dessen Katheten sind dann länger als a und b.

Da dies alles Primzahlen sind, ist $\alpha = 89{,}99$ ein Beispiel für eine im ersten Aufgabenteil gesuchte Zahl.

„Wie kommt man auf die 89 als Startzahl?“ Anfangs muss man etwas probieren; als Erstes stellt man fest, dass entweder

$$\lfloor 2^{k+1} \cdot \alpha \rfloor = 2 \cdot \lfloor 2^k \cdot \alpha \rfloor \quad \text{oder} \quad \lfloor 2^{k+1} \cdot \alpha \rfloor = 2 \cdot \lfloor 2^k \cdot \alpha \rfloor + 1$$

gilt. Im ersten Fall ist die Zahl jedoch gerade, daher muss immer der zweite Fall eintreten.
Dann erkennt man vielleicht, dass jede Zahl, die durch 3 teilbar ist, nach zwei Schritten wieder eine durch drei teilbare Zahl liefert, die dann also keinesfalls eine Primzahl ist. Ebenso liefert jede Zahl, die bei Division durch 3 den Rest 1 lässt, im nächsten Schritt eine durch 3 teilbare Zahl. Also braucht man nur Zahlen zu betrachten, die bei Division durch 3 den Rest 2 lassen.
Auf analoge Art stellt man fest, dass man sich auf Zahlen beschränken kann, die bei Division durch 5 den Rest 4 lassen. Außerdem müssen alle Startzahlen ungerade sein (2 als Startzahl geht auch nicht). Damit bleiben nur noch 29, 59, 89, 119, ... als Kandidaten übrig. Und auch 29 und 59 fallen nach zwei bzw. einem Schritt weg, weil die Zahlen dann durch 7 teilbar sind.

Zum zweiten Teil der Aufgabe:
Es gibt keine Zahl α so, dass $\lfloor 2^n \cdot \alpha \rfloor$ für alle n eine Primzahl ist.
Um das einzusehen, betrachten wir die Binärdarstellung eines solchen α, wenn es denn existiert:

$$\alpha = \sum_{k=-\infty}^{m} a_k 2^k = (a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0{,}a_{-1} a_{-2} \dots)_2 \ ,$$

wobei die a_i alle entweder gleich 1 oder gleich 0 sind. Dann ist

$$\begin{aligned} \lfloor 2^n \cdot \alpha \rfloor &= \left\lfloor \left(a_m a_{m-1} \dots a_{1-n} a_{-n}{,}a_{-(n+1)} a_{-(n+2)} \dots\right)_2 \right\rfloor \\ &= (a_m a_{m-1} \dots a_{1-n} a_{-n})_2 \ . \end{aligned}$$

Dies kann nun aber nur eine Primzahl sein, wenn $a_{-n} = 1$ ist, denn ansonsten wäre die Zahl ja gerade. Wenn nun für das gegebene α für alle n die Zahl $\lfloor 2^n \cdot \alpha \rfloor$ prim ist, dann ist also $a_{-n} = 1$ für alle $n \geq 1$. Das bedeutet dann aber

$$\alpha = (a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0{,}1111 \dots)_2 = (a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0)_2 + 1 \,,$$

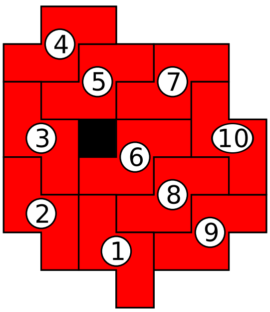
denn $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1$. Somit ist α aber eine ganze Zahl, was nicht sein kann, denn dann wäre schon $\lfloor 4 \cdot \alpha \rfloor = 4 \cdot \alpha$ nicht prim.

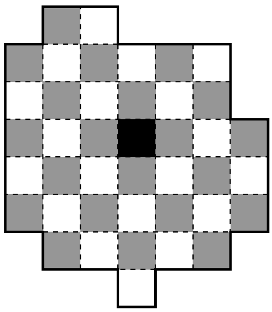
Es kann demnach kein solches α geben.

Lösungen zu Aufgabenblatt 60

L 60.1 Da Rebekka genau dann an der nächsten Ampel ankommen will, wenn diese gerade grün wird, muss sie jeden der drei Abstände zwischen den Ampeln in einem ganzzahligen Vielfachen von 60 Sekunden zurücklegen. Um die maximale Geschwindigkeit zu erhalten, unterteilen wir die drei Strecken in möglichst große, gleich lange Abschnitte, die dann von Rebekka in jeweils 60 Sekunden zurückgelegt werden sollen. Die Maßzahl der gesuchten Länge in Metern ist dann der größte gemeinsame Teiler von 60, 120 und 80. Dieser ist 20, also läuft Rebekka mit einer Geschwindigkeit von $\frac{20}{60}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{1}{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 1{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

L 60.2 Ariadnes Zimmer lässt sich vollständig mit den roten Teppichfliesen auslegen. Eine mögliche Anordnung, die dann auch die einzige ist, erhält man, indem man am untersten Zipfel des Zimmers beginnt und im Folgenden jene Fliesen verlegt, die jeweils durch die Form der verbleibenden Fläche eindeutig festgelegt sind. (Eine mögliche derartige Reihenfolge ist durch die Nummerierung in der Skizze gegeben.)





Bodos Zimmer hingegen lässt sich nicht vollständig auslegen. Dies kann man sich wie folgt überlegen:
Wir versehen den Boden gedanklich mit einem Schachbrettmuster. Dann bedeckt jede Fliese, unabhängig davon, wie man sie platziert, genau zwei schwarze und zwei weiße Felder. Aufgrund der Position der Säule in Bodos Zimmer gibt es bei einer Färbung wie in der Skizze 21 schwarze und nur 19 weiße Felder. Hieraus folgt sofort, dass sich der Boden nicht vollständig auslegen lässt.

Bemerkung 1: Alternativ kann man den zweiten Aufgabenteil auch analog zum ersten Teil lösen: Ähnlich wie in Ariadnes Zimmer sind die Fliesen 10, 9, 8 und 7 in dieser Reihenfolge eindeutig durch die Form des Zimmers festgelegt. Dann lässt sich aber das Feld rechts neben der Säule nicht mehr bedecken.

Bemerkung 2: Man kann sogar zeigen, dass sich ein beliebiges Zimmer mit dieser Art von Fliesen auf höchstens eine Weise auslegen lässt.

L 60.3 In Deutschland braucht das Eisenbahnunternehmen mindestens drei kurze Containerwagen. In den USA sind mindestens zwölf nötig.

Begründung: Zunächst betrachten wie die Situation in Deutschland: In jedem der beiden Bahnhöfe – für die wir kurz A und Z schreiben – muss jeden Morgen mindestens ein kurzer, das heißt: teurer Wagen stehen, damit ein Transport mit einer ungeraden Anzahl an Containern abgefertigt werden kann.
Zwei teure Wagen reichen allerdings nicht: Wenn zum Beispiel von A aus eine gerade Zahl von Containern, von Z aus aber eine ungerade Zahl von Containern transportiert werden soll, muss der kurze Wagen in A stehen bleiben, der von Z geht auf die Reise, so dass auch nach Ankunft der Züge in Z gar kein kurzer Wagen mehr steht.
Jedoch reichen drei kurze Wagen bereits aus: Sie müssen nach dem oben Gesagten so verteilt werden, dass in einem der Bahnhöfe einer und im anderen zwei stehen. Sei A der Bahnhof mit nur einem Wagen. Wenn dann beide Bahnhöfe eine gerade Anzahl an Containern verschicken, darf keiner einen kurzen Wagen im Zug einsetzen. Müssen beide Seiten eine ungerade Anzahl an Containern verschicken, nehmen beide genau einen kurzen Wagen. In beiden Fällen ist die Zahl der kurzen Wagen in A und Z nach Ankunft der Züge dieselbe wie vor der Abfahrt. Wenn schließlich A eine ungerade, Z eine gerade Zahl von Containern losschickt, nimmt A den einen kurzen Wagen, und Z schickt zwei kurze auf die Reise. Das geht, weil ja jeden Tag mindestens fünf Container verschickt werden. Falls umgekehrt A eine gerade, Z eine ungerade Zahl von Containern loszuschicken hat, nimmt A gar keinen kurzen Wagen, und Z nimmt genau einen. In diesen beiden Fällen hat sich nach Ankunft der Züge die Situation umgekehrt: In A stehen zwei kurze Wagen, in Z einer, so dass die Handlungsanweisungen für den nächsten Tag vertauscht werden.
Also kann man die Züge immer bedarfsgerecht zusammenstellen, daher reichen drei kurze Wagen.

In den USA müssen jeden Morgen in jedem Bahnhof mindestens vier kurze Wagen stehen, damit man jede Zahl von Containern versenden kann, denn es gibt offenbar fünf verschiedene Möglichkeiten, welcher Rest beim Teilen der Zahl der Container durch 5 übrig bleibt, und diese Reste 0, 1, 2, 3 und 4 kann man mit 0, 3, 1, 4 und 2 Zwei-Container-Wagen darstellen.

Wenn von A aus 25 und von Z aus 27 Container verschickt werden, verändert sich die Zahl der kurzen Wagen in A um $5l+1$, dabei ist l eine ganze Zahl. Also kann, wenn man die Anzahl der kurzen Wagen in A als $5m+a$ mit $0 \leq a \leq 4$ schreibt, a auch jeden Wert von 0 bis 4 annehmen. Für $a = 3$ darf jedoch m nicht null sein, denn es müssen ja morgens immer mindestens vier kurze Wagen in jedem Bahnhof sein. Daher müssen dann in A mindestens acht Wagen stehen, gleichzeitig in Z mindestens vier. Also braucht das Eisenbahnunternehmen wenigstens zwölf kurze Wagen.

Diese Zahl ist aber auch schon ausreichend – wir zeigen, dass es immer möglich ist, den Betrieb so zu organisieren, dass in A und Z jeweils mindestens vier Wagen stehen:

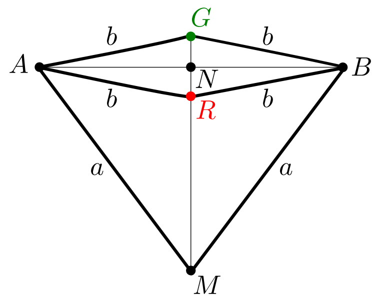
Seien in A n kurze Wagen, es stehen in Z daher $12 - n$ kurze Wagen. Nun sollen von A aus $5k + 2a$ Container und von Z aus $5j + 2b$ Container verschickt werden, dabei sei $0 \leq a, b \leq 4$. Nach dem oben Gesagten ist eine Darstellung der Anzahl in dieser Form immer möglich und außerdem eindeutig.

Wenn die Minimalanzahlen an kurzen Wagen eingesetzt würden, wären in A am nächsten Tag $n - a + b$ und in Z dann $12 - n + a - b$ kurze Wagen. Wenn beide Zahlen größer gleich 4 sind, kann man die Anzahlen an kurzen Wagen tatsächlich minimal wählen.

Andernfalls gilt: Da die Summe beider Zahlen nach wie vor 12 ist, kann höchstens eine der Zahlen kleiner als 4 sein. Da die Situationen von A und Z vertauscht werden können, dürfen wir im Folgenden annehmen, dass $n-a+b \leq 3$ ist. Wegen $n-a \geq 0$ ist $n-a+b+5 > 4$, das heißt, wenn Z nicht b, sondern $b+5$ kurze Wagen verschickt, hat A wieder genügend kurze Wagen für den nächsten Tag. Und weil außerdem $n-a+b+5 \leq 8$ ist, ist $12-n+a-b-5 \geq 12-8 = 4$, also hat auch Z am nächsten Tag genügend Wagen. Bleibt zu zeigen, dass Z überhaupt $b+5$ kurze Wagen verschicken kann: In Z stehen nach Voraussetzung $12-n$ Wagen, und mit der Vorgabe $n-a+b \leq 3$ bzw. äquivalent $-n \geq -3-a+b$ kann man abschätzen: $12-n \geq 12-3-a+b = 9-a+b = 5+b+(4-a) \geq 5+b$. Da immer mindestens 25 Container verschickt werden, hat man auch genügend, um die $2 \cdot (5+b) \leq 18$ Plätze auf den kurzen Wagen auszufüllen.

Bemerkungen: Wir haben in der Lösung nicht wesentlich benutzt, wie viele Container die kurzen Wagen tragen können; entscheidend war nur, dass die Anzahl teilerfremd zur Anzahl der Container auf einem langen Wagen ist. Das gilt auch im allgemeinen Fall; und wenn man in der Lösung für die USA (sozusagen) fast alle „fünf/5“ durch „g“ ersetzt, das heißt auch „vier/4“ durch „$g-1$“, „drei/3“ durch „$g-2$“, „acht/8“ durch „$2g-2$“ und „zwölf/12“ durch „$3g-3$“, so erhält man für die verallgemeinerte Aufgabe mit langen Wagen, die g Container, und kurzen Wagen, die h Container tragen, wobei g und h teilerfremd sind, dass das Eisenbahnunternehmen mindestens $3g-3$ kurze Wagen anschaffen muss.

L 60.4 Da die Lösung einiger Zwischenschritte bedarf, vornweg kurz das Ergebnis: Die entstehende Kurve ist ein Quadrat mit Mittelpunkt M und Seitenlänge $\frac{128}{7}$ cm. Sein Umfang ist also $\frac{512}{7}$ cm $= 73\frac{1}{7}$ cm.



Nun zum Beweis: Wir zeigen zunächst folgende Hilfsaussage: Für jede Stellung des Malwerkzeuges gilt

$$|MR| \cdot |MG| = a^2 - b^2\,,$$

wobei b allgemein für die Länge der kurzen und a für die Länge der langen Stäbe steht. Das Produkt $|MR|\cdot|MG|$ ist also insbesondere konstant. Zum Beweis dieser Aussage betrachten wir zusätzlich den Schnittpunkt N der Diagonalen in der durch die kurzen Stäbe bestimmten Raute. Dieser halbiert die Diagonalen. Mit dem Satz des Pythagoras folgt dann

$$a^2 = |NM|^2 + |NA|^2\,, \qquad b^2 = |NR|^2 + |NA|^2$$

und somit auch

$$a^2 - b^2 = |NM|^2 - |NR|^2 = (|NM| + |NR|)\,(|NM| - |NR|) = |MG| \cdot |MR|\,.$$

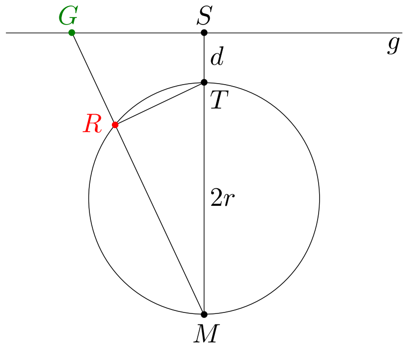
Damit ist die Hilfsaussage gezeigt.

Als Nächstes zeigen wir, dass der grüne Stift G beim Abtasten eines durch M verlaufenden Kreises mit der Tastspitze R eine Gerade g zeichnet.
Sei dazu k ein Kreis mit Radius r und g eine Gerade, die den Abstand $d = \frac{a^2-b^2-4r^2}{2r}$ vom Kreis hat. Wir nehmen $a^2 - b^2 - 4r^2 \geq 0$ an, was in unserem Beispiel $a = 10\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$ und $2r = 7\,\text{cm}$ sicher der Fall ist. Sei M der Punkt des Kreises, der von g den größten Abstand hat, sowie T der Punkt des Kreises, der von g den kleinsten Abstand, also den Abstand d hat. Dann gilt für jeden Punkt G auf g und den Schnittpunkt R von MG mit dem Kreis:
Die beiden rechtwinkligen Dreiecke MSG und MRT (Satz des Thales!) sind ähnlich, und daher ist

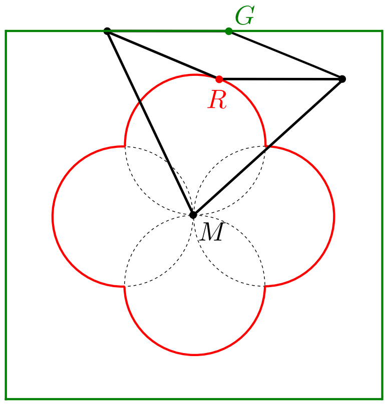
$$\frac{|MR|}{2r} = \frac{2r+d}{|MG|}\,.$$

Das ist aber äquivalent zu

$$|MR| \cdot |MG| = 2r(2r+d) = 2r\left(2r + \frac{a^2-b^2-4r^2}{2r}\right) = a^2 - b^2\,.$$



Entsprechend der oben gezeigten Hilfsaussage heißt das aber, dass der bei M fixierte Apparat, dessen Tastspitze bei R ist, den Punkt G zeichnet (denn offenbar gibt es auf dem Strahl MR nur genau einen Punkt G, der die Gleichung $|MR| \cdot |MG| = a^2 - b^2$ erfüllt).



Also wird beim Abfahren des Kreises tatsächlich die Gerade g gezeichnet.
Nun ist der Rest nicht mehr schwer: Die beiden Hilfsaussagen zeigen, dass der grüne Stift beim Abfahren der vier roten Kreisabschnitte mit der Tastspitze vier Strecken zeichnet, aufgrund der Symmetrie der Figur bilden diese sogar die Seiten eines Quadrates – das ist die gesuchte Kurve!
Da in unserem Fall $2r = 7\,\text{cm}$, $a = 10\,\text{cm}$ und $b = 6\,\text{cm}$ ist, gilt für den Abstand d der Quadratseite von den kleinen roten Kreisen:

$$d = \frac{a^2 - b^2 - 4r^2}{2r} = \frac{100 - 36 - 49}{7}\,\text{cm} = \frac{15}{7}\,\text{cm}\,.$$

Daher hat das grüne Quadrat den Umfang $4(4r + 2d) = \frac{512}{7}\,\text{cm}$. Das ist gleichzeitig die gesuchte Länge der entstehenden Kurve.

Bemerkung: Das Malwerkzeug ist auch als *Inversor von Peaucellier* bekannt; mit ihm kann man, wie eben gezeigt, die *Inversion an einem Kreis* praktisch durchführen. Mit Inversion am Kreis, oder auch *Kreisspiegelung*, bezeichnet man dabei die Abbildung, die für einen gegebenen Kreis mit Mittelpunkt M und Radius ρ einem beliebigen Punkt $R \neq M$ denjenigen Punkt G auf dem Strahl MR zuordnet, für den $|MG| \cdot |MR| = \rho^2$ gilt – dies ist also genau die Eigenschaft, die wir oben nachgewiesen haben.

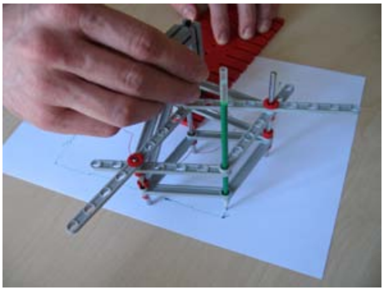
Der Inversionskreis hat in unserem Fall den Radius

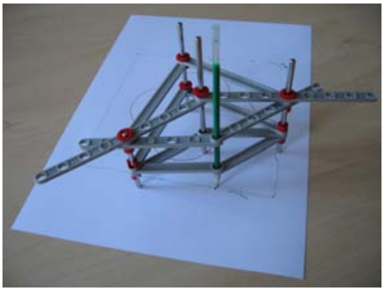
$$\rho = \sqrt{a^2 - b^2} = 8\,\mathrm{cm}\,.$$

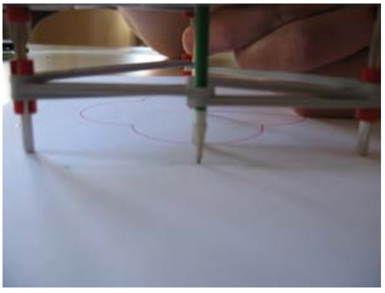
Wir haben also gewissermaßen folgende Eigenschaft der Inversion am Kreis bewiesen:

> *Bei der Inversion an einem Kreis mit Mittelpunkt M werden Kreise, die durch M gehen, auf Geraden abgebildet.*

Zweite Bemerkung: Wir haben es uns natürlich nicht nehmen lassen, den Apparat selbst nachzubauen. Einige Impressionen unseres Experiments sieht man in folgenden Bildern.







Lösungen zu Aufgabenblatt 61

L 61.1 Zunächst überlegen wir uns die Anzahl der möglichen Pyramiden: Die schwerste und die zweitschwerste Person müssen stets in der unteren Reihe knien, da jede Person aus einer der beiden oberen Reihen von mindestens zwei schwereren Personen gehalten werden muss.

Befindet sich zusätzlich die drittschwerste Person in der unteren Reihe, so ergeben sich für diese Reihe drei Anordnungsmöglichkeiten, wenn wir zunächst nur die Positionen „Mitte“ und „Außen“ unterscheiden (die übrigen Möglichkeiten erhalten wir durch Spiegelung): jede der drei Personen kann sich in der Mitte befinden.
Da die leichteste Person immer an der Spitze der Pyramide stehen muss, teilen sich die viert- und fünftschwerste Person die mittlere Reihe. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten. (Diese gehen nicht durch Spiegelung ineinander über, da die jeweils darunter knienden Personen verschieden sind.)
Im Fall, dass sich die drittschwerste Person unten befindet, erhalten wir also $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten.

Wenn dies nicht der Fall ist, muss die viertschwerste Person einspringen, da es keine zwei Personen gibt, die leichter sind als die fünftschwerste Person. Die viertschwerste Person muss dann außen sein, da sie sonst die drittschwerste halten müsste. Es bleiben die beiden Möglichkeiten, dass die schwerste oder die zweitschwerste Person in der Mitte ist. Die mittlere Reihe ist damit eindeutig festgelegt, weil die drittschwerste auf den beiden schwersten Personen knien muss.

Wenn wir nun noch die gespiegelten Pyramiden mitberücksichtigen, erhalten wir insgesamt $(6 + 2) \cdot 2 = 16$ Möglichkeiten.




Nun ordnen wir das Zirkelteam nach Gewicht:
Da alle Personen außer Alex und Robert in einer der beiden oberen Reihen auftauchen, müssen diese beiden am schwersten sein. Mit dem Hinweis aus der Aufgabenstellung ist also Robert der Schwerste und Alex der Zweitschwerste. Außer diesen beiden können nur noch die dritt- und viertschwerste Person in der unteren Reihe vorkommen. Da Marco auf dem rechten Bild von Karsten gehalten wird, ist Karsten der Drittschwerste und Marco der Viertschwerste. Die leichteste Person ist Kristin an der Spitze; also ist Ulrike die Fünftschwerste in unserem Team.

L 61.2 Zunächst stellen wir fest, dass die Turmhöhe nur davon abhängt, wie viele, nicht aber welche Ziegelsteine so verbaut sind, dass sie die Höhe 1, 2 bzw. $\sqrt{2}$ haben. O. B. d. A. können wir also annehmen, dass die untersten l

Ziegelsteine die Höhe 1 haben, die darauf gestapelten m die Höhe 2 und die obersten n die Höhe $\sqrt{2}$.
Weiterhin liefern verschiedene Tupel (l, m, n), die zudem die Nebenbedingung $l + m + n = 100$ erfüllen, verschiedene Höhenwerte.
Begründung: Es ist $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl (das heißt: $k\cdot\sqrt{2}$ ist für natürliches k nie eine natürliche Zahl) und somit haben Türme mit verschiedenen Anzahlen von Ziegeln der Höhe $\sqrt{2}$ niemals die gleiche Gesamthöhe. Bei festem n und konstanter Summe $l + m + n$ liefern verschiedene Tripel ebenfalls verschiedene Gesamthöhen. Also ergibt sich die Anzahl der möglichen Turmhöhen als die Anzahl der Tripel (l, m, n) mit $l + m + n = 100$.

Für festes l kann m Werte zwischen 0 und $100-l$ annehmen (d. h. es gibt $101-l$ mögliche Werte für m) und es gilt $n = 100 - l - m$. Da auch l Werte zwischen 0 und 100 annehmen kann, gibt es insgesamt $\sum_{l=0}^{100}(101 - l) = \sum_{l'=1}^{101} l' = \frac{101\cdot 102}{2} = 5151$ verschiedene Turmhöhen.

Alternative Lösung mit Binomialkoeffizienten:
Wir denken uns zwei weitere Ziegelsteine mit winzig kleiner Höhe (z. B. in Form eines Blatt Papiers). Diese stellen wir uns als trennende Elemente zwischen den Steinen der Höhe 1 und denen der Höhe 2 bzw. zwischen den Steinen der Höhe 2 und denen der Höhe $\sqrt{2}$ vor. Durch das Platzieren dieser trennenden Bausteine auf zweien der nun insgesamt 102 zur Verfügung stehenden Positionen wird eindeutig ein Tripel (l, m, n) mit $l + m + n = 100$ bestimmt. Dafür gibt es bekanntlich $\binom{102}{2} = \frac{102!}{2!\cdot 100!} = \frac{102\cdot 101}{2} = 5151$ Möglichkeiten.

$\boxed{\textbf{L 61.3}}$ Es seien $a_\triangle$ und $a_\square$ die Seitenlängen von Dreieck und Quadrat und r der Radius des Kreises.
Nach Aufgabenstellung gilt:

$$3 \cdot a_\triangle = a_\square^2 \,, \tag{61.1}$$

$$4 \cdot a_\square = \pi r^2 \qquad \text{und} \tag{61.2}$$

$$2\pi \cdot r = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a_\triangle^2 \,. \tag{61.3}$$

Setzt man (61.1) in (61.3) ein, erhält man:

$$2\pi \cdot r = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a_\square^4}{9} \,;$$

setzt man darin noch (61.2) ein, führt dies zur Gleichung

$$2\pi \cdot r = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\pi^4 r^8}{256 \cdot 9}$$

oder äquivalent (wir können von $r \neq 0$ ausgehen) zu

$$r^7 = \frac{2^{11} \cdot 9}{\pi^3 \cdot \sqrt{3}} .$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt[7]{\frac{2^{11} \cdot 9}{\pi^3 \cdot \sqrt{3}}} \approx 2{,}303\,\mathrm{cm}\,, \\
a_\square &= \frac{\pi}{4} r^2 = \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt[7]{\frac{2^{22} \cdot 81}{\pi^6 \cdot 3}} = \sqrt[7]{2^8 \cdot 27 \cdot \pi} \approx 4{,}164\,\mathrm{cm}\,, \\
a_\triangle &= \frac{1}{3} a_\square^2 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[7]{2^{16} \cdot 3^6 \cdot \pi^2} = \sqrt[7]{\frac{2^{16} \cdot \pi^2}{3}} \approx 5{,}780\,\mathrm{cm}\,.
\end{aligned}$$

Zur Probe rechnen wir noch eine Stufe weiter: Es soll

$$r = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a_\triangle^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt[7]{\frac{2^{32} \cdot \pi^4}{9}} = \sqrt[7]{\frac{2^{11} \cdot 3\sqrt{3}}{\pi^3}}$$

sein, und dies ist richtig.

L 61.4 Für $y \neq -4$ setzen wir $x = 2007$ in die Definition von $\odot$ ein und erhalten:

$$2007 \odot y = \frac{2007 \cdot y + 8028}{2007 + y - 2003} = \frac{2007 \cdot (y+4)}{y+4} = 2007\,. \tag{61.4}$$

Für $x \geq 2003$ und $y > 0$ gilt $x + y - 2003 \neq 0$ und $x \odot y > 0$. Daher tritt in den Berechnungen zu

$$2008 \odot (\ldots (999\,998 \odot (999\,999 \odot 1\,000\,000))) \tag{61.5}$$

niemals der Nenner 0 auf und das Ergebnis ist positiv. Unabhängig davon, welchen Wert (61.5) annimmt, ergibt sich mit der Formel (61.4) somit

$$2007 \odot (2008 \odot (\ldots (999\,998 \odot (999\,999 \odot 1\,000\,000)))) = 2007\,.$$

Da genau wie in (61.4) für $x \neq -4$ auch $x \odot 2007 = 2007$ gilt, folgt weiter:

$$\begin{aligned}
&1 \odot (2 \odot (3 \odot (\ldots (999\,998 \odot (999\,999 \odot 1\,000\,000))))) \\
&\quad = 1 \odot (2 \odot (3 \odot (\ldots (2005 \odot (2006 \odot (2007)))))) \\
&\quad = 1 \odot (2 \odot (3 \odot (\ldots (2005 \odot (2007))))) \\
&\quad = \ldots = 1 \odot 2007 \\
&\quad = 2007\,.
\end{aligned}$$

Lösungen zu Aufgabenblatt 62

L 62.1 Wir betrachten zunächst den vierten Takt. Da dieser aus zwei Kreisen besteht, hat $\bigcirc$ die Länge eines halben Taktes. Im Folgenden verwenden wir die Notensymbole für ihre Längen sowie TE als Bezeichnung für „Takteinheit“. Dann gilt für die Takte 1 und 2:

$$\frac{3}{2}\star + \circledcirc + 2\star = \frac{7}{2}\star + \circledcirc = 1 \text{ TE} \tag{62.1}$$

$$\text{sowie } \star + 2\circledcirc = \frac{1}{2} \text{ TE} \tag{62.2}$$

$$\text{Aus (62.1) folgt: } \circledcirc = 1 \text{ TE} - \frac{7}{2}\star \tag{62.3}$$

Einsetzen in (62.2) liefert: $\star + 2 \cdot (1 \text{ TE} - \frac{7}{2}\star) = \frac{1}{2}$ TE, also $\star = \frac{1}{4}$ TE. Mit (62.3) erhält man schließlich: $\circledcirc = \frac{1}{8}$ TE. Wegen 1 TE = 2 s ergeben sich

$$\bigcirc = 1\,\text{s}\,, \quad \star = \frac{1}{2}\,\text{s} \quad \text{sowie} \quad \circledcirc = \frac{1}{4}\,\text{s}$$

als Längen der einzelnen Notensymbole.

Das gesuchte Stück ist „Alle Vögel sind schon da“ von Hoffmann von Fallersleben, der auch den Text zum Deutschlandlied verfasste.

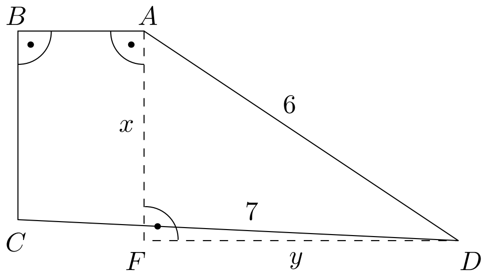
L 62.2 Da der Abstand vom ersten bis zum fünften Ton genau eine Sechstelsekunde beträgt und die Töne in gleichen Zeitabständen zu hören sind, beträgt der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Tönen genau $\frac{\frac{1}{6}}{4} = \frac{1}{24}$ Sekunde.
Sollte ein Auto zwei aufeinanderfolgende Töne verursachen, so muss es die 2,5 Meter, die der Achsabstand beträgt, in $\frac{1}{24}$ Sekunde zurücklegen; das entspricht einer Geschwindigkeit von $\frac{2{,}5}{\frac{1}{24}}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 60\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 216\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Da sich alle Autos an die Geschwindigkeitsbeschränkung von $130\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ gehalten haben, kann keines der drei Autos zwei aufeinanderfolgende Töne verursacht haben.
Dass der vierte Ton stärker war als die anderen, bedeutet, dass zwei Achsen gleichzeitig über die Fuge gerollt sind. Diese Achsen können keine Vorderachsen gewesen sein, da sonst die zugehörige Hinterachse den fünften Ton hätte erzeugen müssen, was wir gerade ausgeschlossen haben. Also wurde der „Doppelton“

von zwei Hinterachsen erzeugt und die zugehörigen Vorderachsen müssen den ersten (Auto 1) und den zweiten Ton (Auto 2) erzeugt haben.
Da es außer dem vierten Ton keine weiteren „Doppeltöne“ gab, müssen der dritte und der fünfte Ton vom verbleibenden Auto (Auto 3) verursacht worden sein.
Als Geschwindigkeiten ergeben sich

$$\begin{aligned}
&\text{für Auto 1:} \qquad v_1 = \frac{2{,}5}{\frac{3}{24}}\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 20\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 72\,\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\,,\\
&\text{für Auto 2:} \qquad v_2 = \frac{2{,}5}{\frac{2}{24}}\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 30\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 108\,\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\,,\\
&\text{für Auto 3:} \qquad v_3 = \frac{2{,}5}{\frac{2}{24}}\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 30\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 108\,\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\,.
\end{aligned}$$

Auto 1 hat den ersten Ton verursacht und ist das langsamste gewesen. Wir gehen davon aus, dass kein Auto rechts überholt hat; also muss das Auto auf der rechten Spur den ersten Ton verursacht haben.

L 62.3 Da $ABCD$ einen Inkreis hat, ist es ein Tangentenviereck, sodass gilt: $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$. Folglich ist $|DA| = 6\,\mathrm{cm}$.
Durch den rechten Winkel bei B ist das Viereck damit eindeutig bestimmt, denn es muss nach Voraussetzung konvex sein, weil sonst nicht alle Seiten den Kreis berühren können.



Um die genaue Lage von D zu beschreiben, definieren wir einen Hilfspunkt F so, dass AF parallel zu BC und FD parallel zu AB ist. Sei $x := |AF|$ und $y := |FD|$. Es gilt:

$$x^2 + y^2 = 6^2\,. \tag{62.4}$$

Außerdem gilt, die Seite CD betrachtend:

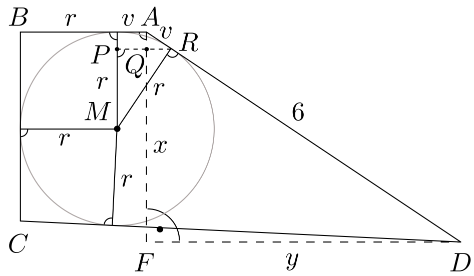
$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 7^2\,.$$

Subtraktion dieser beiden Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} & 6x - 9 - 4y - 4 = -13 \\ \Leftrightarrow \qquad & y = \frac{3}{2}x\,, \end{aligned}$$

aus (62.4) folgt dann $\frac{13}{4}x^2 = 36$, also (x muss positiv sein) $x = \frac{12}{\sqrt{13}}$ und $y = \frac{18}{\sqrt{13}}$.

Nun können wir uns dem Inkreis zuwenden, wobei die weiteren Bezeichnungen aus der zweiten Skizze ersichtlich werden:



Zum einen gilt

$$r + v = 2\,.$$

Wegen der rechten Winkel sind die Dreiecke RPM und AQR dem Dreieck AFD ähnlich, daher gilt zum anderen:

$$v \cdot \frac{x}{6} + r \cdot \frac{y}{6} = |AQ| + |PM| = r\,.$$

Einsetzen von $r + v = 2$ liefert

$$\begin{aligned} & (2 - r) \cdot \frac{x}{6} + r \cdot \frac{y}{6} = r \\ \Leftrightarrow \qquad & r = \frac{2 \cdot \frac{x}{6}}{1 + \frac{x}{6} - \frac{y}{6}} = \frac{\frac{4}{\sqrt{13}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{13}} - \frac{3}{\sqrt{13}}} = \frac{4}{\sqrt{13} - 1} \approx 1{,}535\,. \end{aligned}$$

Somit beträgt der Radius des Kreises ungefähr 1,535 cm.

$\boxed{\textbf{L 62.4}}$ Zum (eleganten) Beweis dieser Aufgabe denken wir uns ein Feld aus m Zeilen mit je n Kästchen. Und dann betrachten wir das Ganze als Statistik-Aufgabe – auf diese Idee kann man durch die Beziehung $a + b = 1$ gestoßen

werden –, indem jedes einzelne Feld unabhängig von den anderen mit der Wahrscheinlichkeit a schwarz und ansonsten, also mit Wahrscheinlichkeit $1 - a = b$ weiß gefärbt wird.
Für eine fest gewählte Spalte ist dann $1 - a^m$ die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser Spalte nicht nur schwarze Kästchen sind. Folglich ist $(1 - a^m)^n$ die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit folgender Aussage:

In keiner Spalte gibt es nur schwarze Kästchen. (62.5)

Analog ist $(1 - b^n)^m$ die Wahrscheinlichkeit für die Aussage:

In keiner Zeile gibt es nur weiße Kästchen. (62.6)

Wenn (62.5) nicht gilt, heißt das, dass es eine Spalte gibt, die nur schwarze Kästchen hat. Da jede Spalte über alle Zeilen geht, hat dann jede Zeile mindestens ein schwarzes Kästchen, also gilt dann (62.6). Daraus folgt, dass die Wahrscheinlichkeit von (62.6) größer gleich der Wahrscheinlichkeit ist, dass (62.5) nicht gilt, also ist

$$(1 - b^n)^m \geq 1 - (1 - a^m)^n$$

oder äquivalent

$$(1 - a^m)^n + (1 - b^n)^m \geq 1\,.$$

Die gestellte Frage ist also zu verneinen.

Gleichheit gilt übrigens genau dann, wenn (62.5) und (62.6) nicht gleichzeitig wahr sein können. Wenn für $m = 1$ die Aussage (62.6) wahr ist, gibt es in der (einzigen) Zeile mindestens ein schwarzes Kästchen. Da dies das einzige Kästchen in seiner Spalte ist, ist dann (62.5) nicht wahr. Für $m = 1$ gilt daher Gleichheit, analog auch für $n = 1$. (Das kann man natürlich auch direkt ausrechnen: Für $m = 1$ formt sich die linke Seite um zu: $(1 - a^m)^n + (1 - b^n)^m = (1 - a)^n + (1 - b^n) = b^n + 1 - b^n = 1$.)
Wenn $m, n \geq 2$ gilt, können hingegen (62.5) und (62.6) gleichzeitig wahr sein: Zum Beispiel kann man das Feld schachbrettartig färben. Daher gilt in diesem Fall echte Ungleichheit.

Lösungen zu Aufgabenblatt 63

L 63.1 Wir bestimmen die Arbeit (hier in Metern gemessen), die ein Zwerg in einer Stunde verrichtet:

$$\frac{7\,\mathrm{m}}{7\,\text{Zwerge} \cdot 7\,\text{Arbeitstage} \cdot 7\,\frac{\mathrm{h}}{\text{Arbeitstag}}} = \frac{1}{49}\,\frac{\mathrm{m}}{\text{Zwerg} \cdot \mathrm{h}}\,.$$

Somit schaffen sechs Zwerge in sechs Tagen, an denen sie je sechs Stunden arbeiten,

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{1}{49} = \frac{216}{49} = 4\tfrac{20}{49} \approx 4{,}41 \text{ Meter}\,.$$

L 63.2 Durch Erweitern des Terms $\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ nach der dritten binomischen Formel erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} &= \frac{6\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}\\ &= \frac{6\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5} = \frac{6\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2\sqrt{6}}\\ &= \sqrt{3}\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}) = 3+\sqrt{6}+\sqrt{15}\,.\end{aligned}$$

Es soll also gelten:

$$a+\sqrt{b}+\sqrt{c} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} = 3+\sqrt{6}+\sqrt{15}\,.$$

Nun kann man direkt ablesen, dass eine Lösung der Gleichung durch $a = 3$, $b = 6$ und $c = 15$ gegeben ist. Natürlich gibt es auch noch die Möglichkeit $a = 3$, $b = 15$ und $c = 6$ (aber keine weiteren, wie man mit einigem Aufwand zeigen kann).

L 63.3 Sei p die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Spiel mit einem Gleichstand endet. Wir stellen uns vor, die drei werfen ihre Münzen immer zur gleichen Zeit. Ein solcher gemeinsamer Wurf hat dann genau $2^3 = 8$ mögliche Ergebnisse. In genau dreien davon, nämlich dann, wenn genau einer der drei „Zahl“ wirft, endet das Spiel. In genau einem Fall, nämlich wenn alle drei

„Kopf" werfen, kommt es zum nächsten gemeinsamen Wurf, und die Wahrscheinlichkeit, dass das Spiel im weiteren Verlauf zum Gleichstand führt, ist wieder p, da die folgenden Würfe unabhängig vom Vorherigen sind. In den restlichen vier Fällen herrscht zwischen mindestens zwei Spielern Gleichstand und das gesamte Spiel wird wiederholt.
Es ist also $p = \frac{4}{8} + \frac{1}{8}p$. Löst man dies nach der gesuchten Wahrscheinlichkeit p auf, so folgt $p = \frac{4}{7}$.

Variante – Da man mit seinen ersten Überlegungen wahrscheinlich nicht gleich eine so elegante Lösung wie die eben vorgeführte findet, sei die Aufgabe hier auch noch mehr „zu Fuß" vorgerechnet:
Im Folgenden nennen wir die Anzahl von getätigten Würfen einer Person, also die Nummer des Wurfes, bei dem erstmals „Zahl" fällt, „Wurfzahl".

Zunächst bemerken wir, dass das Spiel genau dann wiederholt wird, wenn entweder zwischen zwei Musketieren Gleichstand herrscht und der dritte eine höhere Wurfzahl als die anderen beiden hat oder wenn zwischen allen dreien Gleichstand herrscht. Nun definieren wir folgende Ereignisse:

A: Es herrscht Gleichstand zwischen Athos und Porthos, und Aramis hat eine höhere Wurfzahl als die anderen beiden.

B: Es herrscht Gleichstand zwischen Athos und Aramis, und Porthos hat eine höhere Wurfzahl als die anderen beiden.

C: Es herrscht Gleichstand zwischen Porthos und Aramis, und Athos hat eine höhere Wurfzahl als die anderen beiden.

D: Es herrscht Gleichstand zwischen Athos, Porthos und Aramis.

Seien weiterhin $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ bzw. $P(D)$ die Wahrscheinlichkeiten, dass A, B, C bzw. D eintritt. Dann sind A, B, C und D einander ausschließende Ereignisse, die zusammen alle Fälle einer Spielwiederholung darstellen. Somit folgt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P_{ges} = P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$.

Wir betrachten nun das Ereignis A. Das Ereignis, dass ein Musketier n als Wurfzahl hat, also die Wurffolge $(n-1)$-mal Kopf und dann einmal Zahl, besitzt die Wahrscheinlichkeit $(\frac{1}{2})^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^n$. Da eine Wurfzahl größer als n genau dem Fallen von Kopf in jedem der ersten n Würfe entspricht, ist die Wahrscheinlichkeit hierfür ebenfalls $(\frac{1}{2})^n$.
Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sowohl Athos als auch Porthos n als Wurfzahl und Aramis eine Wurfzahl größer n hat, $(\frac{1}{2})^n \cdot (\frac{1}{2})^n \cdot (\frac{1}{2})^n =$

$(\frac{1}{2})^{3n} = (\frac{1}{8})^n$. Das Ereignis A bedeutet nun, dass dies für eine natürliche Zahl n eintritt. Somit ist

$$P(A) = \left(\frac{1}{8}\right)^1 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n\right) - 1$$
$$= \frac{1}{1-\frac{1}{8}} - 1 = \frac{8}{7} - 1 = \frac{1}{7}$$

(geometrische Reihe). Analog erhält man $P(B) = P(C) = \frac{1}{7}$.
Nun berechnen wir noch $P(D)$. Ähnlich wie oben beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sowohl Athos als auch Porthos als auch Aramis die Wurfzahl n haben, $(\frac{1}{2})^n \cdot (\frac{1}{2})^n \cdot (\frac{1}{2})^n = (\frac{1}{2})^{3n} = (\frac{1}{8})^n$. Damit folgt wie oben $P(D) = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{8})^n = \frac{1}{7}$. Als Gesamtergebnis ergibt sich somit

$$P_{ges} = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{4}{7}\,.$$

Bemerkung: In dieser zweiten Lösung wird die Formel für die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ (mit $x = \frac{1}{8}$) benutzt. Indirekt steckt diese Formel auch in der ersten Variante in $p = \frac{4}{8} + \frac{1}{8}p$. Ersichtlich wird dies, wenn man auf der rechten Seite für p wieder $p = \frac{4}{8} + \frac{1}{8}p$ einsetzt und rekursiv so fortfährt:

$$p = \tfrac{4}{8} + \tfrac{1}{8}(\tfrac{4}{8} + \tfrac{1}{8}p) = \tfrac{4}{8} + \tfrac{1}{8}(\tfrac{4}{8} + \tfrac{1}{8}(\tfrac{4}{8} + \tfrac{1}{8}(\ldots))) = 4((\tfrac{1}{8})^1 + (\tfrac{1}{8})^2 + (\tfrac{1}{8})^3 + \ldots).$$

L 63.4 Seien die Zahlen irgendwie zufällig verteilt. Dann gibt es unter den 50 Zahlen in den oberen fünf Zeilen des Brettes entweder höchstens 25 gerade oder höchstens 25 ungerade Zahlen (oder beides). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir den ersten Fall; der zweite verläuft analog.
Es gibt also in der oberen Bretthälfte $g \leq 25$ gerade Zahlen und entsprechend dann natürlich in der unteren Bretthälfte genau g ungerade Zahlen. Man kann daher durch paarweises Tauschen der geraden Zahlen in der oberen mit den ungeraden Zahlen in der unteren Hälfte in genau g Zügen erreichen, dass in den oberen fünf Zeilen nur ungerade und in den unteren fünf Zeilen nur gerade Zahlen stehen.
Nun betrachten wir die 20 Zahlen in den Zeilen 5 und 6. Sollte unter diesen die Zahl 1 sein, so nehmen wir diese aus der folgenden Betrachtung heraus. Es bleiben aber in jedem Fall noch mindestens 19 von 1 verschiedene Zahlen in den Zeilen 5 und 6.

Verteilt man diese Zahlen nun auf die drei Mengen

$$\begin{aligned}
M_{0,0} = \{&\text{Zahlen in Zeile 5, die bei Division durch 3 den Rest 0 lassen,}\\
&\text{und Zahlen in Zeile 6, die bei Division durch 3 den Rest 0 lassen}\}\,,\\
M_{1,2} = \{&\text{Zahlen in Zeile 5, die bei Division durch 3 den Rest 1 lassen,}\\
&\text{und Zahlen in Zeile 6, die bei Division durch 3 den Rest 2 lassen}\}\,,\\
M_{2,1} = \{&\text{Zahlen in Zeile 5, die bei Division durch 3 den Rest 2 lassen,}\\
&\text{und Zahlen in Zeile 6, die bei Division durch 3 den Rest 1 lassen}\}\,,
\end{aligned}$$

so wird zum einen offenbar jede der mindestens 19 Zahlen genau einmal verteilt, zum anderen enthält eine der Mengen nach dem Schubfachprinzip dann mindestens 7 Zahlen. Sei dies die Menge $M_{i,j}$.
Da es sowohl unter den 50 ungeraden Zahlen in der oberen Hälfte des Brettes als auch unter den 50 geraden Zahlen in der unteren Hälfte des Brettes zu jedem der drei Divisionsreste bei Division durch 3 mehr als zehn Zahlen gibt, die eben jenen Rest bei Division durch 3 lassen, kann man nun – die gegebenenfalls vorhandene 1 wird wieder mit betrachtet – durch höchstens $20 - 7 = 13$ weitere Vertauschungen innerhalb der oberen und innerhalb der unteren Hälfte erreichen, dass alle Zahlen in Zeile 5 den Rest i und alle Zahlen in Zeile 6 den Rest j bei Division durch 3 lassen und zusätzlich keine dieser Zahlen gleich 1 ist.
Insgesamt hat man damit nicht mehr als $25 + 13 = 38$ Züge durchgeführt.
Die Summe zweier beliebiger (benachbarter) Zahlen in der oberen bzw. in der unteren Bretthälfte ist nun stets gerade und größer als $1 + 2 = 3$, also, da gerade, mindestens gleich 4 und damit keine Primzahl.
Die Summe zweier benachbarter Zahlen entlang der „Grenze“ beider Hälften lässt nun bei Division durch 3 stets den Rest $i + j$. Nach Konstruktion der obigen drei Mengen ist aber $i+j$ entweder gleich 0 oder 3; somit ist jede Summe benachbarter Zahlen entlang der Grenze durch 3 teilbar, und da keine dieser Zahlen gleich 1 ist, ist jede dieser Summen auch mindestens gleich $2 + 3 = 5$, also, da durch 3 teilbar, mindestens gleich 6 und damit keine Primzahl.

Damit haben wir das Gewünschte in höchstens 38 Zügen erreicht.

Lösungen zu Aufgabenblatt 64

L 64.1 Um all diese Vorgaben zu erfüllen, muss Käpt'n Jakob genau 11 neue Männer anheuern.

Sei x ein Palindrom mit einer geraden Anzahl von Stellen, d. h. x habe $2m$ Stellen (m ist eine natürliche Zahl) und die Form

$$x = a_1 a_2 \dots a_m a_m \dots a_2 a_1$$

mit den Ziffern $a_1, \dots, a_m \in \{0, 1, \dots, 9\}$.
Dann steht a_1 an der 1. und $2m$-ten, a_2 an der 2. und $(2m-1)$-ten, ... sowie a_m an der m-ten und $(m+1)$-ten Stelle von x. Also kommt jedes a_i $(i = 1, \dots, m)$ einmal an einer ungeraden und einmal an einer geraden Stelle vor. Bilden wir nun die alternierende Quersumme $AQ(x)$ von x, wird daher jedes a_i einmal addiert und einmal subtrahiert. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} AQ(x) &= a_1 - a_2 + a_3 - \dots \pm a_m \mp a_m \pm \dots - a_3 + a_2 - a_1 \\ &= (a_1 - a_1) - (a_2 - a_2) + (a_3 - a_3) - \dots \pm (a_m - a_m) = 0\,. \end{aligned}$$

Eine Teilungsregel besagt, dass eine Zahl genau dann durch 11 teilbar ist, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist. Da 0 durch 11 teilbar ist, ist also auch x durch 11 teilbar.

Fordert man schließlich wie in der Aufgabenstellung, dass x eine Primzahl sein soll, folgt somit $x = 11$ als einzige Lösung des Problems.

Beweis der Teilbarkeitsregel für 11*:*
Eine Zahl $11\dots1$, die aus einer geraden Anzahl Einsen besteht, ist durch 11 teilbar:

$$\underbrace{11\dots11}_{2k \text{ Einsen}} = 11 \cdot \underbrace{01\dots01}_{k\text{-mal ,01'}}\,. \tag{64.1}$$

Für reine Zehnerpotenzen mit einem geraden Exponenten $2k$ gilt

$$\begin{aligned} 10^{2k} &= 1\underbrace{0\dots0}_{2k \text{ Nullen}} = \underbrace{11\dots11}_{2k \text{ Einsen}}0 - \underbrace{11\dots11}_{2k \text{ Einsen}} + 1 \\ &= 11 \cdot 10t - 11 \cdot t + 1 = 11 \cdot (10-1)t + 1 = 11 \cdot q + 1 \end{aligned}$$

mit den natürlichen Zahlen $t = 01\ldots01$ wie in (64.1) und $q = 9t$. Für die Zehnerpotenzen mit ungeradem Exponenten $2k+1$ hingegen gilt

$$\begin{aligned}10^{2k+1} &= 1\underbrace{0\ldots0}_{2k+1} = \underbrace{11\ldots11}_{2k+2} - \underbrace{11\ldots11}_{2k}0 - 1\\ &= 11\cdot s - 11\cdot 10t - 1 = 11\cdot(s-10t) - 1 = 11\cdot q - 1\end{aligned}$$

mit den natürlichen Zahlen $s, t = 01\ldots01$ wie in (64.1) und $q = s - 10t > 0$.

Sei nun $y = b_n b_{n-1}\ldots b_2 b_1$ eine beliebige n-stellige Zahl, welche die Ziffern $b_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ hat. Die Ziffernschreibweise (im Dezimalsystem) bedeutet, dass

$$y = b_n \cdot 10^{n-1} + b_{n-1}\cdot 10^{n-2} + \ldots + b_2\cdot 10^1 + b_1\cdot 10^0$$

ist. Versehen wir die Zahlen q in den obigen Zerlegungen noch mit einem Index, etwa $10^{2k} = 11\cdot q_{2k} + 1$ und $10^{2k+1} = 11\cdot q_{2k+1} - 1$, so ergibt sich, wenn wir von rechts anfangen zu summieren:

$$\begin{aligned}y &= b_1 + (11q_1b_2 - b_2) + (11q_2b_3 + b_3) + \ldots + (11q_{n-1}b_n \pm b_n)\\ &= (b_1 - b_2 + b_3 - \ldots \pm b_n) + 11\cdot(q_1b_2 + q_2b_3 + \ldots + q_{n-1}b_n)\,.\end{aligned}$$

Da der letzte große Summand ein Vielfaches von 11 ist, ist die Zahl y genau dann durch 11 teilbar, wenn der erste Summand durch 11 teilbar ist.
Dieser erste Summand ist aber genau die alternierende Quersumme $AQ(y) = b_1 - b_2 + b_3 - \ldots \pm b_n$ von y, womit die Teilbarkeitsregel bewiesen ist.

L 64.2 Die beiden Lösungen der Gleichung $x^2 - 6x + 7 = 0$ sind $3+\sqrt{2}$ und $3-\sqrt{2}$. Sei a diejenige Lösung mit der Ziffer 8 an ihrer 2007. Nachkommastelle und b die andere.

Offensichtlich gilt $a + b = 6$. Außerdem sind a und b beide nicht negativ und haben als irrationale Zahlen unendlich viele von Null verschiedene Nachkommastellen.
Wir schreiben:

$$\begin{aligned}a &= a_0{,}a_1a_2\ldots\\ b &= b_0{,}b_1b_2\ldots\end{aligned}$$

mit den Ziffern $a_i, b_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Angenommen, es wäre $a_0 + b_0 \geq 6$, dann wäre $a + b > 6$, da a und b von Null verschiedene Nachkommastellen besitzen. Außerdem wäre $a + b < 6$ im Falle

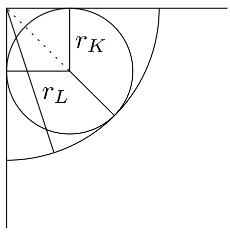
von $a_0 + b_0 < 5$, da nicht alle Nachkommastellen Neunen sind – zumindest ist $a_{2007} = 8$.
Es folgt $a_0 + b_0 = 5$ und somit $0{,}a_1a_2a_3 \ldots + 0{,}b_1b_2b_3 \ldots = 1$.

Als nächstes betrachten wir die erste Nachkommastelle. Wir nehmen an, es wäre $a_1 + b_1 \geq 10$. Dann wäre $0{,}a_1a_2a_3 \ldots + 0{,}b_1b_2b_3 \ldots > 1$, da es weitere von Null verschiedene Nachkommastellen gibt. Andererseits wäre aber $0{,}a_1a_2a_3 \ldots + 0{,}b_1b_2b_3 \ldots < 1$, falls $a_1 + b_1 < 9$ wäre. Es folgt, dass $a_1 + b_1 = 9$ ist, und somit muss $0{,}0a_2a_3 \ldots + 0{,}0b_2b_3 \ldots = 0{,}1$ gelten.

Induktiv kann man nun schließen, dass $a_i + b_i = 9$ für alle $i \geq 1$ gilt.

Mit $a_{2007} = 8$ folgt also: $b_{2007} = 9 - a_{2007} = 1$.

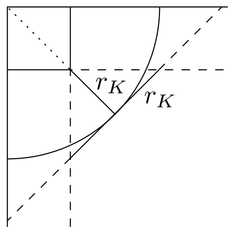
L 64.3 Wie gefordert berechnen wir zuerst die Größe der Löcher. Dazu hilft die folgende Skizze:



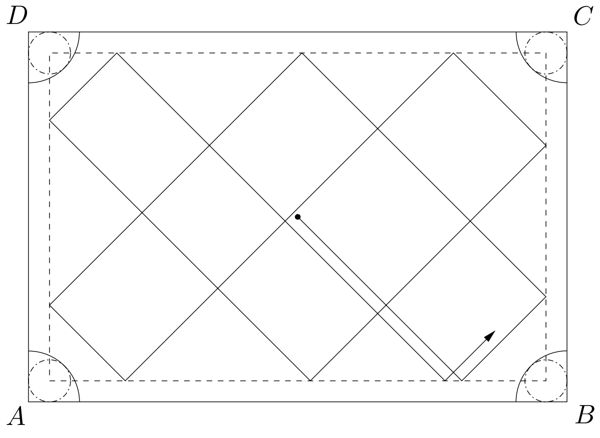
Aus Symmetriegründen berührt die Kugel, wenn sie im Loch steckt, den Viertelkreisbogen des Loches genau auf der Winkelhalbierenden. Daher ist der Radius r_L des Loches die Summe des Radius der Kugel $r_K = 5\,\text{cm}$ und des Abstandes des Kugelmittelpunktes von der Ecke. Dieser Abstand ist $\sqrt{2} \cdot 5\,\text{cm}$, also ist $r_L = 5(1 + \sqrt{2})\,\text{cm} \approx 12{,}071\,\text{cm}$.

Die Kugel läuft auf ihrer Bahn natürlich genau so lange, bis sie die Bande berührt. Da sie einen Radius von 5 cm hat, ist ihr Mittelpunkt von der Bande dann noch 5 cm entfernt. Man kann sich die Bahn der Kugel also so vorstellen, dass der Mittelpunkt immer an den Rändern eines Rechtecks zurückgeworfen wird, dessen Kantenlängen in beiden Richtungen um $2 \cdot 5\,\text{cm}$ kürzer sind als die Längen des Billardtisches. Dieses Rechteck sei *effektives Rechteck* genannt.
Die Kugel fällt ins Loch, wenn ihr Auflagepunkt über den Lochviertelkreis kommt. Dazu betrachten wir die Tangente an diesen Viertelkreis im 45°-Winkel. Sie trifft auf das effektive Rechteck in einer Entfernung von $\sqrt{r_K^2 + r_K^2} = \sqrt{2} \cdot r_K \approx 7{,}071\,\text{cm}$ von dessen Ecke. Die Kugel kann den Rand offenbar nur auf Punkten erreichen, deren Koordinaten beide ganzzahlig sind, also fällt die

Kugel genau dann in ein Loch, wenn ihr Mittelpunkt maximal 7 cm entfernt von der Ecke an den Rand des effektiven Rechtecks stößt.

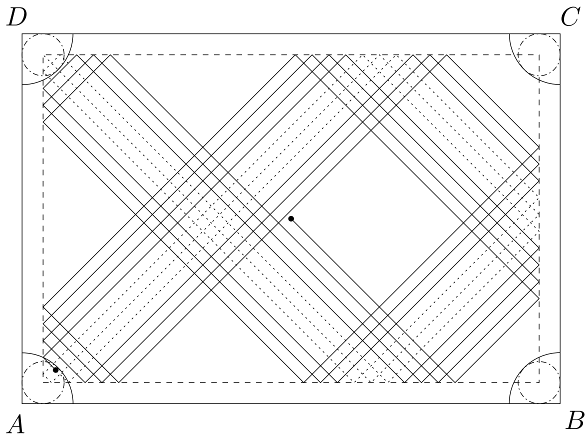


Jetzt können wir uns die genaue Bahn der Kugel ansehen, wobei wir nur im effektiven Rechteck rechnen, was ja nun eine Größe von 118 mal 78 Zentimetern hat.



Den Nullpunkt legen wir nach links unten: Die Kugel startet dann beim Punkt $(59, 39)$ und rollt zuerst nach rechts unten. Daher trifft sie beim Punkt $(98, 0)$ auf die untere Bande, dann bei $(118, 20)$ auf die rechte, bei $(60, 78)$ auf die obere, bei $(0, 18)$ auf die linke, bei $(18, 0)$ wieder auf die untere Bande und weiter über die Bandenpunkte $(96, 78)$, $(118, 56)$, $(62, 0)$, $(0, 62)$, $(16, 78)$ zum Punkt $(94, 0)$ auf der unteren Bande. Bislang war kein Punkt nahe genug an einer Ecke dran. Der letzte Punkt ist genau 4 cm von dem ersten Berührpunkt entfernt und die Kugel rollt in dieselbe Richtung. Daher verschieben sich die anderen Berührpunkte auch um jeweils 4 cm.
Beim Weiterzeichnen weiß man also schon, dass sich immer nur eine Koordinate gegenüber einer bereits bekannten um 4 verändert. Außerdem könnte man sich weiter überlegen, wo sich die Kugel im Laufe der weiteren Bahn einem Loch

annähert und wo nicht und so zum Ergebnis kommen. Der Einfachheit halber listen wir hier weiter die Berührpunkte auf, bis ein Loch erreicht wird: $(94, 0)$, $(118, 24)$, $(64, 78)$, $(0, 14)$, $(14, 0)$, $(92, 78)$, $(118, 52)$, $(66, 0)$, $(0, 66)$, $(12, 78)$, $(90, 0)$ (wieder ist ein Rundgang vollendet), $(118, 28)$, $(68, 78)$, $(0, 10)$, $(10, 0)$, $(88, 78)$, $(118, 48)$, $(70, 0)$, $(0, 70)$, $(8, 78)$, $(86, 0)$ (noch ein Rundgang ohne Loch ...), $(118, 32)$, $(72, 78)$, $(0, 6)$. Dieser Berührpunkt ist dicht genug am Loch dran, so dass die Kugel in Loch A fällt. (Man kann leicht nachrechnen, dass die Kugel wirklich auch noch die Bande berührt, denn der Viertelkreis schneidet die Seiten des effektiven Rechtecks des Kugelmittelpunktes in einem Abstand von etwa 5,986 cm.)



In der Zeichnung ist gestrichelt auch noch der weitere Weg eingezeichnet, den die Kugel nehmen *würde*, wenn sie nur dann ins Loch fallen würde, wenn sie auf der Winkelhalbierenden ankommt. In diesem Fall würde sie ins Loch D fallen. Man kann die Aufgabe auch etwas anders zeichnerisch lösen, dies sei hier nur kurz skizziert: Das effektive Rechteck kann man immer wieder an seinen Seiten spiegeln, so dass der Weg der Kugel zu einer Geraden wird. Am besten macht man das so, dass auf Karopapier eine Kästchenbreite in Wirklichkeit 4 Zentimetern entspricht, dann kann man die Gerade sehr leicht einzeichnen. Nun muss man noch entsprechend auf die Lochbereiche in der Nähe der Geraden aufpassen – dabei muss man darauf achten, dass es keine Vollkreise um einen Punkt sind, sondern dass die Bereiche von vier Kreisbögen begrenzt werden, welche als Schnitt mit dem effektiven Rechteck entstehen. Man muss aber diese Bereiche nicht einzeichnen, es reicht, die Mittelpunkte der Lochbereiche zu markieren und – wie oben berechnet – zu schauen, ob die Gerade der Bahn der Kugel waagerecht oder senkrecht den Abstand von 7 oder weniger Zentimetern erreicht. Zum Schluss muss man noch, wenn man das nicht schon vorher getan hat, zurückrechnen, welchem Loch der gestreifte Punkt denn entspricht.

Etwas zahlentheoretisch kann man diese Betrachtungsweise auch umformulieren zu der Aufgabe: „Finde die kleinste positive ganze Zahl n mit der Eigenschaft, dass $59+n$ ein Vielfaches von 118 ist und dass $39+n$ zu einem Vielfachen von 78 eine Differenz von höchstens 7 hat.“ Dieses n führt dann zur Lösung.

L 64.4 Um uns die Vorstellung zu erleichtern, gehen wir davon aus, dass die Heidelbeeren erst nach dem Backen und nach dem Schneiden zufällig auf dem Kuchen verteilt werden, und zwar eine nach der anderen.
Dies dürfen wir tun, da das Schneiden der Stücke und das Verteilen der Beeren unabhängig voneinander geschehen.

Bei n Kuchenstücken gibt es für jede der beiden Beeren n verschiedene Möglichkeiten, auf welchem Stück sie landen können. Bei zwei Beeren macht das insgesamt n^2 Möglichkeiten, die im Fall von identischen Stückgrößen auch alle gleich wahrscheinlich sind.
Da in genau n der n^2 Fälle die beiden Beeren auf demselben Stück liegen, beträgt die Wahrscheinlichkeit p für dieses Ereignis gerade $p = n^2/n = 1/n$.

Im zweiten Fall – hier ist die Größe der Kuchenstücke zufällig – gehen wir ein wenig anders an das Problem heran:
Wir ersetzen in Gedanken die Heidelbeeren durch (rote) Linien, die vom Kuchenmittelpunkt aus durch die jeweilige Heidelbeere bis zum Rand des Kuchens verlaufen. Zusammen mit den n eigentlichen (schwarzen) Schnitten haben wir nun $n+2$ „Trennlinien“, die im Folgenden (gleichzeitig) zufällig auf dem Kuchen verteilt werden.
Nach dem Verteilen der Trennlinien nummerieren wir deren Positionen im Uhrzeigersinn, beginnend an der „12-Uhr-Position“.

Für dieses spezielle Winkelmuster gibt es nun $\frac{(n+2)(n+1)}{2} = \binom{n+2}{2}$ Möglichkeiten, wie sich die zwei roten Trennlinien auf die $n+2$ Positionen verteilen können. Dabei sind alle dieser Möglichkeiten gleichwahrscheinlich.
Bei genau $n+2$ dieser Möglichkeiten liegen die beiden roten Trennlinien nebeneinander, was äquivalent dazu ist, dass die beiden Heidelbeeren auf demselben Stück liegen.
Dies gilt für jedes mögliche Winkelmuster.

Das heißt: Die Wahrscheinlichkeit für das gesuchte Ereignis beträgt

$$\mathbb{P}(B) = \frac{n+2}{\frac{(n+2)(n+1)}{2}} = \frac{2}{n+1}\,.$$

Variante:
Man kann die Aufgabe auch mithilfe der Integralrechnung lösen. Dazu gehen wir wieder noch etwas anders an die Aufgabe heran:
Wir gehen wie in der Aufgabenstellung davon aus, dass der Kuchen erst geschnitten wird, nachdem die Heidelbeeren schon verteilt sind. Bevor wir jedoch den ersten Schnitt machen, malen wir in Gedanken zwei Strecken auf den Kuchen, die beide vom Mittelpunkt durch je eine Heidelbeere bis zum Rand des Kuchens verlaufen. Diese trennen den Kuchen also in zwei Kreissektoren mit den Winkeln α_1 und $\alpha_2 = 360° - \alpha_1$ auf.
Damit das Ereignis $B :=$ {„beide Beeren liegen auf demselben Stück"} eintritt, müssen alle n Schnitte, deren Position ja zufällig ist, entweder in dem einen oder in dem anderen der beiden gedachten Sektoren liegen.

Da ein einzelner Schnitt mit Wahrscheinlichkeit $\alpha_1/360°$ in den ersten und mit Wahrscheinlichkeit $\alpha_2/360°$ in den zweiten Sektor fällt, beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B für einen festen Winkel $\alpha_1 =: \alpha$

$$\mathbb{P}(B_\alpha) = \left(\frac{\alpha}{360}\right)^n + \left(1 - \frac{\alpha}{360}\right)^n .$$

Approximativ können wir $\mathbb{P}(B)$ nun berechnen, indem wir uns vorstellen, α würde nur ganzzahlige Winkel von 1° bis 360° annehmen, und zwar jeden davon mit derselben Wahrscheinlichkeit $p_\alpha = \frac{1}{360}$. Dann würden wir alle B_α, jeweils gewichtet mit der Wahrscheinlichkeit $p_\alpha = \frac{1}{360}$, aufsummieren und erhielten so die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{\alpha=1}^{360} \frac{1}{360}\mathbb{P}(B_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{360} \frac{1}{360}\left(\left(\frac{\alpha}{360}\right)^n + \left(1 - \frac{\alpha}{360}\right)^n\right) .$$

Da aber α nicht nur diese endlich vielen Werte annehmen muss, sondern jeden Wert aus dem Intervall $[0°, 360°]$ annehmen kann, müssen wir – um das exakte Ergebnis zu erhalten – über den Ausdruck, über den wir eben summiert haben, integrieren:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \int_0^{360} \frac{1}{360}\mathbb{P}(B_\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \int_0^{360} \frac{1}{360}\left(\left(\frac{\alpha}{360}\right)^n + \left(1 - \frac{\alpha}{360}\right)^n\right)\mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{1}{360}\left[\frac{360}{n+1}\left(\frac{\alpha}{360}\right)^{n+1}\right]_0^{360} + \frac{1}{360}\left[-\frac{360}{n+1}\left(1 - \frac{\alpha}{360}\right)^{n+1}\right]_0^{360} \\ &= \frac{1}{n+1} - \left(-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1} .\end{aligned}$$

Verallgemeinerung:
Der erste Lösungsansatz lässt sich bequem auf m zu verteilende Heidelbeeren verallgemeinern:
Es gibt $\binom{n+m}{m}$ Möglichkeiten, die m Heidelbeeren auf die $n+m$ Positionen zu verteilen; bei $n+m$ davon liegen alle Heidelbeeren auf demselben Stück.
Also beträgt die Wahrscheinlichkeit für ebendieses Ereignis

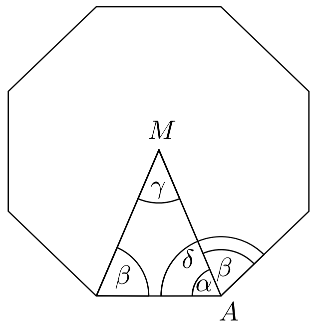
$$B' := \{\text{„alle } m \text{ Beeren liegen auf demselben Stück“}\}$$

genau

$$\mathbb{P}(B') = \frac{m!}{(n+m-1)(n+m-2)\cdot\ldots\cdot(n+1)}\,.$$

Lösungen zu Aufgabenblatt 65

L 65.1 Wir betrachten ein regelmäßiges n-Eck ($n \geq 3$):



Es bezeichne M seinen Mittelpunkt. Wie in der Grafik dargestellt, können wir über jeder Seite des n-Ecks ein gleichschenkliges Dreieck mit M als drittem Eckpunkt errichten. Der Winkel dieses Dreiecks in M ist jeweils γ. Wir erhalten:

$$n \cdot \gamma = 360° \Leftrightarrow \gamma = \frac{360°}{n} .$$

Für die Innenwinkel des n-Ecks folgt (Bezeichnungen siehe Skizze):

$$\delta = \alpha + \beta = 180° - \frac{360°}{n} = \left(1 - \frac{2}{n}\right) 180° .$$

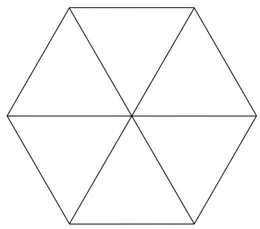
Insbesondere ist jeder Innenwinkel kleiner als 180°. Genauer erhält man folgende Innenwinkel für das regelmäßige n-Eck:

n	3	4	5	6	12	30
	60°	90°	108°	120°	150°	168°

Wir wollen nun das regelmäßige n-Eck in kleinere regelmäßige m-Ecke, jeweils mit Seitenlänge 1, zerlegen. Dabei beginnen wir in Punkt A. Wollen wir in diesem mehrere regelmäßige Vielecke so aneinanderlegen, dass sie sich zu einer Zerlegung des gesamten n-Ecks ergänzen lassen, müssen sich ihre Innenwinkel zu δ addieren.

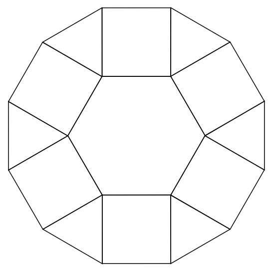
Da für $m \geq 3$ jeder Punkt eines regelmäßigen m-Ecks einen Innenwinkel von mindestens 60°, jeder Punkt eines n-Eck jedoch einen Innenwinkel von weniger als 180° hat, können wir in A maximal zwei Vielecke zusammenlegen (wobei wir bei nur einem Vieleck das n-Eck selbst erhalten).

Wir beginnen mit zwei regelmäßigen Dreiecken. In diesem Fall erhalten wir als $\delta = 60° + 60° = 120°$ den Innenwinkel eines Eckpunktes eines regelmäßigen Sechsecks.
Tatsächlich lässt sich das regelmäßige Sechseck in sechs regelmäßige Dreiecke zerlegen:

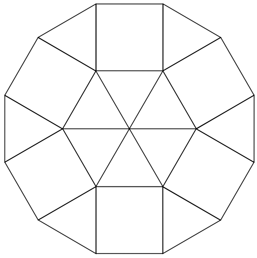


Nun versuchen wir es mit einem regelmäßigen Dreieck und einem regelmäßigen Viereck. In diesem Fall erhalten wir als $\delta = 60° + 90° = 150°$ den Innenwinkel eines Eckpunktes eines regelmäßigen Zwölfecks.

Wir setzen also auf jede Kante eines regelmäßigen Zwölfecks abwechselnd ein Drei- und ein Viereck. Nach innen hin schließt jeweils eine Kante eines Vierecks ab und wir erhalten ein Sechseck. An jedem Punkt dieses Sechsecks liegen außen zwei Vierecke und ein Dreieck an, wodurch wir als Innenwinkel jeweils $360° - 2 \cdot 90° - 60° = 120°$ erhalten. Das Sechseck ist also regelmäßig und hat die Seitenlänge 1 (denn jedes der verwendeten Vierecke hat die Seitenlänge 1). Es ergibt sich daher:



Natürlich lässt sich das innere regelmäßige Sechseck wiederum in sechs Dreiecke zerlegen. Man erhält dann eine Zerlegung in sechs Vier- und zwölf Dreiecke:



Als Nächstes testen wir das Zusammensetzen eines Dreiecks und eines Fünfecks. Es ergibt sich dann als Innenwinkel $\delta = 60° + 108° = 168°$. Dies ist der Innenwinkel eines Punktes eines regelmäßigen 30-Ecks. Setzen wir nun wie oben auf jede Kante eines regelmäßigen 30-Ecks abwechselnd ein regelmäßiges Dreieck und ein Fünfeck, so erhalten wir innen (wo jeweils zwei Kanten eines Fünfecks abschließen) ein (nicht konvexes) 30-Eck. An jedem zweiten Eckpunkt dieses 30-Ecks liegen ein Dreieck und zwei Fünfecke an und wir erhalten den Innenwinkel $360° - 2 \cdot 108° - 60° = 84°$. Dieser Winkel ist jedoch weder selbst Innenwinkel eines regelmäßigen n-Ecks noch ist er die Summe zweier solcher Innenwinkel. Demnach ist eine solche Zerlegung nicht möglich.

Auch lassen sich keine weiteren Zerlegungen realisieren, da sich sowohl beim Zusammensetzen zweier Vierecke als auch eines Drei- und eines Sechsecks ein Winkel von 180° ergibt. Alle Innenwinkel eines n-Ecks ($n \geq 3$) sind jedoch kleiner als 180°. Bei allen anderen Kombinationen würde der Innenwinkel noch größer werden.

Es lassen sich also nur das regelmäßige Sechs- und Zwölfeck in andere regelmäßige Vielecke gleicher Kantenlänge zerlegen.

L 65.2 Der Einfachheit halber benutzen wir im Folgenden das Symbol ⌂, das nichts anderes bedeuten soll als *„wohnt in derselben Stadt wie“*.
1 ⌂ 2 bedeutet also, dass Nr. 1 in derselben Stadt wohnt wie Nr. 2, und 2 ⌂̸ 3 steht dafür, dass Nr. 2 nicht in derselben Stadt wohnt wie Nr. 3.

Betrachten wir zunächst die Aussagen von Nr. 2, 3, 6, 7 und 9: Da alle gelogen haben, wissen wir, dass jeder von ihnen aus derselben Stadt kommt wie sein rechter Nachbar. Es gilt also 1 ⌂ 2 ⌂ 3, 5 ⌂ 6 ⌂ 7 sowie 8 ⌂ 9.
Unseren momentanen Informationsstand können wir wie folgt darstellen, wobei ein gleicher Buchstabe bedeutet, dass die Jungs aus derselben Stadt kommen, verschiedene Buchstaben aber nicht unbedingt eine unterschiedliche Heimat bedeuten. Ein leeres Feld heißt, dass wir noch nichts über diese Nummer wissen:

rechts	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	links
	a	a	a		b	b	b	c	c			

Auch Nr. 4, 5, 10 und 11 haben geschwindelt. Jeder von ihnen kommt daher nicht aus derselben Stadt wie sein rechter Nachbar. Also: 4 ⌂̸ $3, 2, 1$ und $7, 6, 5$ ⌂̸ 4. Da es nur zwei mögliche Städte gibt, folgt 1 ⌂ 2 ⌂ 3 ⌂ 5 ⌂ 6 ⌂ 7 ⌂̸ 4. Aus den Aussagen von Nr. 10 und 11 können wir schließen, dass 8 ⌂ 9 ⌂ 11 ⌂̸ 10 gilt.
Nun gibt es folgende zwei Möglichkeiten, wobei nun a und b verschiedene Städte bedeuten sollen:

rechts	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	links
1. Möglichkeit	a	a	a	b	a	a	a	a	a	b	a	
2. Möglichkeit	a	a	a	b	a	a	a	b	b	a	b	

Durch die Aussagen von Nr. 1 und 8 wissen wir, dass die Anzahl der Männer aus Schwarzdorf keine Quadratzahl ist und dass die Anzahl der Männer aus Knochenbrück gerade sein muss.
Angenommen, Nr. 1 kommt aus Knochenbrück, so gibt es folgende Möglichkeiten:

rechts	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	links
1. Möglichkeit	K	K	K	S	K	K	K	K	K	S	K	
2. Möglichkeit	K	K	K	S	K	K	K	S	S	K	S	

In beiden Fällen wäre die Anzahl der aus Knochenbrück kommenden Männer ungerade. Pirat Nr. 1 muss also aus Schwarzdorf kommen. Wir erhalten:

rechts	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	links
1. Möglichkeit	S	S	S	K	S	S	S	S	S	K	S	
2. Möglichkeit	S	S	S	K	S	S	S	K	K	S	K	

Bei der ersten Möglichkeit ist die Anzahl der aus Schwarzdorf kommenden Männer 9 und also eine Quadratzahl. Diese Möglichkeit scheidet daher auch aus.
Es bleibt nur noch die zweite Möglichkeit, in der tatsächlich alle Bedingungen erfüllt sind:

rechts	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	links
	S	S	S	K	S	S	S	K	K	S	K	

L 65.3 Ja, solch einen Baum gibt es, nämlich eine Art „Goldener-Schnitt-Baum“, den wir im Folgenden konstruieren werden.

Wir wählen das Dreieck mit den Seitenlängen

$$c = 1 \quad \text{und} \quad a := \psi \quad \text{und} \quad b := \sqrt{\psi}\,,$$

wobei

$$\psi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618\ldots$$

das Inverse des sogenannten Goldenen Schnittes ist. Dieses Dreieck ist nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras tatsächlich rechtwinklig, denn es erfüllt

$$a^2 + b^2 = \psi^2 + \psi = \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 1 = c^2\,.$$

Zu diesem Zeitpunkt haben wir Blätter mit den Flächeninhalten $a^2 = \psi^2$ und $b^2 = \psi$. Die Anzahl der kleineren Blätter sei mit A_1, die der größeren Blätter mit B_1 bezeichnet. Es ist dann $A_1 = B_1 = 1$.

Jedes zum ersten Dreieck ähnliche Dreieck mit den Seiten a', b', c' erfüllt

$$\frac{a'}{c'} = \frac{a}{c} = \psi \quad \text{und} \quad \frac{b'}{c'} = \frac{b}{c} = \sqrt{\psi}\,,$$

also

$$a' = \psi \cdot c' \quad \text{und} \quad b' = \sqrt{\psi} \cdot c'\,.$$

Wir setzen nun auf das Blatt mit der größeren Seitenlänge – das ist b – ein neues Dreieck. Dieses hat dann die Seitenlängen

$$c_2 = b = \sqrt{\psi}\,, \quad a_2 = \psi \cdot c_2 = \psi\sqrt{\psi}\,, \quad b_2 = \sqrt{\psi} \cdot c_2 = \psi\,,$$

und es liefert uns zwei neue Blätter, eines von Größe $a_2^2 = \psi^3$ und eines von Größe $b_2^2 = \psi^2$. Von zuvor haben wir noch ein Blatt der Größe $a^2 = \psi^2$, das andere Blatt hingegen ist zu einem Teil des Stammes geworden.
Insgesamt haben wir nun $A_2 := 1 = B_1$ Blätter der kleineren Größe ψ^3 und $B_2 := 1 + 1 = B_1 + A_1$ Blätter der größeren Größe ψ^2.

Im nächsten Schritt setzen wir wiederum auf alle B_2 Blätter der größeren Sorte ein Dreieck. Diese haben die Seitenlängen

$$c_3 = b_2 = \psi\,, \quad a_3 = \psi \cdot c_3 = \psi^2\,, \quad b_3 = \sqrt{\psi} \cdot c_3 = \sqrt{\psi} \cdot \psi\,.$$

Die B_2 ehemals großen Blätter werden ein Teil des Stammes und es entstehen B_2 neue Blätter der Größe $a_3^2 = \psi^4$ und B_2 neue Blätter der Größe $b_3^2 = \psi^3$.

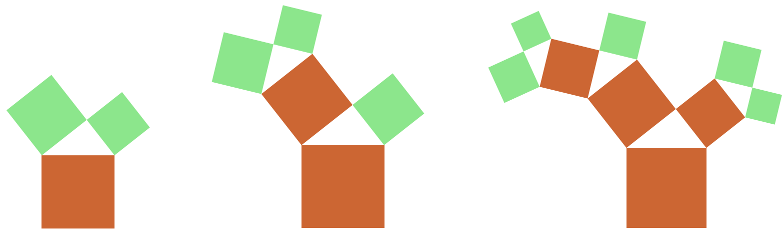


Abbildung 65.1: Der Baum nach 1, 2 bzw. 3 Schritten

Insgesamt haben wir dann $A_3 = B_2$ Blätter der kleineren Größe ψ^4 und $B_3 = B_2 + A_2$ Blätter der größeren Größe ψ^3.

Dies machen wir nun so weiter: Haben wir im n-ten Schritt B_n große Blätter der Größe $b_n^2 = \psi^n$ und A_n kleine Blätter der Größe $a_n^2 = \psi^{n+1}$, so setzen wir auf alle B_n Blätter der größeren Größe Dreiecke mit den Seitenlängen

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= b_n = \sqrt{\psi^n}\,,\\
a_{n+1} &= \psi \cdot c_{n+1} = \sqrt{\psi^{n+2}}\,,\\
b_{n+1} &= \sqrt{\psi} \cdot c_{n+1} = \sqrt{\psi^{n+1}}
\end{aligned}$$

und erhalten zusätzlich zu den A_n ehemals kleinen Blättern der Größe $a_n^2 = \psi^{n+1}$ noch je B_n Blätter der Größen $b_{n+1}^2 = \psi^{n+1}$ und $a_{n+1}^2 = \psi^{n+2}$ hinzu. Insgesamt haben wir dann also wieder nur Blätter in zwei Größen, nämlich

$$\begin{array}{lll}
B_{n+1} = B_n + A_n & \text{große Blätter der Größe} & b_{n+1}^2 = \psi^{n+1} \\
A_{n+1} = B_n & \text{kleine Blätter der Größe} & a_{n+1}^2 = \psi^{n+2}\,.
\end{array}$$

Unsere Konstruktion liefert demnach in jedem Schritt einen Pythagorasbaum, der genau zwei verschiedene Blattgrößen hat.

Außerdem wird in jedem Schritt die Anzahl der Blätter größer, denn an jedes Blatt, das zu einem Teil des Stammes wird, werden zwei neue Blätter angehängt.
Mit einer ganz groben Abschätzung folgt, dass wir spätestens nach 1000 Schritten 1000 Blätter haben. Damit sind wir fertig.

Bemerkung: Wir können die Anzahl der Blätter aber auch genau ausrechnen: Nach dem ersten Schritt (d. h. wir haben genau ein Dreieck, das wir auf den

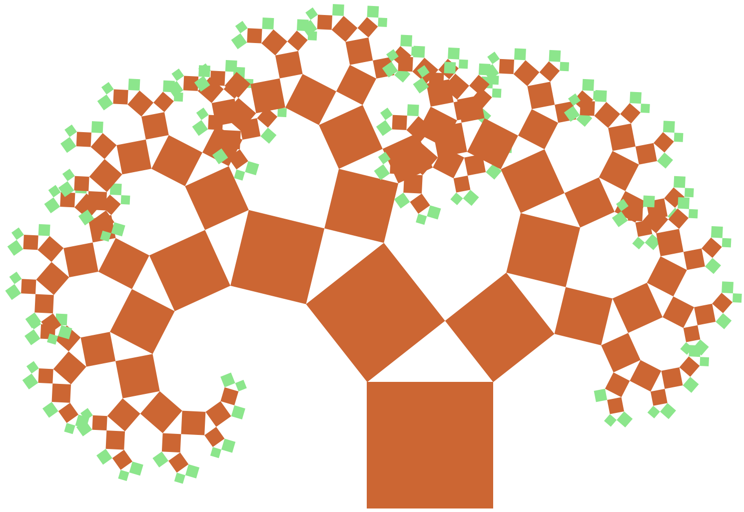


Abbildung 65.2: Goldener-Schnitt-Pythagorasbaum nach 10 Schritten

Stamm aufgesetzt hatten) haben wir $A_1 + B_1 = 1 + 1 = 2$ Blätter. Nach dem n-ten Schritt haben wir $A_n + B_n$ Blätter. Für die einzelnen Anzahlen gilt

$$B_1 = 1\,, \quad B_2 = 2 \quad \text{und} \quad B_{n+1} = B_n + A_n = B_n + B_{n-1}\,.$$

Die B_n bilden die unter Mathematikern wohlbekannte Fibonacci-Folge:

$$(1,)\, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, \ldots$$

Es gilt $B_{15} = 987$ und $A_{15} = B_{14} = 610$. Nach 15 Schritten haben wir demnach bereits $987 + 610 = 1597$ Blätter.

Zweite Bemerkung: Dieser Goldener-Schnitt-Baum ist der einzige Baum, bei dem das verwendete Dreieck nicht gleichseitig ist und der nur zwei verschiedene Blattgrößen hat.
Beweisidee: An den „Enden“ jeder Verästelung entsteht ein Teil-Pythagorasbaum mit drei Blättern. Auch dieser darf dann nur zwei verschiedene Blattgrößen haben. Sind a, b, c die Seitenlängen des größeren Dreiecks, so haben die drei Blätter die Größen a^2, $\frac{b^4}{c^2}$ und $\frac{a^2b^2}{c^2}$. Damit müssen die beiden Blätter mit den Größen a^2 und $\frac{b^4}{c^2}$ gleich groß sein. Stellen wir dieses um und nutzen noch aus, dass $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, so erhalten wir, dass auch hier – wie bei dem oben konstruierten Baum – die Beziehungen $\frac{a}{c} = \psi$ und $\frac{b}{c} = \sqrt{\psi}$ gelten.

L 65.4 Es gibt genau 47 003 Möglichkeiten, Steine unter den erlaubten Regeln auf das Spielbrett zu setzen.

Dabei haben wir auch die eine Möglichkeit mitgezählt, gar keinen Stein auf das Brett zu setzen. Ob man diese Möglichkeit mitzählen möchte oder nicht, ist eine Geschmacksfrage, auf jeden Fall macht sie unsere Rechnungen einfacher.

Wir berechnen die Anzahl der Möglichkeiten rekursiv, indem wir zuerst zählen, wie viele Möglichkeiten es bei einer Spalte (d. h. bei einem 3×1-Spielbrett) gibt, dann, wie viele es bei zwei Spalten (d. h. bei einem 3×2-Spielbrett) gibt, und so weiter bis zu einem 3×10-Spielbrett. Rekursiv heißt dabei, dass wir immer die alte Anzahl nutzen wollen, um die Anzahl bei einer weiteren Spalte auszurechnen.

Dazu unterteilen wir die Gesamtanzahl in gewisse Unteranzahlen, je nachdem, wo die Steine in der letzten Spalte liegen:

a_n	sei die Gesamtanzahl aller Möglichkeiten bei n Spalten, inklusive der Möglichkeit, gar keinen Stein zu verteilen
ℓ_n	die letzte (n-te) Spalte ist leer
m_n	in der letzten Spalte liegt ein Stein in der Mitte
b_n	in der letzten Spalte liegt oben und unten je ein Stein
o_n	in der letzten Spalte liegt nur oben ein Stein
u_n	in der letzten Spalte liegt nur unten ein Stein

Spiegelt man eine Verteilung, bei der in der letzten Spalte nur oben ein Stein liegt, an der Waagerechten, so erhält man eine Verteilung, die in der letzten Spalte nur unten einen Stein hat. Es gilt also $o_n = u_n$.

Jetzt nehmen wir eine neue ($(n+1)$-te) Spalte hinzu. Jede alte Möglichkeit liefert eine neue, bei der die neue letzte Spalte leer bleibt. In die Mitte oder gleichzeitig nach oben und unten in der neuen letzten Spalte können wir nur dann einen bzw. zwei Steine legen, wenn die n-te Spalte leer ist. Nach unten können wir einen Stein legen, wenn die n-te Spalte leer ist oder wenn in der n-ten Spalte nur oben ein Stein liegt. Wir erhalten die Formeln

$$\begin{aligned} \ell_{n+1} &= a_n \\ m_{n+1} &= \ell_n \\ b_{n+1} &= \ell_n \\ u_{n+1} &= \ell_n + o_n = \ell_n + u_n\,. \end{aligned}$$

Nutzen wir dabei aus, dass dann auch $\ell_n = a_{n-1}$ gilt, so wird die letzte Formel zu

$$u_{n+1} = \ell_n + u_n = a_{n-1} + u_n$$

und die Gesamtanzahl berechnet sich als

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \ell_{n+1} + m_{n+1} + b_{n+1} + 2 \cdot u_{n+1} \\ &= a_n + \ell_n + \ell_n + 2 \cdot a_{n-1} + 2 \cdot u_n \\ &= a_n + 4 \cdot a_{n-1} + 2 \cdot u_n \, . \end{aligned}$$

Um die Anzahl der Möglichkeiten dann tatsächlich auszurechnen, brauchen wir zusätzlich zu den beiden Rekursionsformeln für a_{n+1} und u_{n+1} noch einige Anfangswerte.
Haben wir nur eine Spalte, so ist $\ell_1 = m_1 = b_1 = u_1 = 1$, was zusammen $a_1 = \ell_1 + m_1 + b_1 + 2u_1 = 5$ ergibt. Jetzt haben wir einen Anfangswert für u_n und einen für a_n. Da die Rekursionsformel für a_{n+1} aber immer zwei vorhergehende Werte benutzt, müssen wir noch a_n für einen zweiten Wert bestimmen. Wir könnten a_2 ausrechnen; einfacher ist es aber, noch a_0 hinzuzunehmen. Es ist $a_0 = 1$, denn auf null Spalten kann man keinen Stein legen, aber gar keinen Stein zu verteilen, wollten wir ja auch als erlaubte Möglichkeit mitzählen. – Oder wir begründen den Wert $a_0 = 1$ hiermit: Der Summand a_{n-1} kam dadurch in die Formel, dass wir die Rekursionsformel $\ell_{n+1} = a_n$ auch für $(n-1)+1$ angewandt haben: $\ell_n = a_{n-1}$. Umgekehrt ist dann aber auch $a_0 = a_{1-1} = \ell_1 = 1$.

Nun haben wir alle Formeln zusammen. Es gilt

$$a_0 = 1 \, , \qquad a_1 = 5 \, , \qquad u_1 = 1$$

für die Anfangswerte, und die benötigten Rekursionsformeln sind

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 4 \cdot a_{n-1} + 2 \cdot u_n \\ u_{n+1} &= a_{n-1} + u_n \end{aligned}$$

für $n \geq 1$. Damit berechnen wir dann nacheinander

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 4a_0 + 2u_1 & u_2 &= a_0 + u_1 \\ &= 5 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 11 & &= 1 + 1 = 2 \\ a_3 &= a_2 + 4a_1 + 2u_2 & u_3 &= a_1 + u_2 \\ &= 11 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 35 & &= 5 + 2 = 7 \\ a_4 &= 35 + 4 \cdot 11 + 2 \cdot 7 = 93 & u_4 &= 11 + 7 = 18 \\ a_5 &= 93 + 4 \cdot 35 + 2 \cdot 18 = 269 & u_5 &= 35 + 18 = 53 \\ a_6 &= 269 + 4 \cdot 93 + 2 \cdot 53 = 747 & u_6 &= 93 + 53 = 146 \\ a_7 &= 747 + 4 \cdot 269 + 2 \cdot 146 = 2115 & u_7 &= 269 + 146 = 415 \\ a_8 &= 2115 + 4 \cdot 747 + 2 \cdot 415 = 5933 & u_8 &= 747 + 415 = 1162 \\ a_9 &= 5933 + 4 \cdot 2115 + 2 \cdot 1162 = 16717 & u_9 &= 2115 + 1162 = 3277 \\ a_{10} &= 16717 + 4 \cdot 5933 + 2 \cdot 3277 = 47003 \end{aligned}$$

Insgesamt gibt es somit 47 003 Möglichkeiten, Steine nach den geforderten Regeln auf dem 3×10-Spielbrett zu verteilen.
Oder, falls man die Möglichkeit ohne Steine nicht mitzählen möchte: Es gibt 47 002 Möglichkeiten, einen oder mehrere (mehr als 10 sind übrigens nicht möglich) Steine nach den geforderten Regeln auf dem 3×10-Spielbrett zu verteilen.

Lösungen zu Aufgabenblatt 66

L 66.1 Sei a die Anzahl der Aufgaben im Wettbewerb und sei x die Anzahl der Aufgaben, die der zehnte Schüler gelöst hat.
Da der zehnte Schüler nicht mehr Aufgaben gelöst haben kann, als gestellt wurden, gilt:

$$0 \leq x \leq a\,. \tag{66.1}$$

Alle zehn Schüler zusammen haben $9 \cdot 4 + x$ Aufgaben gelöst. Außerdem wurde jede Aufgabe von genau 7 Schülern gelöst. Deswegen gilt:

$$9 \cdot 4 + x = 7 \cdot a\,. \tag{66.2}$$

Unter Benutzung von (66.1) folgt

$$\begin{aligned} 36 \leq 36 + x = 7 \cdot a \quad &\Longrightarrow \quad 5\frac{1}{7} = \frac{36}{7} \leq a \qquad \text{und} \\ 36 + a \geq 36 + x = 7 \cdot a \quad &\Longrightarrow \quad 36 \geq 6 \cdot a \quad \Longrightarrow \quad 6 \geq a\,. \end{aligned}$$

Wir erhalten schließlich $a = 6$ und damit $x = 7 \cdot 6 - 36 = 6$.

Probe: Einsetzen von $x = 6$ und $a = 6$ in (66.1) und (66.2) ergibt wahre Aussagen. Der zehnte Schüler muss somit tatsächlich sechs Aufgaben gelöst haben.

Man kann sich noch überlegen, dass eine solche Verteilung der 42 Aufgaben auf die zehn Schüler auch praktisch möglich ist. Eine mögliche Verteilung ist in der folgenden Tabelle dargestellt:

Aufgabe	Teilnehmernummer									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	×	×	×	×	×	×				×
2	×	×	×	×	×	×				×
3	×	×	×				×	×	×	×
4	×	×	×				×	×	×	×
5				×	×	×	×	×	×	×
6				×	×	×	×	×	×	×

L 66.2 Wenn man betrachtet, mit welcher Kugel gespielt worden sein kann und ob der befragte Pirat ehrlich ist, so ergeben sich die folgenden vier Fälle:

a) Die Kugel ist für die „Dicke Bertha“ und der Pirat sagt die Wahrheit.

b) Die Kugel ist für die „Dicke Bertha“ und der Pirat lügt.

c) Die Kugel ist für die „Flotte Lotte“ und der Pirat sagt die Wahrheit.

d) Die Kugel ist für die „Flotte Lotte“ und der Pirat lügt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft mit einer Kugel für die „Dicke Bertha“ bzw. die „Flotte Lotte“ gespielt hat (unabhängig von der Aussage des Piraten), beträgt $\frac{5000}{5100} = \frac{50}{51}$ bzw. $\frac{100}{5100} = \frac{1}{51}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Pirat lügt bzw. die Wahrheit sagt, ist 95 % bzw. 5 %.

Weil wir nun die Aussage des Piraten kennen, bilden der erste und der vierte Fall unsere neue Grundgesamtheit, sind also zusammen 100 %. Der zweite und der dritte Fall fallen weg.

Der erste Fall hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{50}{51} \cdot \frac{5}{100} = \frac{5}{102}$ und die Wahrscheinlichkeit des vierten Falls beträgt $\frac{1}{51} \cdot \frac{95}{100} = \frac{19}{1020}$.
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit p ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Fall innerhalb dieser Grundgesamtheit auftritt, also

$$p = \frac{\frac{5}{102}}{\frac{5}{102} + \frac{19}{1020}} = \frac{50}{69} \approx 72{,}5\,\%\,.$$

L 66.3 Es gibt genau 25 Primzahlen, die kleiner als 100 sind, nämlich 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 und 97. (Die Zahlen sind hier nur der Vollständigkeit halber aufgeführt und werden zur Lösung der Aufgabe nicht benötigt.)

Nun betrachten wir den Ausdruck $P(x)^4$, jedoch ohne dabei die Summanden mit gleichem Exponenten zusammenzufassen. $P(x)^4$ ist dann eine Summe von 25^4 Potenzen von x, deren Exponent jeweils eine Summe von vier Primzahlen ist. Da die Koeffizienten im Polynom $P(x)$ alle 1 sind und wir die Potenzen nicht zusammengefasst haben, hat auch jeder der 25^4 Summanden in $P(x)^4$ den Koeffizient 1.
Jetzt müssen wir nur noch die Summanden mit geradem Exponenten zählen:
Die einzige gerade Primzahl ist die Zahl 2; deshalb ist der Exponent eines Summanden genau dann gerade, wenn im Exponenten

- alle 4 Summanden ungleich 2 sind,
- genau 2 Summanden gleich 2 sind oder wenn

- alle 4 Summanden gleich 2 sind.

Vom ersten Typ gibt es 24^4 Summanden, vom zweiten Typ $6 \cdot 24^2$ (man muss betrachten, aus welchen zwei der vier Faktoren die beiden Exponenten 2 stammen: dafür gibt es genau 6 Möglichkeiten) und vom dritten Typ gibt es genau einen Summanden.
Die Summe der Koeffizienten mit geradem Index beträgt also

$$24^4 + 6 \cdot 24^2 + 1 = 335\,233\,.$$

Lösungsvariante:
Durch Einsetzen der Werte 1 und -1 in das Polynom $Q(x)$ erhält man mit

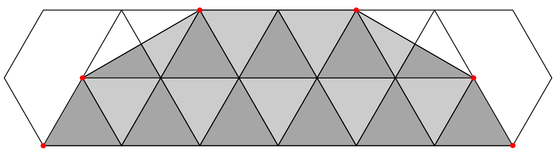
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(Q(1) + Q(-1)) &= \frac{1}{2}\,(a_{388} + a_{387} + \ldots + a_1 + a_0 \\ &\qquad + (a_{388} - a_{387} + a_{386} - a_{385} \pm \ldots - a_1 + a_0)) \\ &= a_{388} + a_{386} + \ldots + a_2 + a_0\end{aligned}$$

die gesuchte Summe der Koeffizienten mit geradem Index.
Andererseits ist aber

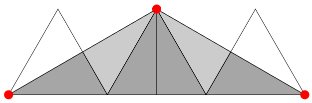
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,(Q(1) + Q(-1)) &= \frac{1}{2}\left(P(1)^4 + P(-1)^4\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(25^4 + (1-24)^4\right) = 335\,233\,.\end{aligned}$$

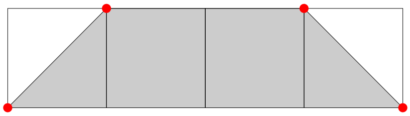
Also gilt $a_{388} + a_{386} + \ldots + a_2 + a_0 = 335\,233$.

L 66.4 Bei der Sechseckfigur sind ja bereits die Sechseckumrisse zu sehen. Wenn man die Figur noch weiter zu einem Muster aus gleichseitigen Dreiecken ergänzt, kann man diese Dreiecke einfach abzählen. Vier Dreiecke sind dabei genau halbiert, sie ergänzen sich also zu zwei vollen Dreiecken.



Im Ergebnis ist die markierte Fläche so groß wie 18 Dreiecke, während das regelmäßige Sechseck aus sechs gleichseitigen Dreiecken besteht. Wie behauptet, ist das Flächenstück also genau dreimal so groß wie das Sechseck.
Für ein Drei- oder Viereck lässt sich die Aufgabe auf entsprechende Weise lösen, sogar noch einfacher:



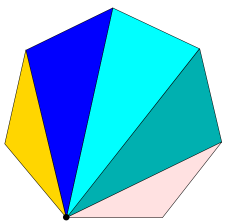


Beim Dreieck setzt sich das gegebene Flächenstück aus sechs rechtwinkligen, „halben gleichseitigen“ Dreiecken zusammen und ist damit ebenfalls dreimal so groß wie ein gleichseitiges Dreieck.
Am einfachsten ist wohl die Lösung beim Viereck: Die beiden Dreiecke an den Enden ergänzen sich genau zu einem Quadrat, also ist auch hier die markierte Fläche dreimal so groß wie das erzeugende 4-Eck.

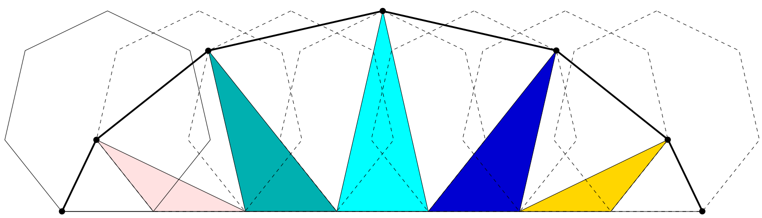
Die nun nicht mehr überraschende *Vermutung* lautet also:

Für jedes regelmäßige n-Eck ist die sich ergebende Figur genau dreimal so groß wie das n-Eck.

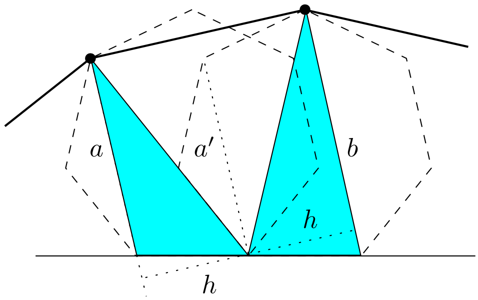
Beweis, dass dies stimmt: Wir betrachten zunächst nur das n-Eck mit seinem markierten Punkt (der in der Skizze – mit $n = 7$ – bereits links unten liegt). Von diesem Punkt aus zeichnen wir alle Diagonalen in das n-Eck und unterteilen es so in $n - 2$ Dreiecke.



Beim Abrollen des n-Ecks wie beschrieben lassen wir nun nach dem ersten Kippen das erste der Dreiecke quasi liegen (das heißt, färben den entsprechenden Bereich in der Figur), nach dem zweiten Kippen das zweite usw. bis nach dem vorletzten Kippen. (Nach dem letzten Kippen gibt es kein Dreieck mehr, das macht aber nichts.)
Es ergibt sich folgendes Bild:



Der Flächeninhalt aller gefärbten Teile ist also genau die Fläche des n-Ecks. Die übrig bleibende Fläche besteht aus $n-1$ weißen Dreiecken.
Nun stellen wir fest, dass ein weißes Dreieck zusammen mit den beiden benachbarten gefärbten Dreiecken ein Trapez bildet:



Begründung: Die Strecke a ist eine Diagonale (ggf. auch Kante) in einer Kopie des n-Ecks; in der nächsten Kopie des n-Ecks ist sie mit a' bezeichnet. Die Strecke b ist eine zu a', also auch zu a parallele Diagonale, weil sie die beiden Eckpunkte verbindet, die den Eckpunkten von a' zur selben Seite hin benachbart sind.

Die Streckenstücke auf der Grundseite der Figur sind alle gleich lang, weshalb die untere Spitze des weißen Dreiecks die Seite des Trapezes halbiert. Wenn mit m die Mittellinie des Trapezes bezeichnet ist, die gleichzeitig Seitenhalbierende des weißen Dreiecks ist, hat das weiße Dreieck die Fläche $m \cdot h$. Außerdem ist m als Mittellinie des Trapezes gerade das arithmetische Mittel der Seitenlängen a und b. Die gefärbten Dreiecke haben in der Summe also den Flächeninhalt $\frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = mh$. Daher ist ein weißes Dreieck genauso groß wie die beiden angrenzenden gefärbten Dreiecke zusammen. Das gilt auch am Rand, wo man ein zu einem Dreieck entartetes Trapez und nur *ein* gefärbtes Dreieck hat.
Addiert man alles, ergibt sich: Die weißen Dreiecke haben in der Summe einen Flächeninhalt wie zweimal die gefärbten Dreiecke, also zweimal die Fläche des n-Ecks. Insgesamt hat somit die Figur wie behauptet den dreifachen Flächeninhalt des n-Ecks.

Bemerkungen: Da man die gefärbten Dreiecke nach Konstruktion aneinanderfügen kann, sind die noch ungefärbten Dreiecke gleichschenklig. Weil die Spitze des Dreiecks auf der Mitte der einen Trapezseite liegt, folgt aus der Gleichschenkligkeit, dass das Trapez auf der anderen Seite rechte Winkel haben muss.

Die Aufgabe lässt sich auch „durchrechnen“, unter mehrfacher Zuhilfenahme von Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen. Mit diesem aufwendigen Beweis wollen wir hier niemanden verschrecken; aber wer daran interessiert ist, kann ihn sich im Internet unter

http://www.math.uni-goettingen.de/zirkel/loesungen/blatt66z/loes66z.pdf

ansehen.

Lösungen zu Aufgabenblatt 67

L 67.1 Wir betrachten gleich den allgemeinen Fall mit einer natürlichen Zahl k. Die an die gesuchte natürliche Zahl n gestellte Bedingung, dass auch

$$\frac{n+k}{n-k} = \frac{n-k+2k}{n-k} = \frac{n-k}{n-k} + \frac{2k}{n-k} = 1 + \frac{2k}{n-k}$$

eine natürliche Zahl ist – zu denen Null ja (meistens)[1] hinzugezählt wird –, ist dann gleichbedeutend damit, dass $\frac{2k}{n-k}$ entweder -1 oder auch eine natürliche Zahl ist.
Aus dem ersten Fall folgt $-(n-k) = 2k$, also $-n = k$. In natürlichen Zahlen hat das genau eine Lösung: $n = k = 0$. Da dann jedoch der Nenner $n-k$ auch null wäre, ist dies keine Lösung der Aufgabe.
Also ist $\frac{2k}{n-k}$ eine natürliche Zahl. Weil der Zähler $2k$ nach Voraussetzung nichtnegativ ist, ist dies genau dann der Fall, wenn $m := n-k$ ein positiver[2] Teiler von $2k$ ist.
Also sind die Lösungen des Problems alle $n \in \mathbb{N}$, die sich in der Form $n = m+k$ schreiben lassen, wobei für m jeder positive Teiler von $2k$ gewählt werden kann.

Für $k = 0$ bedeutet das übrigens, dass jede natürliche Zahl n ungleich null eine Lösung ist, wie man auch sofort am Bruch $\frac{n+k}{n-k} = \frac{n}{n} = 1$ sieht.

Im Spezialfall $k = 9$ wiederum bedeutet dies, dass $n - 9$ ein Teiler von 18 sein muss, also eine der Zahlen 1, 2, 3, 6, 9, 18. Somit ergibt sich:

$n-9$	1	2	3	6	9	18
$\frac{n+9}{n-9}$	19	10	7	4	3	2
n	10	11	12	15	18	27

Für $k = 9$ sind die Lösungen also $n = 10, 11, 12, 15, 18$ und 27.

[1] Über die Frage, ob Null eine natürliche Zahl ist, kann man sich hervorragend streiten, wenn man will … Wir hoffen, richtig beobachtet zu haben, dass in der Schule in der Regel Null eine natürliche Zahl ist.

[2] Die Einschränkung auf positive Teiler ist für $2k = 0$ nötig, da 0 zwar ein Teiler von 0 ist, weil es – so die Definition – eine positive ganze Zahl j mit $0 = j \cdot 0$ gibt (das geht hier natürlich für alle positiven ganzen j), aber „$\frac{0}{0}$“ keine natürliche Zahl ist.

L 67.2 Wir formen die Jahreswechselzahl geschickt um und erhalten

$$\begin{aligned}
111\ldots 11222\ldots 225 &= \underbrace{111\ldots 11}_{2007\text{-mal}} \cdot 10^{2009} + 2\cdot \underbrace{111\ldots 11}_{2007\text{-mal}} \cdot 10^2 + 25 \\
&= \frac{1}{9}\cdot\left(\underbrace{999\ldots 99}_{2007\text{-mal}} \cdot 10^{2009} + 2\cdot \underbrace{999\ldots 99}_{2007\text{-mal}} \cdot 10^2 + 25\cdot 9\right) \\
&= \frac{1}{9}\cdot\big((10^{2007}-1)\cdot 10^{2009} + 2\cdot(10^{2007}-1)\cdot 10^2 + 25\cdot 9\big) \\
&= \frac{1}{9}\cdot\big(10^{2007+2009} - 10^{2009} + 2\cdot 10^{2009} - 2\cdot 10^2 + 25\cdot 9\big) \\
&= \frac{1}{9}\cdot\big(10^{4016} + 10^{2009} - 200 + 225\big) \\
&= \frac{1}{9}\cdot\big(10^{2008+2008} + 10\cdot 10^{2008} + 25\big) \\
&= \frac{1}{9}\cdot\big((10^{2008})^2 + 2\cdot 5\cdot 10^{2008} + 5^2\big) \\
&= \frac{1}{9}\cdot\big(10^{2008}+5\big)^2 \qquad \text{nach der ersten Binomischen Formel} \\
&= \left(\frac{10^{2008}+5}{3}\right)^2 .
\end{aligned}$$

Die Jahreswechselzahl ist also genau dann eine Quadratzahl, wenn $\frac{10^{2008}+5}{3}$ eine natürliche Zahl ist, d. h. wenn $10^{2008}+5$ durch 3 teilbar ist.
Da die Quersumme $Q(10^{2008}+5) = 1+5 = 6$ durch 3 teilbar ist, ist auch die Zahl $10^{2008}+5$ selbst durch 3 teilbar. Man sieht die Teilbarkeit aber auch der Zahl direkt an, denn es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\left(10^{2008}+5\right) = \frac{1}{3}\cdot\Big(\underbrace{999\ldots 99}_{2008\text{-mal}} + 1 + 5\Big) &= \frac{1}{3}\cdot\Big(\underbrace{999\ldots 99}_{2008\text{ mal}} + 6\Big) \\
&= \underbrace{333\ldots 33}_{2008\text{-mal}} + 2 = \underbrace{333\ldots 33}_{2007\text{-mal}}5\,.
\end{aligned}$$

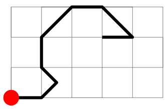
Die Jahreswechselzahl ist damit die Quadratzahl

$$111\ldots 11222\ldots 225 = \Big(\underbrace{333\ldots 33}_{2007\text{-mal}}5\Big)^2 .$$

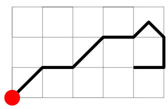
L 67.3 Die Flaggen 1, 4, 6 und 8 sind Originale, die Flaggen 2, 3, 5 und 7 hingegen Fälschungen.

Zunächst geben wir für die vier Originale je eine Möglichkeit an, aus dem gegebenen Streckenzug das Haus vom Nikolaus zu zeichnen:

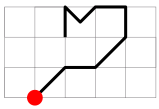
Flagge 1:



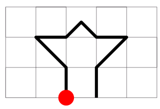
Flagge 4:

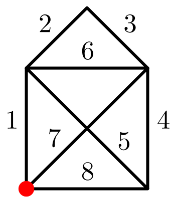


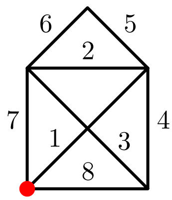
Flagge 6:

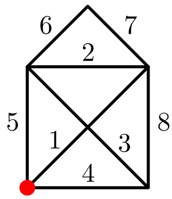


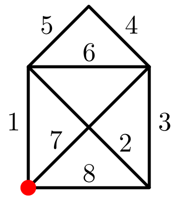
Flagge 8:





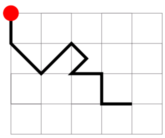




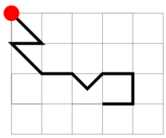


Betrachten wir nun die mutmaßlichen Fälschungen:

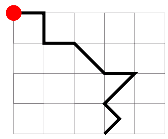
Flagge 2:



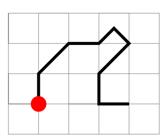
Flagge 3:



Flagge 5:



Flagge 7:



Flagge 2: Diese Flagge muss eine Fälschung sein, da man die beiden langen Diagonalen beim Haus vom Nikolaus nicht direkt nacheinander zeichnen kann.

Flagge 3: Da das Haus vom Nikolaus bekanntlich aus genau acht Geradenstücken besteht, dieser Streckenzug aber neun Teile hat, ist auch Flagge 3 eine Fälschung.

Flagge 5: Grundsätzlich gilt: Zeichnet man einen Graphen wie das Haus vom Nikolaus in einem zusammenhängenden Streckenzug und ist einer der Punkte des Graphen weder Anfangs- noch Endpunkt, dann geht von ihm eine gerade Anzahl an Strecken aus.[3] Denn bei jedem „Durchlauf“ des Streckenzuges wird eine Strecke zum Ankommen und eine zum Wegbewegen gebraucht; insgesamt

[3]Die Umkehrung dieser Aussage ist im Allgemeinen nicht richtig: Zum Beispiel ist bei einem Quadrat jeder Anfangspunkt eines durchgehenden Streckenzuges natürlich an einem Punkt mit gerader Anzahl an Kanten.

gibt es dann also immer zueinandergehörende Paare von Strecken. Im Haus vom Nikolaus laufen nun in den beiden unteren Punkten eine ungerade Anzahl von Kanten zusammen. Daher müssen diese beiden Punkte Anfangs- und Endpunkt des Streckenzuges sein. Insbesondere darf also das Dach (bestehend aus den beiden kurzen Diagonalen) nicht am Ende des Streckenzuges sein. Damit ist auch diese Fälschung enttarnt.

Flagge 7: In einem Originalstreckenzug, bei dem eine lange Diagonale direkt am Dach (bestehend aus den beiden kurzen Diagonalen) anschließt, darf zwischen Dach und der zweiten langen Diagonalen nur eine gerade Anzahl von Stücken der Länge 1 liegen. Ansonsten würde die zweite Diagonale in einer Ecke starten, auf welche auch schon die erste Diagonale trifft. Daher kann schließlich Flagge 7 ebenso kein Original sein.

L 67.4 Wir benutzen die sogenannte *Dreiecksungleichung*: Für alle reellen Zahlen a und b gilt

$$|a+b| \leq |a| + |b| .$$

Für alle, die diese in sehr vielen Fällen nützliche Ungleichung nicht kennen, folgt unten ein Beweis.

Seien nun x, y reelle Zahlen. (Für die Vorstellung reicht es, an $x \leq y$ zu denken – für die Rechnung ist es unerheblich.) Sei weiterhin n eine positive ganze Zahl. Wir wenden die Dreiecksungleichung $(n-1)$-mal an und erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left| f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}(y-x)\right) + f\left(x + \frac{1}{n}(y-x)\right) - f(y) \right| \\
&\leq \left| f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}(y-x)\right) \right| + \left| f\left(x + \frac{1}{n}(y-x)\right) - f(y) \right| \\
&= \left| f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}(y-x)\right) \right| \\
&\quad + \left| f\left(x + \frac{1}{n}(y-x)\right) - f\left(x + \frac{2}{n}(y-x)\right) + f\left(x + \frac{2}{n}(y-x)\right) - f(y) \right| \\
&\leq \left| f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}(y-x)\right) \right| + \left| f\left(x + \frac{1}{n}(y-x)\right) - f\left(x + \frac{2}{n}(y-x)\right) \right| \\
&\quad + \left| f\left(x + \frac{2}{n}(y-x)\right) - f(y) \right| \\
&\leq \dots
\end{aligned}$$

$$\leq \left| f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}(y-x)\right) \right| + \left| f\left(x + \frac{1}{n}(y-x)\right) - f\left(x + \frac{2}{n}(y-x)\right) \right|$$
$$+ \ldots + \left| f\left(x + \frac{n-1}{n}(y-x)\right) - f(y) \right|$$

Wir haben nun n Summanden der Form

$$\left| f\left(x + \frac{k}{n}(y-x)\right) - f\left(x + \frac{k+1}{n}(y-x)\right) \right|$$

mit $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Nach der Voraussetzung aus der Aufgabenstellung gilt für jeden dieser Summanden

$$\begin{aligned}\left| f\left(x + \frac{k}{n}(y-x)\right) - f\left(x + \frac{k+1}{n}(y-x)\right) \right| \\ &\leq \left| \left(x + \frac{k}{n}(y-x)\right) - \left(x + \frac{k+1}{n}(y-x)\right) \right|^2 \\ &= \left| -\frac{1}{n}(y-x) \right|^2 = \frac{1}{n^2}(y-x)^2 \,.\end{aligned}$$

Also erhält man

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\leq \frac{1}{n^2}(y-x)^2 + \ldots + \frac{1}{n^2}(y-x)^2 \\ &= n \cdot \frac{1}{n^2}(y-x)^2 = \frac{1}{n}(y-x)^2 \,.\end{aligned}$$

Für feste x und y sowie wachsendes n wird der Term auf der rechten Seite der Ungleichung immer kleiner, nämlich kleiner als jede Zahl größer null. Somit muss $|f(x) - f(y)| = 0$ sein. Da x und y beliebige reelle Zahlen waren, gilt somit $f(x) = f(y)$ für alle reellen x, y; also ist f konstant.

Beweis der Dreiecksungleichung:
Wir unterscheiden, ob die Summe $a + b$ positiv oder nichtpositiv ist, und verwenden jeweils, dass $x \leq |x| = |-x|$ gilt – unabhängig davon, ob die reelle Zahl x negativ, null oder positiv ist. Falls $a+b > 0$ ist, so gilt $|a+b| = a+b \leq |a|+|b|$. Andernfalls ist $a+b \leq 0$ und es folgt $|a+b| = -(a+b) = (-a)+(-b) \leq |a|+|b|$.

Alternative Lösung:
Für Leser, die mit der Differentialrechnung vertraut sind, folgt nun noch eine weitere kurze Beweisvariante: Für $x \neq y$ kann man die gegebene Ungleichung durch $|x - y|$ dividieren und sieht, dass gilt:

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq |x - y| \,.$$

Links steht hier der Betrag des Differenzenquotienten der Funktion f, und mit der Ungleichung folgt

$$\lim_{y \to x} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \lim_{y \to x} |x - y| = 0\,.$$

Somit gilt auch

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = 0\,.$$

Die Funktion f ist also differenzierbar und ihre Ableitung ist null; folglich ist f eine konstante Funktion.

Lösungen zu Aufgabenblatt 68

L 68.1 Zunächst gilt

$$\frac{a^2+b^2}{ab} = 68 \Leftrightarrow a^2+b^2 = 68ab\,.$$

Addieren wir auf beiden Seiten der letzten Gleichung den Term $2ab$, so erhalten wir unter Benutzung der ersten Binomischen Formel:

$$(a+b)^2 = 70ab\,.$$

Analog erhalten wir durch Subtrahieren des Terms $2ab$ und unter Benutzung der zweiten Binomischen Formel:

$$(a-b)^2 = 66ab\,.$$

Zusammen folgt:

$$\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} = \frac{70ab}{66ab} \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = \frac{70}{66} = \frac{35}{33}\,.$$

Hierbei ist sicherzustellen, dass $ab \neq 0$ und $a-b \neq 0$, d. h. $a \neq b$ gilt. Ersteres ist nach Voraussetzung erfüllt, da a und b positiv sind. Außerdem ist $a \neq b$, denn anderenfalls wäre

$$68 = \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a^2+a^2}{aa} = \frac{2a^2}{a^2} = 2\,.$$

Der Term $\frac{a+b}{a-b}$ kann also höchstens die Werte $\pm\sqrt{\frac{35}{33}}$ annehmen.
Dass die beiden Werte auch wirklich angenommen werden, sieht man zum Beispiel durch Wahl von $b = 1$ und $a = 34 \pm \sqrt{1155}$: Denn dann gilt

$$a^2+b^2 = 34^2 \pm 68\cdot\sqrt{1155} + 1155 + 1 = 68\cdot(34\pm\sqrt{1155}) = 68\cdot ab \quad \text{sowie}$$

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{a-b} &= \frac{35\pm\sqrt{1155}}{33\pm\sqrt{1155}} = \frac{(35\pm\sqrt{1155})(33\mp\sqrt{1155})}{(33\pm\sqrt{1155})(33\mp\sqrt{1155})}\\ &= \frac{1155\mp 2\cdot\sqrt{1155}-1155}{33^2-1155} = \frac{\mp 2\cdot\sqrt{1155}}{-66} = \frac{\pm\sqrt{33\cdot 35}}{33} = \pm\sqrt{\frac{35}{33}}\,.\end{aligned}$$

Bemerkung: Man findet solche Zahlen a und b durch Auflösen der Gleichung $\frac{a^2+b^2}{ab} = 68$ nach einer der beiden Variablen, z. B. mithilfe der p-q-Formel: $a = b \cdot (34 \pm \sqrt{34^2 - 1})$. Da der Radikand positiv ist, erhält man für beliebiges b genau zwei Werte für a so, dass die Gleichung $\frac{a^2+b^2}{ab} = 68$ erfüllt ist, und man erhält somit auch zwei Werte für den Term $\frac{a+b}{a-b}$. Oben wurde aber bereits gezeigt, dass dieser Term höchstens die Werte $\pm\sqrt{\frac{35}{33}}$ annehmen kann; also werden ebendiese tatsächlich angenommen.

L 68.2 Die kleinste Zahl mit der geforderten Eigenschaft ist ziemlich groß, nämlich $n = 2^{244} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^{244} \cdot 105$. Sie hat 76 Stellen.

Für eine natürliche Zahl m bezeichnen wir die Anzahl der Teiler von m mit $\tau(m)$. Diese Anzahl können wir ausrechnen, wenn wir die Primfaktorzerlegung

$$m = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{e_r}$$

kennen: Eine Zahl t ist genau dann Teiler von m, wenn sie keine anderen Primfaktoren als m enthält und jeder der vorhandenen Primfaktoren in t nicht öfter als in m vorkommt. Wollen wir also einen Teiler hinschreiben, so haben wir für den ersten Primfaktor p_1 die $e_1 + 1$ Möglichkeiten, ihn gar nicht, einmal, zweimal, ... oder e_1-mal auszuwählen. Für jede dieser Wahlen haben wir dann für den zweiten Primfaktor p_2 genau $e_2 + 1$ Möglichkeiten usw. Die Zahl m hat folglich genau

$$\tau(m) = (e_1 + 1)(e_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (e_r + 1)$$

verschiedene Teiler.

Die Primfaktorzerlegung von 2008 ist $2008 = 2^3 \cdot 251$, damit hat 2008 genau $\tau(2008) = (3 + 1)(1 + 1) = 8$ verschiedene Teiler, nämlich

$$1,\ 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 251,\ 2 \cdot 251 = 502,\ 2^2 \cdot 251 = 1004,\ 2^3 \cdot 251 = 2008\,.$$

Sei n nun eine beliebige natürliche Zahl. Weil 2008 die beiden Primfaktoren 2 und 251 hat, teilen wir auch die Primfaktorzerlegung von n in zwei Teile auf:

$$n = \left(2^a \cdot 251^b\right) \cdot \left(p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{e_r}\right).$$

Dabei dürfen a bzw. b auch gleich null sein, was genau dann passiert, wenn 2 bzw. 251 gar keine Primfaktoren von n sind.
Mit der obigen Formel rechnen wir die Anzahl der Teiler von n und auch von $2008 \cdot n = \left(2^{a+3} \cdot 251^{b+1}\right) \cdot (p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{e_r})$ aus. Es ist

$$\tau(n) = (a + 1)(b + 1) \cdot (e_1 + 1)(e_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (e_r + 1)\,,$$
$$\tau(2008 \cdot n) = (a + 3 + 1)(b + 1 + 1) \cdot (e_1 + 1)(e_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (e_r + 1)\,.$$

Folglich hat $2008 \cdot n$ genau

$$\begin{aligned}
&\tau(2008 \cdot n) - \tau(n)\\
&\qquad = \Big((a+4)(b+2) - (a+1)(b+1)\Big) \cdot \Big((e_1+1) \cdot \ldots \cdot (e_r+1)\Big)\\
&\qquad = (a+3b+7) \cdot (e_1+1) \cdot \ldots \cdot (e_r+1)
\end{aligned}$$

Teiler mehr als n. Die Zahl n erfüllt demnach genau dann die Bedingung der Aufgabenstellung, wenn

$$(a+3b+7) \cdot (e_1+1) \cdot \ldots \cdot (e_r+1) = 2008 \tag{68.1}$$

gilt. Insbesondere muss $(a+3b+7)$ dann einer der acht oben angegebenen Teiler von 2008 sein, dabei ist offensichtlich $(a+3b+7) \geq 7$.

Sei nun n eine Zahl, die diese Bedingungen erfüllt.

Erster Fall: $a+3b+7=8$.
Dann ist $a=1, b=0$ und außerdem $(e_1+1)(e_2+1)\ldots(e_r+1) = 251$ eine Primzahl, also $r=1$ und $e_1 = 251-1$. Die Primzahl $p_1 \neq 2$ ist auf jeden Fall mindestens so groß wie 3, also ist $n = 2^1 \cdot 251^0 \cdot p_1^{250} \geq 2 \cdot 3^{250}$.

Zweiter Fall: $a+3b+7=251$.
Dann ist $a+3b=244$ und $2^a \cdot 251^b \geq 2^a \cdot (2^3)^b = 2^{a+3b} = 2^{244}$. Außerdem ist $(e_1+1) \cdot \ldots \cdot (e_r+1) = 8$. Hierfür gibt es wiederum drei Möglichkeiten, abhängig von der Anzahl r der Primfaktoren:

- $r=1$ und $e_1+1=8$: Dann ist $n = 2^a \cdot 251^b \cdot p_1^{e_1} \geq 2^{244} \cdot 3^7$.
- $r=2$ und $e_1+1=4, e_2+1=2$: Da p_1 und p_2 verschiedene Primzahlen und ungleich 2 sind, gilt $p_1^3 \cdot p_2^1 \geq 3^3 \cdot 5$. Insgesamt ergibt sich dann $n = 2^a \cdot 251^b \cdot p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \geq 2^{244} \cdot 3^3 \cdot 5$.
- $r=3$ und $e_1+1=e_2+1=e_3+1=2$: Auch hier sind dann p_1, p_2 und p_3 verschiedene Primzahlen und ungleich 2, so dass diesmal die Abschätzung $n = 2^a \cdot 251^b \cdot p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot p_3^{e_3} \geq 2^{244} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ folgt.

Letzter Fall: $a+3b+7 \geq 2 \cdot 251$.
Dann ist $n = 2^a \cdot 251^b \cdot p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{e_r} \geq 2^a(2^3)^b \cdot 1 = 2^{a+3b} \geq 2^{2\cdot 251-7} = 2^{495}$.

Nun vergleichen wir noch die unteren Abschätzungen aus den verschiedenen Fällen miteinander. Es gilt

$$\begin{aligned}
2 \cdot 3^{250} &> 2 \cdot (2^{243} \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 3^2) \cdot 3^2 > 2^{244} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1\\
2^{244} \cdot 3^7 &= (2^{244} \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 3^2) \cdot 3^2 > 2^{244} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1\\
2^{244} \cdot 3^3 \cdot 5 &= 2^{244} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3^2 > 2^{244} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7\\
2^{495} &= 2^{244} \cdot 2^{251} > 2^{244} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7\,.
\end{aligned}$$

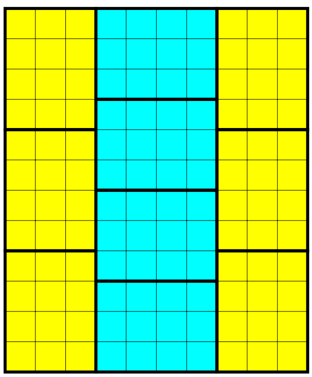
Alle erlaubten Zahlen sind demnach größer oder gleich $n = 2^{244} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Für diese Zahl $n = 2^{244} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ ist $r = 3$ und es gilt $(a + 3b + 7) \cdot (e_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (e_r + 1) = (244 + 3 \cdot 0 + 7) \cdot (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 251 \cdot 8 = 2008$. Nach den obigen Überlegungen (bei Formel (68.1)) erfüllt diese Zahl also tatsächlich die Bedingungen der Aufgabenstellung und ist somit das gesuchte Minimum dieser Zahlen.

L 68.3 Zunächst stellen wir eine notwendige Bedingung an ein Rechteck, das man überdecken kann: Da jede Schmuckfliese aus 12 Einzelfliesen besteht, muss die Zahl der quadratischen Felder im Rechteck durch 12 teilbar sein, also: $12 | m \cdot n$. Da 3 eine Primzahl ist, muss eine der Seitenlängen durch 3 teilbar sein. Wir können, um weniger Fälle betrachten zu müssen, das Rechteck so drehen, dass m durch 3 teilbar ist. Bezüglich des Faktors 4 kann man aber zunächst nur feststellen, dass entweder eine Seitenlänge durch 4 teilbar ist oder beide Seitenlängen durch 2, aber nicht durch 4 – und diese Fälle untersuchen wir nun getrennt. Um Missverständnissen vorzubeugen: Wir gehen davon aus, dass ein $m \times n$-Rechteck m Zeilen und n Spalten hat.

4 teilt n. Dieser Fall ist einfach: Man kann die Fläche sogar so mit Schmuckfliesen ausfüllen, dass alle gleichartig angeordnet sind: Man hat $\frac{m}{3}$ Reihen zu je $\frac{n}{4}$ Rechtecken der Größe 3×4, die Schmuckfliesen liegen alle quer.

4 teilt m, also: 12 teilt m. Wir fangen damit an, den unteren Rand des Rechtecks zu betrachten. Natürlich ist eine notwendige Bedingung für die Lösung, dass man den unteren Rand pflastern kann. Das ist in diesem Fall aber auch schon ausreichend: Überall, wo eine Fliese am unteren Rand quer liegt, werden $\frac{m}{3} - 1$ weitere Fliesen quer darübergelegt, und wo eine Fliese unten hochkant liegt, werden entsprechend $\frac{m}{4} - 1$ Fliesen hochkant darübergelegt.



Die Aufgabe reduziert sich also in diesem Fall auf die Frage, welche positiven ganzen Zahlen n sich als Summe von einer jeweils nichtnegativen Anzahl von 3en und 4en darstellen lassen.
Für alle Zahlen, die durch 3 teilbar sind, trifft dies offenbar zu. Für alle Zahlen größer gleich 4, die beim Teilen durch 3 den Rest 1 lassen, auch, denn sie sind in der Form $4 + k \cdot 3$ darstellbar. Ebenso gilt dies für alle Zahlen größer gleich 8, die bei Division durch 3 den Rest 2 haben, da sie sich in der Form $2 \cdot 4 + k \cdot 3$ schreiben lassen. Es bleiben die Zahlen 1, 2 und 5 übrig, bei denen

man sofort sieht, dass sie sich nicht als Summe von 3en und/oder 4en darstellen lassen.
Ein Beispiel für eine Befliesung in einem Fall, in dem 12 ein Teiler von m ist, sieht man in der Abbildung.

4 teilt weder m noch n. Wir betrachten die erste Kästchenzeile. Weil n nicht durch 4 teilbar ist, können nicht alle Fliesen, die in dieser Zeile liegen, quer liegen, und die Anzahl der hochkant liegenden Fliesen ist nicht null.
Sei a_1 diese Anzahl der in der 1. Zeile hochkant liegenden Fliesen. Dann muss $3a_1$ bei Division durch 4 denselben Rest wie n lassen – für alle, die diese Schreibweise noch nicht kennen: Wir notieren das in der Form $3a_1 \equiv n \mod 4$, gesprochen als: „3 (mal) a_1 ist kongruent zu n modulo 4“.
Diese Feststellung gilt für jedes a_i, wenn analog a_i die Zahl der in der i-ten Zeile hochkant liegenden Fliesen darstellt.
Daher muss die Zahl der in der zweiten Zeile „beginnenden“ hochkant liegenden Fliesen, das sei b_2, durch 4 teilbar sein, denn es ist $b_2 = a_2 - a_1$; allgemein ist $b_i = a_i - a_{i-1} + b_{i-4}$; ebenso auch $b_3 = a_3 - a_2$ und $b_4 = a_4 - a_3$. Mit der 4. Zeile können erstmals hochkant liegende Fliesen „enden“, und zwar enden genau a_1 solche Fliesen. Damit wieder $3a_5 \equiv n \mod 4$ gelten kann und weil $b_2 + b_3 + b_4 \equiv 0 \mod 4$ gilt, muss in der fünften Zeile wieder eine Anzahl b_5 an hochkant liegenden Fliesen beginnen, die insbesondere nicht null ist (sonst wäre $a_5 = b_2 + b_3 + b_4 + b_5$ durch 4 teilbar), sondern wiederum mit $3b_5 \equiv n \mod 4$. Nun geht es immer so weiter: b_6, b_7 und b_8 müssen durch 4 teilbar sein, b_9 darf wiederum nicht durch 4 teilbar sein und so weiter.
Anders betrachtet ergibt sich Folgendes: Weil in der 1. Zeile hochkant liegende Fliesen anfangen, kann das Rechteck nicht eine, zwei oder drei Zeilen haben. Es könnte 4 Zeilen haben. Wenn es mehr als 4 Zeilen hat, kann es weder 5 noch 6 noch 7 Zeilen haben, weil in der 5. Zeile wiederum hochkant liegende Fliesen anfangen. Es könnte aber wieder 8 Zeilen haben. Die Argumentation wiederholt sich immer wieder, und das Ergebnis ist, dass, wenn man das Rechteck vollständig fliesen kann, die Anzahl der Zeilen durch 4 teilbar sein müsste. Das steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung!

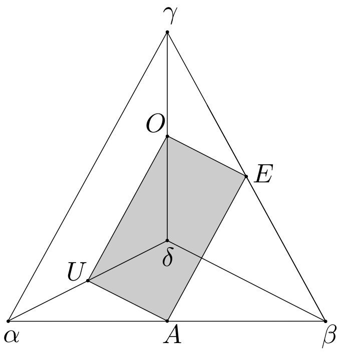
Das Ergebnis ist also zusammengefasst: Es lassen sich genau alle Rechtecke der Größe $m \times n$ fliesen, für die gilt:

- $4 \mid m$ und $3 \mid n$ oder
- $3 \mid m$ und $4 \mid n$ oder
- $12 \mid m$ und n ist nicht 1, 2 oder 5 oder
- $12 \mid n$ und m ist nicht 1, 2 oder 5.

Oder noch kürzer, aber weniger übersichtlich:

- Jeweils mindestens eine der beiden Zahlen m und n wird durch 3 beziehungsweise 4 geteilt, und keine der Zahlen ist dabei 1, 2 oder 5.

L 68.4 Gegeben haben wir ein Tetraeder $\alpha\beta\gamma\delta$, das aus den vier Planeten namens Alpha, Beta, Gamma und Delta gebildet wird, die im Weltall schweben. Die Kapitäne Kark, Kerk, Kork und Kurk starten jeweils in den Mittelpunkten A, E, O und U der Kanten $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\delta$ und $\delta\alpha$.



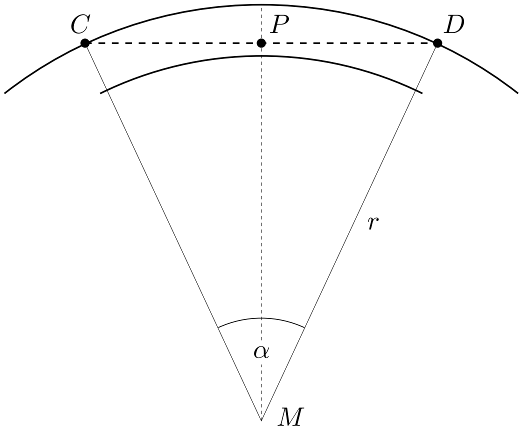
Daher gilt $\frac{|\delta U|}{|\delta\alpha|} = \frac{|\delta O|}{|\delta\gamma|} = \frac{1}{2}$ und nach der Umkehrung des Strahlensatzes sind die Seiten UO und $\alpha\gamma$ parallel zueinander.
Jetzt wenden wir den Strahlensatz in seiner Originalform an: $\frac{1}{2} = \frac{|\delta U|}{|\delta\alpha|} = \frac{|UO|}{|\alpha\gamma|}$, d. h. UO ist gerade halb so lang wie $\alpha\gamma$.

Analog verfahren wir bei den Startpositionen der Kapitäne Kark und Kerk. Es gilt $\frac{|\beta A|}{|\beta\alpha|} = \frac{|\beta E|}{|\beta\gamma|} = \frac{1}{2}$, da Kark und Kerk mittig zwischen Alpha und Beta bzw. zwischen Beta und Gamma stationiert sind. Wieder nach dem umgekehrten Strahlensatz sind die Seiten AE und $\alpha\gamma$ parallel zueinander, also auch die Seiten AE und UO. Außerdem gilt nach dem (originalen) Strahlensatz $\frac{1}{2} = \frac{|\beta A|}{|\beta\alpha|} = \frac{|AE|}{|\alpha\gamma|}$, d. h. auch AE ist halb so lang wie $\alpha\gamma$.

Damit sind die Seiten UO und AE parallel zueinander und gleich lang. Das Viereck $AEOU$ ist also ein Parallelogramm.
Die in jeweils gegenüberliegenden Eckpunkten dieses Parallelogramms startenden Kapitäne Kark und Kork bzw. Kerk und Kurk fliegen mit derselben Geschwindigkeit aufeinander zu und treffen sich daher in den Mittelpunkten der Diagonalen. Bekanntlich halbieren sich aber in einem Parallelogramm die Diagonalen gegenseitig; daher treffen alle Kapitäne in einem Punkt aufeinander, ohne dass einer von ihnen einen Umweg fliegen müsste.

Lösungen zu Aufgabenblatt 69

L 69.1 Für die erste Fahrt betrachten wir zunächst einen Durchschnitt der Erdkugel entlang der Fahrtstrecke Calais–Dover.



Dabei sei C Calais und D Dover. Der kürzeste Weg für das U-Boot ist dabei die gerade Strecke CD, sofern ihre tiefste Stelle nicht tiefer als 500 m unter dem Meeresspiegel liegt. Der tiefste Punkt ist der Mittelpunkt P der Strecke CD. Die Mittelsenkrechte zu CD verläuft durch den Erdmittelpunkt M. Die Tauchtiefe im Punkt P ergibt sich dann als Differenz zwischen dem Erdradius $r = 6636\,\text{km}$ und $|MP|$. Sei α der Winkel $\angle DMC$. Dann ergibt sich die trigonometrische Beziehung $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{|MP|}{r}$. Andererseits gilt, dass sich α zu $360°$ verhält wie der Kreisbogen $\widehat{CD}$ zum Erdumfang $2\pi r$. Es gilt also

$$\alpha = \frac{|\widehat{CD}| \cdot 360°}{2\pi r}\,.$$

Einsetzen in die obige Gleichung ergibt

$$|MP| = \cos\left(\frac{|\widehat{CD}| \cdot 360°}{4\pi r}\right) \cdot r = \cos\left(\frac{41\,\text{km} \cdot 360°}{4\pi \cdot 6366\,\text{km}}\right) \cdot 6366\,\text{km} \approx 6365{,}967\,\text{km}\,.$$

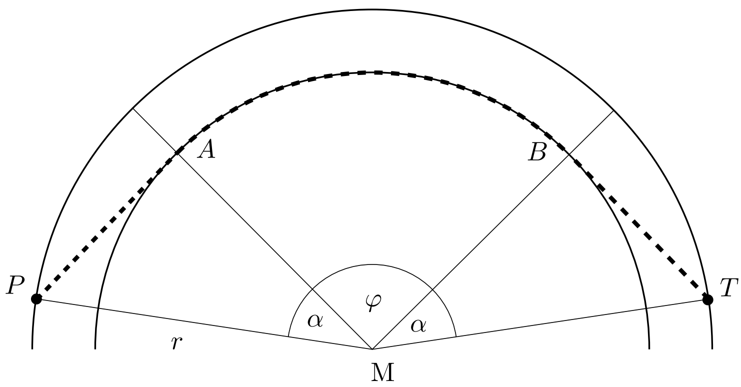
Die maximale Tauchtiefe ist dann die Differenz zum Erdradius, also ungefähr 33 m.

Bemerkung: Die Ersparnis im Vergleich zur Fahrt auf der Wasseroberfläche beträgt lediglich 7 cm.

Wir versuchen nun denselben Ansatz für die Strecke Porto–Tortuga. Einsetzen in die obige Formel mit einer Entfernung von 6431 km ergibt dann als maximale Tauchtiefe

$$6366\,\mathrm{km} - \cos\left(\frac{6431\,\mathrm{km}\cdot 360^\circ}{4\pi\cdot 6366\,\mathrm{km}}\right)\cdot 6366\,\mathrm{km} \approx 795\,\mathrm{km}\,,$$

also einen weitaus größeren Wert als für das U-Boot möglich.
Um den kürzesten möglichen Weg zu finden, betrachten wir – ähnlich wie im ersten Teil – einen Durchschnitt der Erde entlang der Strecke von Porto (P) nach Tortuga (T). Dazu zeichnen wir noch einen inneren Kreis um den Erdmittelpunkt M mit Radius 6365,5 km, der die maximale Tauchtiefe angibt.



Gesucht ist nun der kürzeste Weg von P nach T innerhalb des äußeren Kreisringes. Anschaulich gesprochen ist dies der Weg, den ein Gummiseil beschreibt, wenn man es von P nach T spannt und wenn der Meeresboden überall exakt 500 Meter unter der Wasseroberfläche liegt. Mathematisch ausgedrückt heißt das, dass man am Anfang und am Ende des Weges jeweils auf einer Tangente durch P bzw. T an den inneren Kreis (mit Tangentialpunkten A bzw. B) fährt. Der optimale Weg zwischen den Tangentialpunkten ist der Kreisbogen $\widehat{AB}$.
Da in A und B jeweils ein rechter Winkel $\angle PAM$ bzw. $\angle MBT$ vorliegt, ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras

$$\begin{aligned} |PA| = |TB| &= \sqrt{r^2 - (r-0{,}5)^2} = \sqrt{6366^2 - (6366-0{,}5)^2} \\ &= \sqrt{6366 - 0{,}25} = \sqrt{6365{,}75}\,. \end{aligned}$$

Die beiden Dreiecke PAM und TBM sind kongruent und wir bezeichnen den Winkel $\angle AMP$ bzw. $\angle TMB$ als α.

Sei $\varphi = \angle BMA$. Dann gilt $\frac{2\alpha+\varphi}{360°} = \frac{|\overset{\frown}{TP}|}{2\pi r}$. Es folgt mit $\sin\alpha = \frac{|PA|}{r} = \frac{\sqrt{6365{,}75}}{6366}$, also $\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{6365{,}75}}{6366}$, dass

$$\varphi = \frac{6341\,\mathrm{km}\cdot 360°}{2\pi\cdot 6366\,\mathrm{km}} - 2\arcsin\frac{\sqrt{6365{,}75}}{6366}$$

ist. Andererseits ist $\frac{\varphi}{360°} = \frac{|\overset{\frown}{AB}|}{2\pi\cdot(r-0{,}5)} \Leftrightarrow |\widehat{AB}| = \frac{\varphi\cdot 2\pi\cdot 6365{,}5\,\mathrm{km}}{360°}$. Einsetzen von φ ergibt

$$\begin{aligned}|\widehat{AB}| &= \left(\frac{6431\,\mathrm{km}\cdot 360°}{2\pi\cdot 6366\,\mathrm{km}} - 2\arcsin\frac{\sqrt{6365{,}75}}{6366}\right)\cdot\frac{2\pi\cdot 6365{,}5\,\mathrm{km}}{360°}\\ &\approx 6270{,}9319\,\mathrm{km}\,.\end{aligned}$$

Der Gesamtweg hat dann die Länge

$$|PA| + |\widehat{AB}| + |BT| \approx 6270{,}9319\,\mathrm{km} + 2\cdot\sqrt{6365{,}75}\,\mathrm{km} \approx 6430{,}5033\,\mathrm{km}\,.$$

Die Wegersparnis beträgt somit ca. 497 m.

Bemerkung: Bei den Berechnungen in dieser Lösung kommt man in die Nähe der Rechengenauigkeit eines Taschenrechners: Im ersten Aufgabenteil zum Beispiel wird vom Erdradius eine ähnlich große Zahl ($|MP|$) abgezogen. Damit werden am Anfang viele „gültige" (d. h. nicht gerundete) Stellen ausgelöscht, und im Ergebnis sind nur wenige Stellen wirklich genau gerechnet. Auch die Berechnungen im zweiten Teil der Aufgabe sind aus ähnlichem Grund teilweise empfindlich gegen Rundungen. Am besten rechnet man in solchen Fällen mit einer „kompletten Formel", um Rundungen zwischendurch zu vermeiden. Wenn Dover und Calais nur wenige Meter auseinander liegen würden, reicht auch das (auf normalen Taschenrechnern) nicht aus; man muss dann nach anderen Tricks suchen. (Für Eingeweihte: Mithilfe von Additionstheoremen kann man die Formel hier in eine besser berechenbare umstellen.)

L 69.2 Es gibt genau drei Lösungen: 53125, 91125 und 95625.

Beweis: Sei die fünfstellige Zahl *abcde* eine Lösung der Aufgabe. Dann teilt insbesondere *bcde* die Zahl *abcde* und damit auch die Zahl $abcde - bcde = a0000 = a\cdot 2^4\cdot 5^4$. Da a eine Ziffer (ungleich Null) sein soll, bedeutet das, dass *bcde* ein Produkt von einem Faktor kleiner gleich 9 (ein Teiler von a), einer Zweierpotenz 2^i mit $i \le 4$ und einer Fünferpotenz 5^j mit $j \le 4$ sein muss.

Außerdem ist nach Voraussetzung $e \neq 0$, daher ist $bcde$ nicht durch 10 teilbar oder anders gesagt: enthält nicht gleichzeitig Primfaktoren 2 *und* 5.
Wäre $bcde$ nicht durch 5 teilbar, so wäre damit $bcde \leq a{\cdot}2^4 \leq 9{\cdot}16 = 144 < 1000$ im Widerspruch zur Forderung, dass auch $b \neq 0$ gelten soll. Also ist $bcde = \tilde{a}{\cdot}5^j$ mit $j \leq 4$ und einem Teiler $\tilde{a}$ von a, und weil $9 \cdot 5^2 = 225 < 1000$ ist, ist $j \geq 3$.

Wegen $8 \cdot 5^3 = 1000$ kommt für den Fall $j = 3$ nur die Wahl $\tilde{a} = 9$ und damit auch $a = 9$ infrage. Es ist $9 \cdot 125 = 1125$ eine Zahl ohne Nullen, also ist 91125 ein Lösungskandidat. Wegen $1125 \cdot 81 = 91125$, $125 \cdot 9 = 1125$, $25 \cdot 5 = 125$ und $5 \cdot 5 = 25$ ist tatsächlich 91125 eine Lösung.

Weitere Lösungen kann es nur für den Fall $j = 4$ geben, es ist dann also $bcde = \tilde{a} \cdot 625$, wobei $\tilde{a}$ wiederum ein Teiler von a und ungerade sein muss.
Für $\tilde{a} = 1$ liefert $1 \cdot 625 = 0625$ eine Null; und $3 \cdot 625 = 1875$ führt genauso wie $7 \cdot 625 = 4375$ zu keiner Lösung, weil offenbar 875 kein Teiler von 1875 (bzw. 1000) ist (auch nicht 75 ein Teiler von 875) und etwas weniger klar 375 kein Teiler von 4375 ist (denn 3 teilt 375, aber nicht 4000). Damit ist $\tilde{a}$ weder 3 noch 7.
Wählt man $\tilde{a} = 5$, so ist $bcde = 5^5$, damit muss, weil $a0000 = 16 \cdot 5^4 \cdot a$ ist, a auch durch 5 teilbar sein. Da a eine Ziffer ungleich Null sein soll, bleibt als einzige Möglichkeit $a = 5$. Wegen $53125 = (16+1) \cdot 3125$ (wie konstruiert) und $3125 = 25 \cdot 125$ ist 53125 eine weitere Lösung.
Wählt man schließlich $\tilde{a} = 9$, so ist also $bcde = 5^4 \cdot 9$, und damit muss ebenso $a = 9$ gewählt werden. Es ist $9 \cdot 625 = 5625$ und bekanntermaßen $625 = 25 \cdot 25$, und wegen $95625 = (16 + 1) \cdot 5625$ ist 95625 eine dritte und die letzte Lösung der Aufgabe.

Ein paar weiterführende Bemerkungen (ohne Beweise): Wie man vielleicht schon am Beweis erkannt hat, ist die Forderung, dass keine der Ziffern eine Null sein soll, eine wesentliche Forderung. Lässt man Nullen zu, so erhält man etliche weitere Lösungen.
Wenn man schon Nullen zulässt, kann man auch gleich die Aufgabe für beliebige Stellenzahlen untersuchen. Man erhält dann automatisch unendlich viele Lösungen, denn man kann aus einer Lösung weitere erzeugen, indem man zwischen der ersten und der zweiten Ziffer beliebig viele Nullen einfügt. Auch am Ende kann man beliebig viele Nullen anhängen.
Interessant sind nach dem oben Gesagten nur noch Lösungen, bei denen die erste Ziffer keine Null ist (das ist in jedem Fall vernünftig), die letzte Ziffer ebenso keine Null ist und bei denen die zweite Ziffer nur dann eine Null ist, wenn sich keine Lösung ergibt, wenn man die Null weglässt. Wir wollen eine solche Lösung als *wesentliche Lösung* bezeichnen. Man kann schließlich zeigen: Es gibt genau 148 wesentliche Lösungen. Darunter sind 9 einstellige, 41 zweistellige, 30 drei-, 25 vier-, 17 fünf-, 20 sechs-, 5 siebenstellige Lösungen und als

längste eine achtstellige Lösung. Sie lautet 90 703 125 und zeigt, dass die etwas umständlich anmutende Formulierung oben zur zweiten Ziffer einer wesentlichen Lösung nötig ist, denn 703 125 ist $9 \cdot 5^7$, sodass die nächste Ziffer ungleich Null, die ja eine Neun sein muss, weil keine Zehnerpotenz durch drei teilbar ist, erst auf der 10^7-er-Stelle stehen kann.
Wesentliche Lösungen ohne Nullen gibt es immerhin 90, und die größten unter ihnen sind genau die drei fünfstelligen. Alle 14 vierstelligen Lösungen sind – das kann man genau wie in der Lösung oben zeigen – bis auf eine Ausnahme (9225) durch 125 teilbar. Auf die Ziffern 7 oder 9 enden unter den wesentlichen Lösungen ohne Null nur die trivialen Lösungen 7, 9, 77 und 99.
Die meisten Nullen in einer wesentlichen Lösung haben die Lösungen $a000064$ mit $a = 1, 3, 5, 7$ oder 9.
Interessant wäre sicherlich noch die Untersuchung des Problems in anderen Stellenwertsystemen – aber das würde den Rahmen hier sprechen, also überlassen wir es dem geneigten Leser, dies selbst zu tun.

L 69.3 Anstelle der Löcher setzen wir Variablen ein. Das Gleichungssystem

$$x + 4y = a_1 \tag{69.1}$$
$$2x + a_2 y = a_3 \tag{69.2}$$

soll nach Voraussetzung eindeutig lösbar sein. Würde man $a_2 = 8$ wählen, wäre die linke Seite der zweiten Gleichung das Doppelte der linken Seite der ersten Gleichung. Das heißt, dass das Gleichungssystem entweder gar nicht lösbar ist (und zwar, wenn $a_3 \neq 2a_1$ ist) oder dass die beiden Gleichungen äquivalent sind. Dann hat man in Wahrheit aber nur eine Gleichung, nämlich umgestellt: $x = a_1 - 4y$, und man sieht sofort, dass sie für jede Wahl von y lösbar ist und zudem verschiedene x-Werte liefert. Das wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung. Daher muss $a_2 \neq 8$ gelten.
Wir berechnen nun allgemein die Lösungen des Gleichungssystems; die Umformungen sind in jedem Fall Folgerungen aus (wenn nicht sogar Äquivalenzen zu) den vorigen Gleichungen. Zunächst bilden wir $2 \cdot (69.1) - (69.2)$:

$$\begin{aligned} (8 - a_2)y &= 2a_1 - a_3 \\ y &= \frac{2a_1 - a_3}{8 - a_2}\,. \end{aligned}$$

Das Teilen durch $8 - a_2$ ist allgemein möglich, weil wir ja gerade $a_2 \neq 8$ festgestellt hatten.
Dies in (69.1) eingesetzt, ergibt zusammen mit der Voraussetzung, dass bei

einer Lösung der Aufgabe x positiv ist,

$$\begin{aligned} 0 < x &= a_1 - 4y \\ &= a_1 - \frac{8a_1 - 4a_3}{8 - a_2}\,. \end{aligned}$$

Für $a_2 = -4$ und auch für $a_2 = -8$ gilt $8 - a_2 > 0$. Damit folgt aus der Ungleichung weiter

$$\begin{aligned} 8a_1 - a_1a_2 - 8a_1 + 4a_3 &> 0 \\ -a_1a_2 + 4a_3 &> 0 \\ a_1a_2 - 4a_3 &< 0\,. \end{aligned}$$

Angenommen, $a_2 = -4$ führt zu einer Lösung. Dann ist

$$\begin{aligned} -4a_1 - 4a_3 &< 0 \\ a_1 + a_3 &> 0\,. \end{aligned}$$

Dies führt aber zu einem Widerspruch, da $a_1 + a_3$ die Summe von -8 und 8, also null ist. Also muss gelten: $a_2 = -8$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} -8a_1 - 4a_3 &< 0 \\ 2a_1 + a_3 &> 0 \\ 2a_1 &> -a_3\,. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist nur erfüllt für $a_1 = 8$ und $a_3 = -4$ (und nicht umgekehrt). Eine Probe bestätigt die Lösung. Das korrekte Gleichungssystem sieht also so aus:

$$\begin{aligned} x + 4y &= +8 \\ 2x - 8y &= -4 \end{aligned}$$

und hat die Lösung $x = 3$, $y = \frac{5}{4}$.

L 69.4 *Erster Teil: Das Spiel endet niemals.*
Zu Beginn des Spiels hat laut Aufgabenstellung kein Spieler mehr als 20 Äpfel vor sich liegen. Das gilt aber auch nach der ersten Hälfte des Spielzuges („*füge einen Apfel hinzu, falls deine Anzahl ungerade ist*“) noch, denn 20 ist eine gerade Zahl.
Sei nun a die Anzahl an Äpfeln eines Spielers X und sei b die Anzahl der Äpfel seines linken Nachbarn (jeweils nach der ersten Hälfte des Zuges). Aufgrund

der letzten Überlegung gilt $a, b \leq 20$. In der zweiten Hälfte des Zuges gibt der Spieler X die Hälfte seiner Äpfel fort, behält also insbesondere die (andere) Hälfte seiner eigenen Äpfel, und erhält gleichzeitig die Hälfte der Äpfel seines linken Nachbarn, sodass er nach dem Spielzug genau $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2}$ Äpfel besitzt. Mit der obigen Abschätzung für a und b folgt auch für diese neue Anzahl $\frac{a+b}{2} \leq \frac{20+20}{2} = 20$.
Folglich hat auch nach dem kompletten Spielzug jeder der Spieler höchstens 20 Äpfel vor sich liegen. Dies gilt auch nach jedem weiteren Spielzug.
Zusammen brauchen die sieben Spieler also höchstens $7 \cdot 20 = 140$ Äpfel; und spätestens, wenn jeder 20 Äpfel vor sich liegen hat, werden keine weiteren Äpfel aus dem Vorrat benötigt und das Spiel kann endlos weitergehen.

Zweiter Teil: Wie groß muss der Vorrat sein?
Diese Anzahl ist sehr von der gegebenen Anfangssituation abhängig und auch uns noch nicht vollständig bekannt.
Eine erste Begrenzung der Anzahl haben wir im ersten Teil schon gesehen: Insgesamt werden nie mehr als 140 Äpfel benötigt, und zwar in der Anzahl der zu Beginn vor den Spielern liegenden Äpfel und im Vorrat zusammen.
Diese Abschätzung können wir aber noch verbessern, indem wir die Schranken aus dem ersten Teil exakter wählen: Seien $x_1, x_2, \ldots, x_7$ die Anzahlen der zu Beginn vor den einzelnen Spielern liegenden Äpfel. Sei M das Maximum dieser Anzahlen. Falls M gerade ist, setzen wir $m := M$, und anderenfalls – also wenn M ungerade ist – setzen wir $m := M + 1$. In beiden Fällen ist dann m eine gerade Zahl und keiner der Spieler hat zu Beginn mehr als m Äpfel.
Da m wiederum eine gerade Zahl ist, ergibt sich wie oben, dass nach der ersten Hälfte des Zuges kein Spieler mehr als m Äpfel hat. Und auch nach der zweiten Hälfte des Zuges gilt (mit den entsprechenden Bezeichnungen wie oben) für die Apfelanzahl eines jeden Spielers: $\frac{a+b}{2} \leq \frac{m+m}{2} = m$.
Es werden also insgesamt höchstens $7 \cdot m$ Äpfel benötigt. Und da von Anfang an bereits $x_1 + x_2 + \ldots + x_7$ Äpfel vor den Spielern liegen, braucht der Vorrat höchstens $7 \cdot m - (x_1 + x_2 + \ldots + x_7)$ Äpfel zu enthalten.
Es gibt viele nichttriviale Beispiele, in denen diese Abschätzung scharf ist: Zum Beispiel führt die Startsituation $(5, 19, 19, 13, 0, 0, 0)$ nach 22 Zügen dazu, dass alle Spieler 20 Äpfel haben.

Jedoch gibt es auch Beispiele, in denen auch die zweite Abschätzung nicht die beste ist: Gibt es etwa nur zwei Spieler, die zu Beginn 4 bzw. 8 Äpfel haben, so benötigen sie gar keinen zusätzlichen Vorrat, denn: Beide Anzahlen sind gerade, und nach dem ersten Zug haben sie $\frac{4+8}{2} = 6$ bzw. $\frac{8+4}{2} = 6$ Äpfel, sodass auch nach allen folgenden Zügen jeder der beiden Spieler genau 6 Äpfel besitzt und kein zusätzlicher Apfel benötigt wird.

Zusatz: Am „Ende“ haben alle gleich viele Äpfel.
Wir haben bislang nur gezeigt, dass immer nur ein endlicher Vorrat nötig ist. Damit ist nach Aufgabenstellung das Spiel bei genügend großem Vorrat niemals zu Ende. Aber, wie eine Einsenderin richtig schrieb: „Die Spieler werden irgendwann sowieso aufhören, wenn sie wieder an die Arbeit müssen oder keine Lust mehr haben.“
Es drängt sich noch die Frage auf, ab wann das Spiel langweilig wird. Sicherlich dann, wenn alle die gleiche gerade Anzahl Äpfel haben, denn dann kann sich nichts mehr ändern. Dies wird tatsächlich immer eintreten. Den Beweis dazu wollen wir nur andeuten: Man kann zeigen, dass Folgendes gilt: Sei die Situation gegeben, dass nicht alle die gleiche Anzahl an Äpfeln haben. Wir betrachten speziell die kleinste vorkommende Zahl an Äpfeln auf einem Haufen. Dann ist nach dem nächsten Schritt entweder diese Minimalzahl größer geworden oder aber die Zahl der Spieler, die einen Haufen mit der Minimalzahl haben, ist kleiner geworden. Damit verändert sich die Spielsituation mit jedem Zug wesentlich, bis der Zustand erreicht wird, dass alle Spieler die gleiche gerade Anzahl an Äpfeln vor sich haben.

Weitere Bemerkungen: Das Spiel mit maximal 20 Äpfeln endet nach spätestens 22 Runden. Das Beispiel oben mit der Startsituation $(5, 19, 19, 13, 0, 0, 0)$ gibt den maximal benötigten Vorrat an: 84 Äpfel.
Wenn man zu Beginn mehr Äpfel zulässt, kann man den maximal benötigten Vorrat noch deutlich erhöhen: Die Startsituation $(0, 97, 99, 93, 99, 99, 60)$ beispielsweise führt nach 30 Runden zum Endstand, dass alle Spieler 100 Äpfel haben, man braucht also einen Vorrat von 153 Äpfeln. Ob dies das Maximum ist, wissen wir nicht, unser Computer rechnet noch …

Lösungen zu Aufgabenblatt 70

L 70.1 Seien $z_1, \ldots, z_8$ die Anzahlen der Reiskörner, die in der $1., 2., \ldots, 8.$ Zeile des Schachbretts liegen, und $s_1, \ldots, s_8$ die Anzahlen für die entsprechenden Spalten.
Nach Voraussetzung gilt dann $z_1 > s_1, z_2 > s_2, \ldots, z_7 > s_7$, also auch

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_7 > s_1 + s_2 + \ldots + s_7 \,.$$

Andererseits lässt sich die Gesamtzahl N aller Reiskörner auf dem Schachbrett sowohl als Summe aller Anzahlen in den Spalten als auch als Summe aller Anzahlen in den Zeilen schreiben: $N = s_1 + s_2 + \ldots + s_8 = z_1 + z_2 + \ldots + z_8$.

Daraus folgt schließlich:

$$s_8 = N - (s_1 + s_2 + \ldots + s_7) > N - (z_1 + z_2 + \ldots + z_7) = z_8 \,.$$

Also liegen in der achten Spalte mehr Reiskörner als in der achten Zeile.

L 70.2 Wir betrachten zuerst den Fall $n = 208$:
Es ist $\sqrt{208} \geq 14$. Außerdem ist die k-te Wurzel aus 208 größer als 1 für alle $k \in \{3, \ldots, 199\}$, da 208 größer als 1 ist. Deswegen können wir abschätzen:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{208} + \sqrt[3]{208} + \sqrt[4]{208} + \ldots + \sqrt[199]{208} \\ &\geq 14 + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{\text{197-mal}} \\ &= 14 + 197 \cdot 1 = 211 \geq 208 \,. \end{aligned}$$

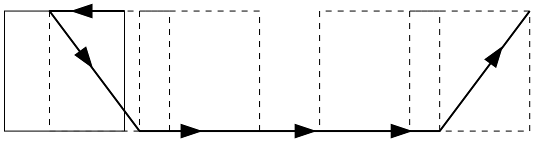
Ähnlich können wir auch im Fall $n = 2008$ vorgehen:
Es gilt $\sqrt{2008} \leq 45$, $\sqrt[3]{2008} \leq 13$ und $\sqrt[4]{2008} \leq 7$ (denn es ist $45^2 = 2025$, $13^3 = 2197$ und $7^4 = 2401$). Dann ist aber auch $\sqrt[k]{2008} \leq 7$ für alle $k \in \{5, \ldots, 199\}$ und wir erhalten als Abschätzung:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{2008} + \sqrt[3]{2008} + \sqrt[4]{2008} + \ldots + \sqrt[199]{2008} \\ &\leq 45 + 13 + \underbrace{7 + \ldots + 7}_{\text{196-mal}} \\ &= 45 + 13 + 196 \cdot 7 = 1430 \leq 2008 \,. \end{aligned}$$

Im ersten Fall ist also A größer, im zweiten Fall B.

L 70.3 Wir können zunächst die Zeit bestimmen, die Felix für die „Umrundung“ der Gruppe benötigt. Die Gruppe hat sich bei einer Geschwindigkeit von $3\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{3}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{5}{6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ lediglich 54 m weiterbewegt, also hat Felix' Runde $54\,\text{m} \cdot \left(\frac{5}{6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^{-1} = 64{,}8\,\text{s}$ gedauert.

Aus der Perspektive eines Beobachters, der sich nicht mit der Gruppe bewegt, sondern auf der Stelle steht, läuft Felix mit konstanter Geschwindigkeit v (genau genommen ist der Betrag der Geschwindigkeit konstant) und sein Weg kann die folgende Gestalt haben:



Zwischenbemerkung: Felix' Weg ist durch die Aufgabenstellung nicht eindeutig festgelegt; er könnte die Gruppe auch *im* Uhrzeigersinn umrunden. Dies würde aber an der Länge des Weges nichts ändern, denn in jedem Fall läuft er einmal in gleicher Richtung wie die Gruppe, einmal entgegengesetzt und zweimal schräg zur Marschrichtung.

Wenn wir nun die sich bewegende Pfadfindergruppe als Bezugsystem wählen, so ist Felix' Geschwindigkeit zwar nicht mehr konstant, dafür ist dann der Weg, den er abläuft, ein Quadrat mit Seitenlänge 16 m.
Die Relativgeschwindigkeiten zur Gruppe ergeben sich, wenn man von der Geschwindigkeit v, die der ruhende Beobachter sieht, die Geschwindigkeit der Gruppe „abzieht“. Hierbei muss man auch die Laufrichtung berücksichtigen, da Felix nur auf einem der vier Streckenabschnitte in dieselbe Richtung wie die Gruppe läuft:
Für den ersten und dritten Abschnitt gilt, da Felix in die entgegengesetzte bzw. in dieselbe Richtung läuft:

$$v^{(1)}_{\text{relativ}} = v + 3\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \qquad \text{und} \qquad v^{(3)}_{\text{relativ}} = v - 3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\,.$$

Für die beiden verbleibenden Abschnitte kann man die Relativgeschwindigkeit mit dem Satz des Pythagoras ausrechnen; denn die Strecke, die Felix geht, während er an einer Querseite des Quadrats entlanggeht, ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die Seitenlänge des Quadrats und die von der Gruppe zurückgelegte Strecke sind. Da die Geschwindigkeiten proportional zu den Strecken sind, überträgt sich diese Beziehung zwischen den Strecken auch auf die Geschwindigkeiten:

$$v^{(2)}_{\text{relativ}} = v^{(4)}_{\text{relativ}} = \sqrt{v^2 - \left(3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2}\,.$$

Jetzt können wir die für die einzelnen Abschnitte benötigte, von v abhängige Zeit ausrechnen und deren Summe mit den oben berechneten 64,8 Sekunden (64,8/3600 Stunden) gleichsetzen:

$$\begin{aligned}\frac{64{,}8}{3600}\,\mathrm{h} &= \frac{0{,}016\,\mathrm{km}}{v^{(1)}_{\mathrm{relativ}}} + \frac{0{,}016\,\mathrm{km}}{v^{(2)}_{\mathrm{relativ}}} + \frac{0{,}016\,\mathrm{km}}{v^{(3)}_{\mathrm{relativ}}} + \frac{0{,}016\,\mathrm{km}}{v^{(4)}_{\mathrm{relativ}}}\\ &= \frac{0{,}016\,\mathrm{km}}{v+3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} + \frac{0{,}016\,\mathrm{km}}{\sqrt{v^2-(3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}})^2}} + \frac{0{,}016\,\mathrm{km}}{v-3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} + \frac{0{,}016\,\mathrm{km}}{\sqrt{v^2-(3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}})^2}}\,. \qquad (70.1)\end{aligned}$$

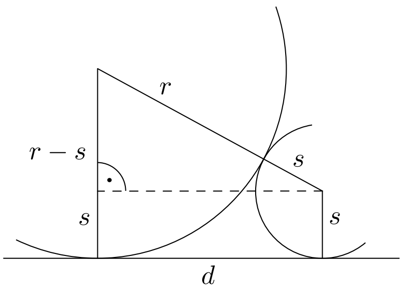
Multiplizieren mit $(v+3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}})\cdot(v-3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}) = v^2-(3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}})^2$ liefert:

$$\begin{aligned}&0{,}018\,\mathrm{km}\cdot\left(v^2-\left(3\,\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right)^2\right)\\ &\qquad = 0{,}016\,\mathrm{km}\cdot\left(v-3\,\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}+v+3\,\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}+2\sqrt{v^2-\left(3\,\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right)^2}\right)\\ \iff\quad &\frac{9}{8}\left(v^2-\left(3\,\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right)^2\right)-2v = 2\sqrt{v^2-\left(3\,\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right)^2}\,.\end{aligned}$$

Quadrieren der letzten Gleichung würde nun eine Gleichung vierten Grades in v liefern, die nicht mit elementaren Methoden auflösbar ist.
Unter Verwendung der Tatsache, dass $v > 3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ gelten muss, und in der Hoffnung, dass es eine ganzzahlige Lösung geben könnte, sieht man bzw. merkt man nach kurzem Ausprobieren, dass $v = 5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ die Gleichung löst.
Diese Lösung ist auch eindeutig; denn wir haben die letzte Gleichung äquivalent aus Gleichung (70.1) hergeleitet, und dort sieht man, dass mit wachsendem v auf der rechten Seite jeder Bruch kleiner wird, weswegen es höchstens eine Lösung geben kann.
Felix ist also mit mit einer Geschwindigkeit von 5 km/h gelaufen.

L 70.4 Zunächst eine allgemeine Überlegung: Wenn zwei Kugeln mit Radien r und s auf einer Ebene liegen, sich berühren und ihre Auflagepunkte auf der Ebene den Abstand d zueinander haben, dann gilt die Beziehung

$$d^2 = (r+s)^2-(r-s)^2 = 4rs\,. \qquad (70.2)$$



Sie folgt sofort aus dem Satz des Pythagoras und aus den binomischen Formeln.

Die Radien der großen, mittelgroßen und kleinen Kanonenkugeln der Piraten seien mit $g(=\frac{45}{2}\,\text{cm})$, m bzw. k bezeichnet; die Angabe „cm“ bei den Längen wird der Übersichtlichkeit halber meist weggelassen.

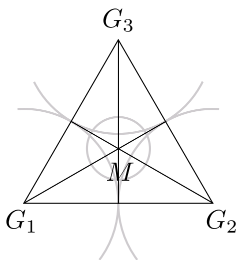
Zuerst betrachten wir drei große Kugeln und eine mittelgroße Kugel, die sich alle gegenseitig berühren. Es reicht dabei, die Auflagepunkte auf der Ebene anzuschauen: Die Auflagepunkte G_1, G_2 und G_3 der großen Kugeln haben voneinander jeweils einen Abstand von 45 cm. Aus Symmetriegründen liegt der Auflagepunkt M der mittelgroßen Kugel in der Mitte des gleichseitigen Dreiecks $G_1G_2G_3$. Da sich die Höhen in einem gleichseitigen Dreieck im Verhältnis $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$ teilen und die Höhe selbst die $\frac{\sqrt{3}}{2}$-fache Länge der Grundseite hat, hat M zu jedem G_i den Abstand $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 45$. Nach der Vorüberlegung (70.2) gilt damit

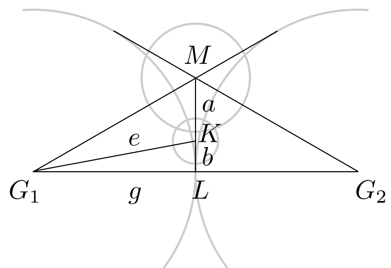
$$\frac{1}{3} \cdot 45^2 = 4 \cdot \frac{45}{2} \cdot m\,,$$

also

$$m = \frac{15}{2}\,.$$

Der Durchmesser der mittelgroßen Kugel beträgt daher 15 cm.





Zur Bestimmung des Durchmessers der kleinen Kanonenkugel gehen wir ganz ähnlich vor; nur bilden die drei Auflagepunkte G_1, G_2 und M der größeren Kugeln auf der Ebene nur noch ein gleichschenkliges Dreieck. Es sei K der Auflagepunkt der kleinen Kugel auf der Ebene. Aus Symmetriegründen muss er auf dem Lot ML von M über der Basis G_1G_2 liegen. Aus den Überlegungen zum Höhenschnittpunkt im gleichseitigen Dreieck $G_1G_2G_3$ folgt hier $|ML| = \frac{1}{3}|LG_3| = \frac{1}{2}|MG_3| = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot 45$. Mit den Bezeichnungen der Skizze gilt dann

$$\begin{aligned} a + b = |ML| &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot 45\,, \\ e^2 = |G_1K|^2 &= 4gk = 90k \quad \text{und} \\ a^2 &= 4mk = 30k\,. \end{aligned}$$

Dabei folgt Letzteres wiederum aus der Vorüberlegung (70.2). Nach dem Satz von Pythagoras gilt außerdem $e^2 = g^2 + b^2$. Setzt man alles zusammen, erhält man:

$$\begin{aligned} 90k &= \frac{45^2}{4} + \left(\frac{45}{2\sqrt{3}} - \sqrt{30k}\right)^2 \\ &= \frac{45^2}{4} + \frac{45^2}{12} - 45\sqrt{10k} + 30k \\ \iff \quad 45\sqrt{10k} &= -60k + \frac{45^2}{3} \\ \iff \quad 3\sqrt{10k} &= -4k + 45\,. \end{aligned}$$

Quadrieren – dies ist keine Äquivalenzumformung – liefert die Gleichung

$$16k^2 - 450k + 45^2 = 0$$

mit den beiden Lösungen

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= \frac{225 \pm \sqrt{225^2 - 16 \cdot 45^2}}{16} = \frac{225 \pm 45\sqrt{25-16}}{16} = 45 \cdot \frac{5 \pm 3}{16} \\ k_1 &= \frac{45}{8}\,, \qquad k_2 = \frac{45}{2}\,. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt für die Radien $k < m < g = \frac{45}{2}$, daher hat die kleine Kugel einen Durchmesser von $2 \cdot \frac{45}{8} = \frac{45}{4}$ cm.

Bemerkung: Dass die zweite Lösung der quadratischen Gleichung genau den Radius der großen Kugeln ergibt, ist kein Zufall, denn die dritte große Kugel erfüllt genau wie die kleine Kugel die Bedingungen, dass sie die beiden anderen großen Kugeln, die mittlere und die Ebene berührt. Das führt bis auf ein Vorzeichen auf dieselben Gleichungen, und dieses Vorzeichen verschwindet beim Quadrieren.

Zweite Bemerkung: Nachdem wir nun das Ergebnis haben, rechnen wir noch einmal konkret den Wert von b aus:

$$b = \frac{45}{2\sqrt{3}} - \sqrt{30k} = \frac{45}{2\sqrt{3}} - \sqrt{30\frac{45}{8}} = \frac{15\sqrt{3}}{2} - \frac{15\sqrt{3}}{2} = 0\,.$$

Das bedeutet, dass K genau in der Mitte zwischen G_1 und G_2 liegt! Damit berührt die kleine Kugel auch eine auf der anderen Seite eingefügte mittelgroße Kugel, man kann also wirklich sagen, dass der Raum dadurch recht gut ausgenutzt wird. (Und es bedeutet, dass wir mit der Skizze etwas geschummelt haben – aber anders wäre es natürlich nicht gut herzuleiten gewesen.)

Lösungen zu Aufgabenblatt 71

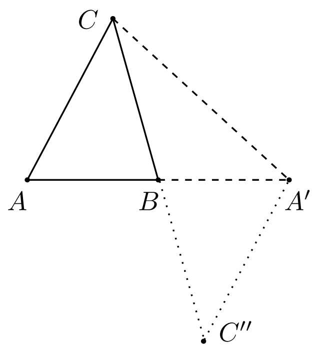
L 71.1 Im ersten Teil der Aufgabe berechnen wir die Summe aller Gewichtsstücke, also $S_1 = 1\,\mathrm{g} + 2\,\mathrm{g} + \ldots + 70\,\mathrm{g} = \frac{70 \cdot 71}{2}\,\mathrm{g} = 2485\,\mathrm{g}$. Dies ist eine ungerade Zahl, daher kann man die Gewichte nicht so auf zwei Waagschalen aufteilen, dass diese im Gleichgewicht sind.

Wenn wir beim zweiten Teil der Aufgabe die Summe der Gewichte ausrechnen, erhalten wir $S_2 = 2485\,\mathrm{g} + 71\,\mathrm{g} = 2556\,\mathrm{g}$. Im Gegensatz zum ersten Teil ist dies eine gerade Zahl. Sie lässt sich als Produkt zerlegen in die Faktoren $2556 = 36 \cdot 71$. Das 71-g-Stück wiegt bereits 71 g, und alle anderen Gewichte kann man praktischerweise vollständig zu Paaren zusammenfassen, die insgesamt je 71 g wiegen: $1\,\mathrm{g} + 70\,\mathrm{g}, 2\,\mathrm{g} + 69\,\mathrm{g}, \ldots, 34\,\mathrm{g} + 37\,\mathrm{g}, 35\,\mathrm{g} + 36\,\mathrm{g}$.
(Nicht umsonst lässt hier übrigens der Beweis von Gauß für seine Summationsformel grüßen . . .) Wir sehen, dass wir so 36 Teilmengen zu 71 g bilden können. Also legen wir auf jede Waagschale 18 dieser 71-g-Teilmengen und erhalten ein Gleichgewicht.

Bemerkung: Diese Anleitung liefert schon sehr viele Möglichkeiten, die Gewichte zu verteilen, es gibt aber immer noch andere Varianten.

L 71.2 Wir betrachten zunächst ein allgemeines (nicht notwendigerweise gleichseitiges) Dreieck mit Eckpunkten A, B und C. Mit h_C bezeichnen wir die Höhe des Punktes C über der Seite AB, mit $|AB|$ die Länge der Seite AB. Der Flächeninhalt F ist dann bekanntlich $F = \frac{1}{2}|AB| \cdot h_C$.

Nun spiegeln wir einen der Eckpunkte an einem anderen Eckpunkt und erhalten ein Dreieck $A'B'C'$. Im Bild wird zunächst A an B gespiegelt (den Spiegelpunkt nennen wir A') und es gilt $B' = B$ und $C' = C$. Wir sehen, dass $|AB| = |A'B'|$ gilt, und auch die Höhe des Dreiecks hat sich durch das Spiegeln nicht verändert. Somit sind die Flächeninhalte der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gleich.
Man sagt, der Flächeninhalt ist eine *Invariante* (konstante Größe) unter der Punktspiegelungsoperation.



Diese Tatsache gilt natürlich insbesondere für unser gleichseitiges Dreieck aus der Aufgabenstellung, d. h. ein durch mehrfaches Anwenden der Spiegelungsoperation erhaltenes gleichseitiges Dreieck muss denselben Flächeninhalt wie das Ausgangsdreieck haben. Also müssen auch die Seitenlängen dieselben sein. Man kann sich noch leicht überlegen, dass man durch Anwenden der Spiegelungsoperation auch tatsächlich wieder zu einem gleichseitigen Dreieck kommen kann: Zum Beispiel durch Spiegeln von A an B und $C' = C$ an $B' = B$. (In der Skizze oben entsteht durch dieses Vorgehen ebenfalls ein zum Ausgangsdreieck kongruentes Dreieck.)

L 71.3 Zunächst möchten wir einen allgemeinen Sachverhalt feststellen: Zwei Abstandswerte an zwei Bäumen können nur dann zur gleichen Koordinatenrichtung auf der Oberfläche (also x oder y) gehören, wenn entweder die Summe dieser beiden Werte gleich dem Abstand der beiden Bäume in dieser Koordinatenrichtung ist (dann liegt der Schatz in dieser Richtung zwischen den Bäumen) oder wenn die Differenz gleich deren Abstand ist – in diesem Fall liegt der Schatz jenseits des Baumes, der den kleineren Wert hat. (Sollte einer der beiden Werte null sein, treffen natürlich entweder beide Fälle zu oder sie treffen beide nicht zu.) In jedem Fall ist die Summe der beiden Abstände mindestens so groß wie der Abstand zwischen den Bäumen.
Ganz offensichtlich gilt für die z-Richtung, dass die Werte an beiden Bäumen gleich sein müssen.[1]

Zu den Bäumen A und B betrachten wir besonders den Wert 4 bei Baum B. Er kann keine z-Koordinate sein, da der Wert 4 nicht auch bei A auftritt. Wäre er der y-Abstand zum Schatz – wir schreiben das als $B_y = 4$ –, so müsste A_y gleich 2 oder 6 sein, da der Abstand der Bäume in y-Richtung 2 ist. Es wäre also $A_y = 2$, weil es bei A keine 6 gibt. Dann gibt es jedoch keine Möglichkeit mehr, Werte für die x-Abstände zu finden, da die höchste noch erreichbare Summe von Abständen $1 + 2 = 3$ beträgt.
Daher ist die 4 bei B der x-Abstand, $B_x = 4$. Es ist dann $A_x = 0$, da bei A keine 8 vorhanden ist. Nun kann keine y-Koordinate 2 sein, weil dann die Koordinate am anderen Baum 0 oder 4 sein müsste. Damit ist $A_y = B_y = 1$ und $A_z = B_z = 2$. Der Schatz liegt von A aus gesehen am Punkt $(0, -1)$ in der Tiefe 2.

Beim zweiten Fall betrachten wir zunächst die Abstandsdaten an den Bäumen C und D. Da es nur drei Koordinatenrichtungen gibt, muss es (nach dem Schubfachprinzip) eine geben, die auf beiden noch zu lesenden Abstandspaaren

[1] Genau genommen ist das auch nur ein Spezialfall der vorigen Betrachtung, nämlich der Fall, dass der Abstand der Bäume in einer Koordinatenrichtung null ist.

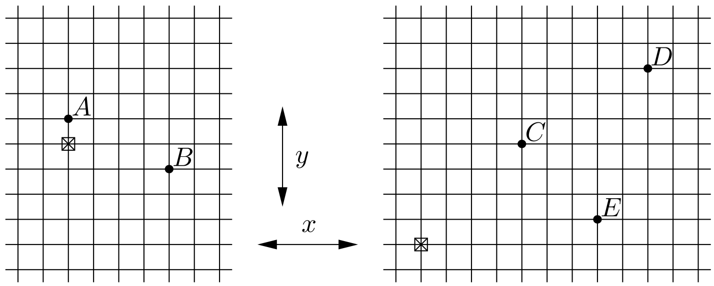


Abbildung 71.1: Lage der Schätze relativ zu den Bäumen

vertreten ist. Weil D keine 4 hat, kann dies nicht die z-Richtung sein. Zur x-Richtung können auch nicht Werte auf beiden Bäumen gehören, weil sich 5 (der Abstand der Bäume in x-Richtung) weder als Differenz noch als Summe der gegebenen Werte darstellen lässt.
Damit steht auf jedem Baum der y-Abstand; und es bleibt wegen des Baumabstandes von 3 nur die Möglichkeit $C_y = 4$, $D_y = 7$, der Schatz liegt somit schon einmal 4 Einheiten südlich von C.
Die 7 bei E ist daher kein y-Abstand. Und da die Werte 4 bei C und 6 bei D nicht beides x-Abstände sein können, ist einer der Werte die Tiefe des Schatzverstecks und der andere ein x-Abstand. Damit kann die 7 bei E auch kein z-Abstand sein, es ist also $E_x = 7$. Wegen des Baumabstands 2 von E und D in x-Richtung ist $D_x \neq 6$, also muss 6 die Tiefe sein und zudem $C_x = 4$ gelten. Das passt auch zum x-Abstand 3 zwischen C und E, und damit liegt der Schatz je 4 Einheiten südlich und westlich von C in 6 Einheiten Tiefe.

Lösungsvariante:
Mit etwas mehr (Schreib-)Arbeit kann man diese Aufgabe auch mit einer Fallunterscheidung nach der möglichen Tiefe des Schatzes angehen. Wir wollen das nur skizzieren (und nur deshalb, so meinen wir, ist diese Lösung kürzer als die oben angegebene, ausführlich aufgeschriebene Variante):
Bei den Bäumen A und B muss die Tiefe 1 oder 2 sein; in beiden Fällen gibt es für jeden Baum für sich gesehen noch 8 Möglichkeiten, wo der Schatz liegen könnte; nur im Fall der Tiefe 2 sind darunter zwei gleiche Punkte.
Beim zweiten Schatz kann die Tiefe zum einen 4 sein; dann sind die Koordinaten bei D die Koordinaten auf der Oberfläche, also verbleiben noch 8 mögliche Orte. Keiner jedoch hat einen Abstand 7 in x- oder y-Richtung von Baum E.
Wenn die Tiefe nicht 4 ist, dann müssen die Koordinaten bei C die Oberflächenkoordinaten sein, womit es nur noch 4 mögliche Standorte gibt. Die Koordinate 6 von D kann dann keine x- oder y-Koordinate sein, weil sie zu keinem der vier

Orte passt, damit ist die Tiefe 6, ferner ist (wie oben) die 7 bei D zwingend die y-Koordinate und schließlich die 7 bei E die x-Koordinate. Damit erhält man die Lösung.

L 71.4 Teil a): Seien a, b rationale, aber nicht-ganze Zahlen, welche die gegebenen Bedingungen erfüllen. Da $a+b$ ganzzahlig ist, lassen sich beide Zahlen auf einen gemeinsamen Nenner $q \in \mathbb{N}$ bringen, also als $a = \frac{p_1}{q}$ und $b = \frac{p_2}{q}$ schreiben, wobei p_1 und p_2 beide nicht durch q teilbar sind (denn sonst wäre $a \in \mathbb{Z}$ oder $b \in \mathbb{Z}$). Weiterhin folgt aus der Ganzzahligkeit der Summe $a+b$, dass $p_1 + p_2$ durch q teilbar ist, d. h. die Reste von a und b bei Division durch q addieren sich zu q. Somit gibt es einen Rest r mit $0 < r < q$ und ganze Zahlen n_1 und n_2 so, dass $a = \frac{n_1 \cdot q + r}{q}$ und $b = \frac{n_2 \cdot q - r}{q}$ gilt. Ohne Einschränkung können wir $\mathrm{ggT}(r,q) = 1$ annehmen (sonst könnten wir die Brüche kürzen).

Nun betrachten wir (unter Verwendung des Binomischen Lehrsatzes)

$$
\begin{aligned}
a^{2008} + b^{2008} &= \left(\frac{n_1 \cdot q + r}{q}\right)^{2008} + \left(\frac{n_2 \cdot q - r}{q}\right)^{2008} \\
&= \frac{\binom{2008}{2008}(n_1q)^{2008} + \binom{2008}{2007}(n_1q)^{2007}r^1 + \ldots + \binom{2008}{1}n_1qr^{2007} + \binom{2008}{0}r^{2008}}{q^{2008}} \\
&\quad + \frac{\binom{2008}{2008}(n_2q)^{2008} - \binom{2008}{2007}(n_2q)^{2007}r^1 \pm \ldots - \binom{2008}{1}n_2qr^{2007} + \binom{2008}{0}r^{2008}}{q^{2008}} .
\end{aligned}
$$

Im Fall $q > 2$ sind alle Summanden des Zählers bis auf $r^{2008} + r^{2008} = 2 \cdot r^{2008}$ durch q teilbar. Da r und q nach Voraussetzung teilerfremd sind und $q > 2$ ist, ist $2 \cdot r^{2008}$ nicht durch q teilbar. Daher ist der gesamte Zähler nicht durch q und damit auch nicht durch q^{2008} teilbar. Somit ist in diesem Fall $a^{2008} + b^{2008}$ keine ganze Zahl.
Im Fall $q = 2$ muss $r = 1$ sein. Daher ist $2 \cdot r^{2008} = 2$ nicht durch $q^2 = 4$ teilbar. Da alle anderen Summanden des Zählers jedoch entweder den Faktor q^2 oder $\binom{2008}{1} \cdot q = 4016 = 4 \cdot 1004$ enthalten, werden diese von q^2 geteilt. Somit ist der Zähler insgesamt aber nicht durch q^2 und damit auch nicht durch $q^{2008} = (q^2)^{1004}$ teilbar, das heißt, auch hier ist $a^{2008} + b^{2008}$ keine ganze Zahl.

Somit gibt es kein Zahlenpaar (a,b), das die Bedingungen erfüllt.

Teil b): Eine analoge Überlegung wie im ersten Teil kann man selbstverständlich auch hier anstellen. Der Unterschied ist, dass die Vorzeichen der jeweils letzten Terme im Zähler verschieden sind – in der Gesamtsumme fallen sie damit weg. Nun haben aber alle verbleibenden Summanden im Zähler mindestens

einen Faktor n_i und einen Faktor q. Wenn man dafür sorgt, dass jedes n_i durch q^{2008} teilbar ist, ist jeder Summand durch q^{2009} teilbar und man erhält quasi automatisch eine ganze Zahl.
Damit findet man sehr schnell ein Beispiel, was wir dennoch vollständig durchrechnen wollen (wir wählen $q = 2$, $n_1 = 0$, $n_2 = 2^{2008}$ und $r = 1$):

Es seien $a = \frac{1}{2}$ und $b = \frac{2^{2009}-1}{2}$. Dann sind a und b rational, aber nicht ganzzahlig. Weiterhin ist $a + b = \frac{2^{2009}}{2} = 2^{2008}$ ganzzahlig und es gilt:

$$a^{2009} + b^{2009}$$
$$= \frac{1 + \left(\binom{2009}{2009}\left(2^{2009}\right)^{2009} - \binom{2009}{2008}\left(2^{2009}\right)^{2008} \pm \ldots + \binom{2009}{1}2^{2009} - \binom{2009}{0} \cdot 1\right)}{2^{2009}}$$

$$= \binom{2009}{2009}\left(2^{2009}\right)^{2008} - \binom{2009}{2008}\left(2^{2009}\right)^{2007} \pm \ldots + \binom{2009}{1}$$

ist eine ganze Zahl. Also erfüllen a und b die Bedingungen.

Lösungen zu Aufgabenblatt 72

L 72.1 Wir betrachten Brüche mit je zweistelligem Zähler und Nenner, bei denen Einerstelle des Zählers und Zehnerstelle des Nenners identisch sind, also Brüche der Form $\frac{10a+b}{10b+c}$.

Da sowohl $10a+b$ als auch $10b+c$ zweistellig sein sollen, muss $a, b \in \{1, \ldots, 9\}$ gelten. Weiterhin wollen wir „falsch" kürzen, d. h. wir wollen den gegebenen Term mit dem Bruch $\frac{a}{c}$ vergleichen. Daher muss $c \neq 0$ gelten, also muss auch $c \in \{1, \ldots, 9\}$ sein.

Das „falsche" Kürzen funktioniert unter diesen Voraussetzungen genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \frac{10a+b}{10b+c} &= \frac{a}{c} \\ \Leftrightarrow \quad 10ac+bc &= 10ab+ac \\ \Leftrightarrow \quad 9ac &= b \cdot (10a-c) \end{aligned} \tag{72.1}$$

gilt. Aus der letzten Gleichung folgt, dass 9 den Term $b \cdot (10a - c)$ teilt. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: 9 teilt $10a - c$.
Es gilt $10a - c = 9a + (a - c)$ und $9 \mid 9a$, und somit ist dieser Fall äquivalent zu $9 \mid (a-c)$. Wegen $a, c \in \{1, \ldots, 9\}$ ist weiterhin $-9 = 0-9 < a-c < 9-0 = 9$, und zusammen mit $9 \mid (a - c)$ ergibt sich $a - c = 0$ oder äquivalent $a = c$. Setzen wir dies in (72.1) ein, erhalten wir: $9a^2 = 9ab$, also $a = b = c$.
Probe: Es ist $\frac{10a+a}{10a+a} = 1 = \frac{a}{a}$ für alle $a \in \{1, \ldots, 9\}$.

Fall 2: 3 teilt b.
Fall 2a: $b = 3$.
In diesem Fall erhalten wir aus (72.1), dass $3ac = 10a - c$ gelten muss, also $c = \frac{10a}{3a+1}$. Da c insbesondere ganzzahlig ist, folgt daraus $(3a + 1) \mid 10a$ und zusammen mit $10a = 3 \cdot (3a + 1) + a - 3$ schließlich $(3a + 1) \mid (a - 3)$. Da $3a + 1 \geq 4$ und $3a + 1 > a - 3 \geq -2$ gilt, kann dies nur im Fall $a - 3 = 0$, d. h. $a = 3$ erfüllt sein. Dies liefert $c = \frac{10 \cdot 3}{3 \cdot 3+1} = 3$. Wir haben also einen Spezialfall der Lösung aus dem 1. Fall mit $a = b = c = 3$.
Fall 2b: $b = 6$.
Gleichung (72.1) liefert uns nun $3ac = 20a - 2c$, also $c = \frac{20a}{3a+2}$, woraus wie oben $(3a + 2) \mid 20a$ folgt. Dieses ist nur für $a \in \{1, 2, 6\}$ erfüllt. Mit $c = \frac{20a}{3a+2}$ erhalten wir für c entsprechend die Werte 4, 5 und 6.

Probe: $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$, $\frac{26}{65} = \frac{2}{5}$ sowie wie im 1. Fall $\frac{66}{66} = 1 = \frac{6}{6}$.
Fall 2c: $b = 9$.
Hier gilt aufgrund von (72.1), dass $ac = 10a - c$ und somit $c = \frac{10a}{a+1}$ ist. Aus der Ganzzahligkeit von c erhalten wir $(a+1) \mid 10a$ und mit $10a = 10(a+1) - 10$, dass $(a+1) \mid 10$ gilt. Also ist $a + 1 \in \{1, 2, 5, 10\}$ bzw. $a \in \{1, 4, 9\}$. Die Gleichung $c = \frac{10a}{a+1}$ liefert uns für c entsprechend 5, 8 und 9.
Probe: $\frac{19}{95} = \frac{1}{5}$, $\frac{49}{98} = \frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ sowie wie im 1. Fall $\frac{99}{99} = 1 = \frac{9}{9}$.

Insgesamt haben wir also folgende Lösungen gefunden: $\frac{\overline{aa}}{\overline{aa}}$ mit $a \in \{1, \ldots, 9\}$, $\frac{16}{64}$, $\frac{26}{65}$, $\frac{19}{95}$ und $\frac{49}{98}$. Aus der obigen Fallunterscheidung geht hervor, dass dies alle Lösungen sind.

Bemerkung zur Notation: Wir verwenden die Notation $\overline{xy}$ als Schreibweise für die Zifferndarstellung, also $\overline{xy} := 10x + y$.

Lösungsvariante:
Wie oben folgern wir, dass a, b und c Elemente von $\{1, \ldots, 9\}$ sind.
Wir stellen noch einmal die Ausgangsgleichung um: Das „falsche“ Kürzen funktioniert genau dann, wenn

$$\begin{aligned} & \frac{10a + b}{10b + c} = \frac{a}{c} \\ \Leftrightarrow\quad & 10ac + bc = 10ab + ac \\ \Leftrightarrow\quad & c \cdot (b - a) = 10 \cdot a \cdot (b - c) \end{aligned} \tag{72.2}$$

gilt. Zusätzlich gilt dann:

$$10b + c = \frac{c}{a}(10a + b) = 10c + \frac{c}{a}b\,.$$

Wäre $c > b$, müsste $10b + c < 10(b+1) \leq 10c < 10c + \frac{c}{a}b = 10b + c$ sein (wegen $c \leq 9$ und $\frac{c}{a}b > 0$), dies ist ein Widerspruch. Also folgt

$$c \leq b\,.$$

Damit ist die rechte Seite in (72.2) nichtnegativ; also muss auch $b - a \geq 0$ gelten.
Es stehen auf beiden Seiten in (72.2) ganze Zahlen, daher ist 10 und damit auch 5 ein Teiler von $c \cdot (b - a)$. Wegen $1 \leq c \leq 9$ und $0 \leq b - a \leq 9$ gilt $c = 5$ oder $5 \mid (b - a)$.

Fall 1: $c = 5$.
Dann kann wegen $c \leq b$ die Zahl b nur in der Menge $\{5, 6, \ldots, 9\}$ liegen. Aus (72.2) ergibt sich durch Umstellen

$$a = \frac{bc}{10b - 9c} = \frac{b}{2b - 9}\,.$$

Wir machen eine Tabelle mit den verbleibenden Möglichkeiten; wenn sich für a kein ganzzahliger Wert ergibt, kann sich daraus keine Lösung ergeben:

b	a	Probe
5	5	$\frac{55}{55} = \frac{5}{5}$
6	2	$\frac{26}{65} = \frac{2}{5}$
7	$\frac{7}{5}$	—
8	$\frac{8}{7}$	—
9	1	$\frac{19}{95} = \frac{1}{5}$

Fall 2: $5 \mid (b-a)$.
Fall 2a: $b = a$.
Dieser Fall ist einfach: Aus (72.2) folgt sofort $b = c = a$ und damit ergeben sich die trivialen Lösungen $\frac{\overline{aa}}{\overline{aa}} = \frac{a}{a}$ mit $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.
Fall 2b: $b \neq a$.
Auch hier machen wir eine Tabelle mit den verbleibenden Möglichkeiten. Man beachte dabei, dass sich aus der Wahl von b der Wert von a eindeutig aus der Bedingung $5 \mid (b-a)$ und $a > 0$ ergibt: Da außerdem wie oben gezeigt $b \geq a$ gilt, muss $b \geq 6$ und $a = b - 5$ sein. Der Wert von c ergibt sich hier aus der Umstellung $c = \frac{10ab}{10a+b-a} = \frac{10ab}{10a+5} = \frac{2ab}{2a+1}$ der Gleichung (72.2):

b	a	c	Probe
6	1	4	$\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$
7	2	$\frac{28}{5}$	—
8	3	$\frac{48}{7}$	—
9	4	8	$\frac{49}{98} = \frac{4}{8}$

Es ergeben sich also dieselben Lösungen wie oben: $\frac{16}{64}$, $\frac{26}{65}$, $\frac{19}{95}$ und $\frac{49}{98}$ sowie $\frac{\overline{aa}}{\overline{aa}}$ mit $a \in \{1, \ldots, 9\}$.

Anmerkung: Wir meinten mit unserer Aufgabenstellung, dass diagonal „links unten gegen rechts oben“ gekürzt wird.
Für den Fall, dass man allgemeiner andere gleiche Ziffern wegkürzen will, wollen wir das auch kurz behandeln:

Fall 1: Diagonales Kürzen andersherum
Es soll also $\frac{\overline{ab}}{\overline{ca}} = \frac{b}{c}$ sein. Dieser Fall ist äquivalent zu dem oben behandelten: Man bilde einfach die Kehrwerte.

Fall 2: Senkrechtes Kürzen in den Zehnerstellen
Hier führt der Ansatz $\frac{\overline{ab}}{\overline{ac}} = \frac{b}{c}$ sofort zu der Gleichheit $10ac + bc = 10ab + bc$, weiter $10ac = 10ab$, damit $b = c$ und nach Einsetzen zu $\frac{\overline{ab}}{\overline{ab}} = \frac{b}{b} = 1$ mit $a, b \in \{1, 2, \ldots, 9\}$; es gibt also im Prinzip nur „triviale“ Fälle.

Fall 3: Senkrechtes Kürzen in den Einerstellen
Hier führt der Ansatz $\frac{\overline{ab}}{\overline{cb}} = \frac{a}{c}$ unmittelbar zu der Gleichheit $10ac + bc = 10ac + ab$. Es ist dann entweder $b = 0$ oder es folgt weiter $bc = ab$, damit $a = c$ und nach Einsetzen $\frac{\overline{ab}}{\overline{ab}} = \frac{a}{a} = 1$ mit $a, b \in \{1, 2, \ldots, 9\}$; auch hier gibt es daher im Prinzip nur „triviale“ Fälle.

L 72.2 Susi hat entweder ebenfalls zwei normale Würfel oder die beiden Würfel 1, 2, 2, 3, 3, 4 und 1, 3, 4, 5, 6, 8.

Bei einem herkömmlichen Würfelpaar hat man folgende Wahrscheinlichkeiten für die Augensummen $n = 2, 3, 4, \ldots, 12$:

Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Möglichkeiten	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Aus der Tatsache, dass Susis Würfelpaar für jede Augensumme dieselbe Wahrscheinlichkeit haben soll, folgt – da auch sie zwei Würfel und damit 36 verschiedene Möglichkeiten hat –, dass es für jede Augensumme bei Susi dieselbe Anzahl von Möglichkeiten gibt. Mit diesem Hauptargument wollen wir nun die Lösung ableiten.
Leicht sieht man, dass jeder von Susis Würfeln genau eine Eins haben muss, da es sonst keine oder mehr Kombinationsmöglichkeiten gäbe, eine Zwei zu würfeln.
Es folgt nun eine etwas umfangreiche Fallunterscheidung; zur besseren Mitverfolgbarkeit ist bei jedem Unterfall auch noch in einer kleinen Tabelle der aktuelle Stand der Belegung der Würfel angegeben:

1	.	.	.	.	.
1	.	.	.	.	.

Susi hat nach Voraussetzung genau zwei Möglichkeiten, eine Drei zu würfeln. Daher müssen auf den beiden Würfeln insgesamt genau zwei Zweien vorhanden sein, denn auf jedem Würfel kann sich eine Zwei mit der genau einen Eins auf dem anderen Würfel zu einer Drei addieren.

Fall 1: Jeder Würfel von Susi hat genau eine Zwei.

1	2	.	.	.	.
1	2	.	.	.	.

Die Würfel müssen zusammen zwei Dreien besitzen, da wir sonst für die Augensumme vier nicht genau drei Möglichkeiten hätten (möglich sind (1, 3), (3, 1), (2, 2)).
Für die Verteilung der Dreien gibt es wieder zwei Variationen.

Fall 1.1: Ein Würfel hat beide Dreien.

1	2	3	3	.	.
1	2	.	.	.	.

Für die Augensumme fünf gibt es bislang bereits zwei Möglichkeiten. Auf den zweiten Würfel darf keine Drei kommen, weil es dann zu viele Möglichkeiten für eine Vier gäbe. Also müssen Vieren für die fehlenden Möglichkeiten sorgen; wir brauchen davon mit dem gleichen Argument wie oben genau zwei Stück.

1	2	3	3	4	4
1	2	.	.	.	.

1	2	3	3	4	.
1	2	4	.	.	.

1	2	3	3	.	.
1	2	4	4	.	.

In jedem Fall gibt es bislang zwei Möglichkeiten für die Augensumme sechs. Also muss es insgesamt genau drei Fünfen geben, um auf fünf Möglichkeiten zu kommen.
Beim ersten der drei Muster sind es dann schon sechs Möglichkeiten für eine Acht – zu viele!
Wenn beim zweiten Muster die drei Fünfen zum unteren Würfel kommen, gilt das gleiche Argument.
Wenn dort eine Fünf auf den ersten Würfel kommt, muss die letzte Ziffer auf dem zweiten Würfel eine Sieben sein, damit auch die Zwölf darstellbar ist. Dann jedoch gibt es nur eine Möglichkeit für eine Elf – Widerspruch!
Beim letzten Muster muss ebenso die letzte zu verteilende Ziffer eine Sieben sein. Dann gibt es jedoch bereits zwei Möglichkeiten für die Zwölf, so dass dies auch nicht geht.

Fall 1.2: Jeder Würfel hat genau eine Drei.

1	2	3	.	.	.
1	2	3	.	.	.

Es wiederholt sich im Folgenden immer wieder ein ähnliches Argumentationsmuster: Neue Ziffern müssen größer als die bereits vergebenen sein, da sonst bereits fertig untersuchte Summen mehr Möglichkeiten erhalten würden. Die Anzahl der zu verteilenden Ziffern ist gleich der Anzahl der noch fehlenden Möglichkeiten, da sie für die gerade untersuchte Summe mit der jeweils nur einmal vorhandenen Eins summiert werden müssen.

Hier gibt es also für die Summe fünf noch zwei Vieren zu verteilen.
Zunächst nehmen wir an, dass beide Vieren auf einem Würfel sind.

1	2	3	4	4	.
1	2	3	.	.	.

Dann müssten wir noch zwei Fünfen für die Augensumme sechs verteilen. Diese, so nehmen wir an, seien zusammen auf dem zweiten Würfel.

1	2	3	4	4	.
1	2	3	5	5	.

Dann gäbe es für die letzten beiden freien Plätze nur noch zwei Sechsen, damit wir nur einmal eine Zwölf würfeln können. Dies ist aber ein Widerspruch, da wir dann für die Augensumme zehn nur zwei Möglichkeiten hätten statt drei.
Wenn jeder Würfel genau eine der beiden Fünfen hat,

1	2	3	4	4	5
1	2	3	5	.	.

dann muss der zweite Würfel genau eine Sieben haben, damit es für die Augensumme 12 genau eine Wurfmöglichkeit gibt. Der letzte freie Platz müsste dann allerdings von einer Sechs ausgefüllt werden. Damit gäbe es aber vier statt drei Möglichkeiten, eine Zehn zu würfeln.

Das bedeutet: Jeder Würfel besitzt (im Fall 1.2) auch genau eine Vier.

1	2	3	4	.	.
1	2	3	4	.	.

Wir brauchen nun allerdings noch zwei Fünfen, um fünf Möglichkeiten zu erhalten, eine Sechs zu würfeln. Diese können nicht auf demselben Würfel liegen, da dann auf dem anderen eine Sieben sein müsste, damit wir noch die Augensumme 12 würfeln können. Für diese gäbe es dann allerdings gleich zwei Möglichkeiten.
Also hat auch jeder Würfel genau eine Fünf und die letzten beiden Augenzahlen müssen dann Sechsen sein.

Damit hat Susi im Fall 1 zwei ganz normale Würfel.

Fall 2: Ein Würfel besitzt genau zwei Zweien und der andere keine.

1	2	2	.	.	.
1	.	.	.	.	.

Die beiden Würfel müssen dann noch zusammen drei Dreien enthalten, damit wir für die Augensumme vier drei Möglichkeiten haben. Diese können auf vier verschiedene Weisen verteilt sein. Der Würfel mit den Zweien (Würfel A) könnte alle drei Dreien, zwei, eine oder keine Drei enthalten.

Fall 2.1: A enthält alle drei Dreien.

1	2	2	3	3	3
1	.	.	.	.	.

Für die Augensumme zwölf muss der zweite Würfel dann eine Neun enthalten, was jedoch zu mindestens drei Möglichkeiten (anstatt einer) führt, eine Zwölf zu würfeln.

Fall 2.2: A enthält keine Drei.

1	2	2	.	.	.
1	3	3	3	.	.

Dann sind alle Dreien auf dem anderen Würfel und es gibt bereits sechs statt vier Möglichkeiten, eine Fünf zu würfeln.

Fall 2.3: A enthält genau eine Drei:

1	2	2	3	.	.
1	3	3	.	.	.

Dann gibt es schon vier Möglichkeiten für die Summe fünf. Also hat keiner der Würfel eine Vier, da es dann mehr als vier Möglichkeiten gäbe, eine Fünf zu würfeln.
Die Würfel müssten dann allerdings noch drei Fünfen enthalten, da wir auch fünf Möglichkeiten brauchen, eine Sechs zu würfeln.

Nun haben wir drei Unterfälle zu betrachten:

Fall 2.3.1: A hat keine Fünf.

1	2	2	3	.	.
1	3	3	5	5	5

Hier muss der Würfel A für die Augensumme zwölf eine Sieben haben, was aber wiederum zu mindestens drei Möglichkeiten (anstatt einer) führt, diese Summe zu würfeln.

Fall 2.3.2: A hat genau eine Fünf.

1	2	2	3	5	.
1	3	3	5	5	.

Um sechs Möglichkeiten für die Augensumme sieben zu erhalten, müssten dann die beiden verbleibenden Plätze jeweils eine Sechs haben. Damit hätte man jedoch drei statt zwei Möglichkeiten für die Augensumme elf.

Fall 2.3.3: A hat zwei Fünfen.

1	2	2	3	5	5
1	3	3	5	.	.

Dann muss der zweite Würfel für die Augensumme zwölf eine Sieben enthalten, was zu mindestens zwei Möglichkeiten (anstatt einer) führt, diese Summe zu würfeln.

Fall 2.4: Damit bleibt nur noch: Würfel A hat zwei Dreien.

1	2	2	3	3	.
1	3	.	.	.	.

Wir brauchen dann noch zwei Vieren, damit wir für die Augensumme fünf vier Kombinationen haben.

Fall 2.4.1: A hat keine Vier.

1	2	2	3	3	.
1	3	4	4	.	.

Damit haben wir bereits mindestens sechs (statt fünf) Möglichkeiten für die Augensumme sechs.

Es bleibt Fall 2.4.2: A hat genau eine Vier.

1	2	2	3	3	4
1	3	4	.	.	.

In diesem Fall müssen wir für die Augensumme sechs noch eine Fünf hinzufügen. Für die sechs Möglichkeiten der Summe sieben müssen wir noch eine Sechs ergänzen und für die Augensumme neun noch eine Acht. Auch für die restlichen Augensummen stimmt die Anzahl der Kombinationen mit der eines normalen Würfelpaares überein.

Damit könnte Susi also auch die beiden Würfel 1, 2, 2, 3, 3, 4 und 1, 3, 4, 5, 6, 8 haben.

Skizze einer alternativen Lösung:
Mit Hilfe sogenannter „erzeugender Funktionen" kann man auch auf folgende Weise zu einer Lösung kommen:
Für jede der Zahlen $n = 1, 2, 3, \ldots$ seien e_n bzw. z_n die Anzahlen der Zahlen n, die auf dem ersten bzw. zweiten Würfel vorkommen. Da nur sechs Zahlen auf jedem Würfel stehen, sind insbesondere bei allen denkbaren Würfeln fast alle e_n bzw. z_n gleich null (höchstens sechs sind von null verschieden).
Man definiert sich zwei (Polynom-)Funktionen

$$\begin{aligned} E(x) &= e_1x^1 + e_2x^2 + \ldots \\ Z(x) &= z_1x^1 + z_2x^2 + \ldots . \end{aligned}$$

Jetzt kommt der Trick: Berechnet man nämlich nun das Produkt

$$E(x) \cdot Z(x) = (e_1z_1)x^2 + (e_1z_2 + e_2z_1)x^3 + \ldots ,$$

so ist der Koeffizient vor x^m im Produkt gerade die Anzahl der Möglichkeiten, wie man den Exponenten m als Summe aus einem der in E vorkommenden Exponenten von x und einem der in Z vorkommenden Exponenten darstellen kann, wobei die Exponenten in E bzw. Z entsprechend ihrer Vielfachheit, die durch die e_n bzw. z_n gegeben sind, gezählt werden.

Für zwei Standardwürfel gilt also

$$E(x) = Z(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$$

und somit

$$E(x) \cdot Z(x) = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12} .$$

Zur Überprüfung: Es gibt also zum Beispiel 5 Möglichkeiten, mit zwei Standardwürfeln die Summe 8 zu würfeln, denn der Koeffizient vor x^8 im Produkt ist 5.

Die Frage ist nun: Gibt es zwei andere von Würfelbeschriftungen stammende Polynome $E(x)$ und $Z(x)$, für die

$$E(x) \cdot Z(x) = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12}$$

ist?
Um dies zu beantworten, zerlegt man das Produkt zunächst in irreduzible (=unzerlegbare) Faktoren – und diese Zerlegung ist eindeutig, was wir hier nicht beweisen wollen:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12} = \\ x^2(x+1)^2(x^2-x+1)^2(x^2+x+1)^2 . \end{aligned}$$

Man kann nun versuchen, diese acht Faktoren unter gewissen Nebenbedingungen zu zwei Polynomen zu kombinieren: Zunächst muss sowohl $E(x)$ als auch $Z(x)$ einen Faktor x bekommen, denn andernfalls hätte ein Würfel eine 0 auf einer seiner Seiten (die erzeugende Funktion des Würfels hätte einen Summanden $x^0 = 1$), was nicht sein soll. Weiter muss die Summe aller Koeffizienten in $E(x)$ und $Z(x)$ genau 6 sein, damit man genau sechs Zahlen auf die Seiten verteilt. Da die Summe der Koeffizienten in $E(x)$ und $Z(x)$ gerade der Wert $E(1)$ bzw. $Z(1)$ ist, muss man also obige Faktoren an der Stelle 1 auswerten (das ergibt der Reihe nach die Werte 1 für x, 2 für $x + 1$, 1 für $x^2 - x + 1$ und 3 für $x^2 + x + 1$) und diese Werte dann zu zwei Produkten mit Wert 6 kombinieren. Demnach muss sowohl $E(x)$ als auch $Z(x)$ je einmal den Faktor $x+1$ und x^2+x+1 enthalten. Einzig die Verteilung der beiden letzten Faktoren $x^2 - x + 1$ ist zunächst frei.

Es bleiben also die beiden Verteilungen

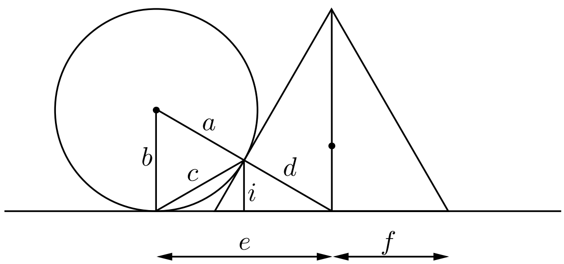
$$\begin{aligned} E(x) &= x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 \\ Z(x) &= E(x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} E(x) &= x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)^2 = x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8 \\ Z(x) &= x(x+1)(x^2+x+1) = x + 2x^2 + 2x^3 + x^4\,. \end{aligned}$$

Die erste Möglichkeit entspricht der zweier Standardwürfel, die zweite liefert eine Beschriftung von $1, 3, 4, 5, 6, 8$ für den ersten und $1, 2, 2, 3, 3, 4$ für den zweiten Würfel. Die Probe bestätigt, dass diese beiden Paare alle Bedingungen erfüllen.

L 72.3 Die drei kreisförmigen Deckchen können nur so liegen, dass sie den Tischrand genau berühren. Mit ihnen muss der Tisch schon einmal mindestens drei Meter lang sein. Die Frage ist also, wie die zwei dreieckigen Deckchen zu den runden hinzugefügt werden sollen.
Wir berechnen dazu zunächst allgemein den horizontalen Abstand der Mittelpunkte eines Dreiecks und eines Kreises, wenn sie sich wie folgt berühren:



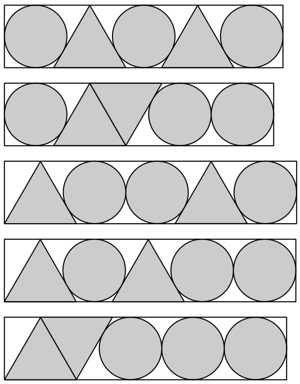
Es sei b der Radius des Kreises, der senkrecht auf der Tischkante steht, a sei der Radius, der dazu in einem Winkel von 60° steht und damit den Berührpunkt des Kreises mit dem Dreieck trifft.
Mit den weiteren Bezeichungen wie in der Zeichnung bilden dann die Strecken a, b und c ein gleichseitiges Dreieck, also ist $i = b/2$. Aus dem Strahlensatz folgt, dass $d = a = 1/2$ ist. Damit ist

$$e = \sqrt{\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Die Seitenlänge eines dreieckigen Deckchens mit Höhe 1 ist nach bekannter Formel $\frac{2}{\sqrt{3}}$, also ist

$$f = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

Im Wesentlichen sind die folgenden Anordnungen möglich:



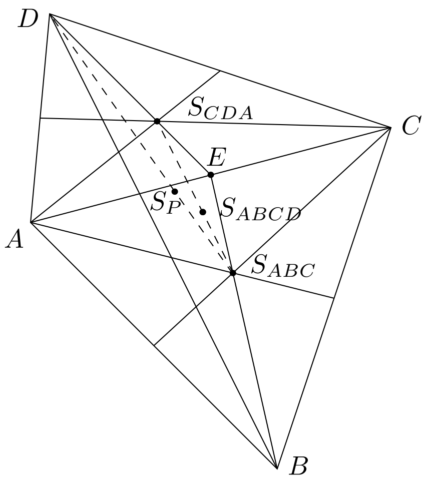
Mit den obigen Rechnungen ergeben sich damit die folgenden Tisch-Mindestlängen:

Anordnung	Länge
Kreis–Dreieck–Kreis–Dreieck–Kreis	$\frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \approx 4{,}464$
Kreis–Dreieck–Dreieck–Kreis–Kreis	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \approx 4{,}309$
Dreieck–Kreis–Kreis–Dreieck–Kreis	$\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \approx 4{,}675$
Dreieck–Kreis–Dreieck–Kreis–Kreis	wie eben: $\approx 4{,}675$
Dreieck–Dreieck–Kreis–Kreis–Kreis	$2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2{,}5 \approx 4{,}521$

Die zweite Anordnung ist also die beste, ein möglichst kurzer Tisch ist damit etwas mehr (damit sich die Deckchen nicht berühren) als 4,309 Meter lang.

Man könnte nun noch untersuchen, ob ein Verdrehen der dreieckigen Deckchen noch für Verbesserung sorgt – es ist recht offensichtlich, dass das nicht der Fall sein wird, aber schwierig zu beweisen. Da wir bewusst nur nach einem *möglichst* kurzen Tisch gefragt hatten und die anderen Lösungen auch schon recht umfangreich sind, begnügen wir uns hier mit diesem Ergebnis.

L 72.4 Wir übersetzen zunächst die Voraussetzungen der Aufgabenstellung in geometrische Aussagen. Dass die vier unten hängenden Holzteile waagerecht hängen, heißt, dass der Aufhängepunkt gleich dem Schwerpunkt des Vierecks (als Fläche gesehen) sein muss. An dem fünften, oberen Brett hängen noch an den Ecken die vier anderen Bretter, wodurch sich an der waagerechten Lage nichts ändert. Daraus folgt, dass der Aufhängepunkt auch gleich dem Schwerpunkt der vier Eckpunkte des Vierecks sein muss.
Gesucht ist also nach einem Viereck, bei dem der Schwerpunkt des Vierecks mit dem Schwerpunkt der vier Eckpunkte zusammenfällt. Daher überlegen wir uns als Erstes, wie man diese Schwerpunkte konstruieren kann.
Beim Dreieck entspricht der Schwerpunkt bekanntlich dem Schnittpunkt der Seitenhalbierenden. Und zwar ist das dann gleichzeitig der Schwerpunkt des Dreiecks als Fläche als auch der Schwerpunkt der drei Eck*punkte*. Bei einem Viereck fallen die Punkte offensichtlich nicht mehr in jedem Fall zusammen, denn wir können ja auf einer der Seiten eines Dreiecks einfach einen weiteren Punkt zufügen – an dem Schwerpunkt der Fläche ändert das nichts, wohl aber am Schwerpunkt der Eckpunkte, der dann zu dem neuen Punkt hingezogen wird.
Wir betrachten ein beliebiges Viereck $ABCD$ (siehe Skizze). Den Schwerpunkt des Dreiecks ABC bezeichnen wir mit S_{ABC}. Der Schwerpunkt der vier Eckpunkte muss dann auf der Strecke $S_{ABC}D$ liegen. (Genau genommen liegt er auf dem Punkt S_P mit $\frac{|S_P S_{ABC}|}{|S_P D|} = \frac{1}{3}$, weil S_{ABC} dreimal so hoch gewichtet ist wie D. Die genaue Lage ist hier aber nicht mehr wichtig.) Um die Lage des Schwerpunktes S_{ABCD} des Vierecks zu bestimmen, betrachten wir noch den Schwerpunkt S_{CDA} des Dreiecks CDA. Die Dreiecke ABC und CDA stellen eine disjunkte Zerlegung des Vierecks $ABCD$ dar, daher muss der Schwerpunkt von $ABCD$ auf der Strecke $S_{ABC}S_{CDA}$ liegen. (Genauso muss der Punkt S_{ABCD} auf der Strecke $S_{BCD}S_{DAB}$ liegen, womit man ihn als den Schnittpunkt dieser beiden Strecken konstruieren kann; aber auch hier brauchen wir diese weitere Information für die Aufgabe nicht mehr.)
Oben wurde gezeigt, dass der Schwerpunkt S_{ABCD} des Vierecks und der Schwerpunkt S_P seiner vier Eckpunkte hier zusammenfallen. Weil S_P auf der Geraden



$(S_{ABC}D)$ liegt, liegt also S_{ABCD} auf dieser Geraden. Mit S_{ABC} und S_{ABCD} liegt aber auch S_{CDA} auf dieser Geraden; und mit D und S_{CDA} muss auch der Mittelpunkt E der Strecke AC auf der Geraden $(S_{ABC}D)$ liegen (da er ja ein Seitenmittelpunkt des Dreiecks CDA – und auch des Dreiecks ABC – ist). Da nun schließlich E und S_{ABC} auf der Geraden liegen, muss auch B auf ihr liegen. Zusammengefasst ist die Gerade gleich der Geraden (BD), und die Diagonale AC wird von ihr in E geschnitten. Auf analoge Weise folgt, dass der Mittelpunkt von BD auf der Geraden (AC) liegt.
In unserem gesuchten Viereck schneiden sich also die beiden Diagonalen in ihren Mittelpunkten.
Daraus folgt sofort (denn es ist $|AE| = |CE|$ und $|BE| = |DE|$, und die von diesen Strecken eingeschlossenen Winkel sind jeweils Scheitelwinkel), dass die Dreiecke ABE und CDE kongruent sind, ebenso BCE und DAE. Folglich gilt $|AB| = |CD|$ und $|BC| = DA$, womit $ABCD$ ein Parallelogramm sein muss.

Lösungen zu Aufgabenblatt 73

$\boxed{\textbf{L 73.1}}$ Gesucht sind alle $a \in \{0,1,\dots,9\}$, $b \in \{1,\dots,9\}$, für die $\frac{a}{b} = 0{,}abbb\dots$ gilt.
Zunächst stellen wir fest, dass für $c \in \{0,1,\dots,9\}$ die Darstellung $\frac{c}{90} = 0{,}0cccc\dots$ gilt. Somit lässt sich

$$0{,}abbb\dots = \frac{a}{10} + \frac{b}{90}$$

schreiben. Daraus ergibt sich folgende äquivalente Aufgabenstellung:
Gesucht sind alle $a \in \{0,1,\dots,9\}$, $b \in \{1,\dots,9\}$ mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} && \frac{a}{b} &= \frac{a}{10} + \frac{b}{90} \\ \Leftrightarrow && 90a &= 9ab + b^2 \\ \Leftrightarrow && 9a \cdot (10-b) &= b^2\,. \end{aligned} \tag{73.1}$$

Da nun 9 die linke Seite von (73.1) teilt, muss dies auch für die rechte Seite gelten, d.h. $9 \mid b^2$. Daraus folgt $3 \mid b$, also $b \in \{3,6,9\}$. In der folgenden Fallunterscheidung verwenden wir jeweils die Beziehung

$$a = \frac{b^2}{9 \cdot (10-b)}\,,$$

die sich aus (73.1) ergibt.

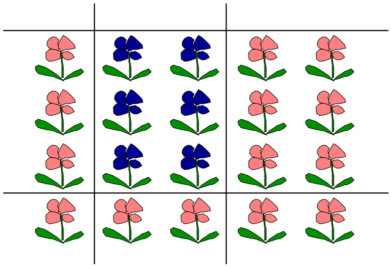
1. Fall: $b = 3$.
Dann ist $a = \frac{3^2}{9\cdot(10-3)} = \frac{9}{9\cdot 7} = \frac{1}{7} \notin \{0,\dots,9\}$.

2. Fall: $b = 6$.
Dann ist $a = \frac{6^2}{9\cdot(10-6)} = 1$. Dies ist das als Beispiel gegebene Zahlenpaar.

3. Fall: $b = 9$.
Dann ist $a = \frac{9^2}{9\cdot(10-9)} = 9$. Und in der Tat gilt $\frac{9}{9} = 1 = 0{,}999\dots$

Bemerkung: Die Darstellung $0{,}999\dots$ der Zahl 1 ist wohldefiniert. Allerdings muss man sich bewusst sein, dass durch sie die Zahlendarstellung nicht mehr eindeutig ist. Deshalb kann die Vereinbarung zweckmäßig sein, nur eine der beiden Darstellungen 1 und $0{,}999\dots$ zu benutzen – wenn man denn die Wahl hat. Nach Aufgabenstellung muss man hier die Darstellung $0{,}999\dots$ wählen und somit ergeben sich genau zwei Zahlenpaare mit der gesuchten Eigenschaft.

L 73.2 Karl kann die Position und Größe des blauen Blumenrechtecks eindeutig bestimmen, indem er vier Geraden im Beet verteilt, und zwar so, wie es die Abbildung zeigt (zwischen den Blumenreihen bzw. -spalten oder am Rand des Beetes):



Für die Platzierung der ersten horizontalen Geraden hat Karl 9 Möglichkeiten. Da die zweite horizontale Gerade nicht direkt auf der ersten liegen soll (denn sonst hätte unser blaues Blumenrechteck keine Ausdehnung) und die Reihenfolge der Verteilung keine Rolle spielt, hat er insgesamt $\frac{9\cdot 8}{2}$ Möglichkeiten, diese beiden horizontalen Geraden zu platzieren. Danach hat er – unabhängig von der Wahl der horizontalen Geraden – auch $\frac{9\cdot 8}{2}$ Möglichkeiten, die beiden vertikalen Geraden zu platzieren.
Insgesamt erhalten wir durch Multiplikation dieser beiden Anzahlen

$$\frac{9\cdot 8}{2}\cdot\frac{9\cdot 8}{2} = 36^2 = 1296$$

verschiedene Möglichkeiten für das blaue Blumenrechteck.

L 73.3 Wir bezeichnen die Tetraederecke, auf der der Frosch am Anfang sitzt, mit A, die anderen Ecken mit B, C und D.
Als Erstes können wir feststellen, dass aus Symmetriegründen zu jedem Zeitpunkt die Wahrscheinlichkeiten für den Aufenthalt des Frosches bei B, C und D gleich sind. Daher fassen wir sinnvollerweise diese Wahrscheinlichkeiten zur Wahrscheinlichkeit $p_i(BCD)$ zusammen, die dafür steht, dass er sich zur Minute i auf B, C *oder* D aufhält. Mit $p_i(A)$ sei entsprechend die Wahrscheinlichkeit für einen Aufenthalt bei A benannt. Außerdem ist klar, dass immer

$$p_i(BCD) = 1 - p_i(A)$$

gilt. Nun hat der Frosch folgende Möglichkeiten, zum Punkt A zu springen: Er muss auf einem der drei Punkte B, C oder D stehen und sich von den jeweils genau drei Möglichkeiten den Sprung nach A aussuchen. Daher gilt für jede Minute i:

$$p_{i+1}(A) = \frac{1}{3}p_i(B) + \frac{1}{3}p_i(C) + \frac{1}{3}p_i(D) = \frac{1}{3}p_i(BCD)\,. \qquad (73.2)$$

Nun schauen wir uns die Wahrscheinlichkeiten für die ersten Minuten an:

Minute	Aufenthaltswahrscheinlichkeit	
i	$p_i(A)$	$p_i(BCD)$
0	$1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$	$0 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}$
1	$0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$	$1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3\cdot 4}$	$\frac{2}{3} = \frac{3}{4} - \frac{1}{3\cdot 4}$
3	$\frac{2}{9} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3^2\cdot 4}$	$\frac{7}{9} = \frac{3}{4} + \frac{1}{3^2\cdot 4}$
4	$\frac{7}{27} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3^3\cdot 4}$	$\frac{20}{27} = \frac{3}{4} - \frac{1}{3^3\cdot 4}$
5	$\frac{20}{81} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3^4\cdot 4}$	$\frac{61}{81} = \frac{3}{4} + \frac{1}{3^4\cdot 4}$

Man erkennt zum einen, dass sich für jede einzelne Tetraederecke die Werte recht schnell dem Wert 1/4 nähern. Und wenn man davon inspiriert die genauen Werte als Abweichung davon angibt, erkennt man eine schöne Regelmäßigkeit: Wenn zur Minute i

$$p_i(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3^{i-1}\cdot 4}$$

gilt, so ist $p_i(BCD) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3^{i-1}\cdot 4}$ und mit (73.2) folgt

$$p_{i+1}(A) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3^i\cdot 4}\,.$$

Und entsprechend gilt noch eine Minute später

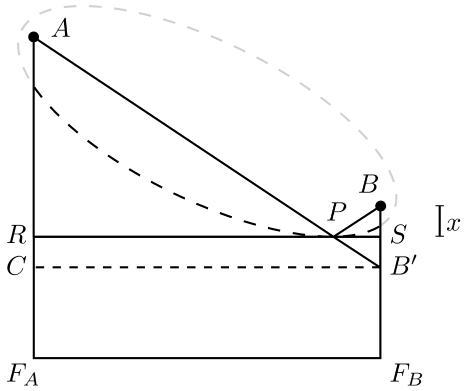
$$p_{i+2}(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3^{i+1}\cdot 4}\,.$$

Damit ist gezeigt, dass sich das Muster immer weiter so fortsetzt. Nach einem Tag (dieser hat 1440 Minuten) ist daher

$$p_{1440}(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3^{1439}\cdot 4} \approx \frac{1}{4} + 10^{-687}\,.$$

L 73.4 Bei dieser Aufgabe ist es sehr hilfreich, ein paar Tatsachen über Ellipsen zu kennen. Zunächst einmal ist eine Ellipse ja, entsprechend ihrer

Definition als Ortskurve, die Menge aller Punkte, die von zwei festen Punkten A und B eine konstante Abstandssumme haben.
Das bedeutet aber für unsere Aufgabe, dass, da das Seil stets zu den Baumspitzen (sie seien mit A und B bezeichnet – und die Fußpunkte der Bäume F_A und F_B) straff gespannt ist, sich die Rolle auf einem Ellipsenbogen bewegt – die Summe der Abstände der Rollenposition zu den beiden Punkten A und B ist zu jedem Zeitpunkt 120 Meter. Die beiden Punkte A und B werden dann übrigens die Brennpunkte der zugehörigen Ellipse genannt.



Gesucht ist also der „tiefste" Punkt P dieses Ellipsenbogens. In diesem tiefsten Punkt P lässt sich eine waagerechte Tangente, im Bild die Gerade (RS), an den Ellipsenbogen legen.
Nun verwenden wir eine weitere bemerkenswerte Ellipseneigenschaft: Sendet man einen Lichtstrahl von einem der Brennpunkte zum Rand der Ellipse und wird dieser dort entsprechend dem Reflexionsgesetz an der Ellipse bzw. genauer: an der dortigen Tangente reflektiert, so geht der reflektierte Strahl durch den anderen Brennpunkt. Exakt mathematisch formuliert ist also die Normale der Ellipse in einem Ellipsenpunkt stets die Symmetrieachse der beiden Verbindungsgeraden dieses Punktes zu den Brennpunkten.
In unserem Fall bedeutet dies nun, dass der Spiegelpunkt B' von B an der Geraden (RS) genau auf der Verlängerung der Geraden (AP) liegen muss, denn es gilt ja $\angle APR = \angle SPB = \angle B'PS$. Gleichzeitig ergibt sich damit übrigens, dass der tiefste Punkt zwischen den Bäumen erreicht wird, das heißt, dass die Skizze in dieser Form korrekt ist.
Da außerdem $|PB'| = |PB|$ ist, gilt $|AB'| = 120\,\mathrm{m}$, und deswegen folgt nach Satz des Pythagoras im Dreieck ACB' mit der Bezeichnung $|BS| = x$ (alles in Metern):

$$120^2 = |AB'|^2 = |AC|^2 + |CB'|^2 = (50 + 2x)^2 + 100^2 = 50^2 + 200x + 4x^2 + 100^2\,.$$

Dies bedeutet umgeformt: $x^2 + 50x - 475 = 0$. Diese quadratische Gleichung hat als einzige positive Lösung $x = -25 + 10 \cdot \sqrt{11} \approx 8{,}17$ (Meter). Demnach sind Klaus' Füße am niedrigsten Punkt

$$50 - (-25 + 10\sqrt{11}) - 2 = 73 - 10\sqrt{11} \approx 39{,}83$$

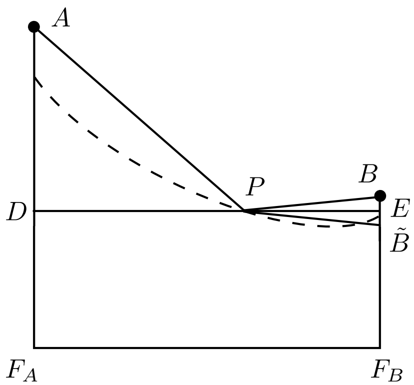
Meter über dem Erdboden.

Ein alternativer – und elementarer Lösungsweg
Auch wenn man die besondere Spiegelungseigenschaft der Ellipse nicht kennt, kann man zur Lösung gelangen, und zwar mit elementaren Ideen – eigentlich beweist man damit gerade die genannte Eigenschaft der Ellipse.
Sei P die Position der Rolle zu einem (fast) beliebigen Zeitpunkt, mit A und B seien wieder die Baumspitzen benannt. Es sei (DE) die Gerade durch P, die parallel zum Erdboden verläuft. Offensichtlich ist es möglich, dass Klaus unterhalb der Höhe von B hängt, also können wir unsere Überlegungen auf diesen Fall einschränken. (Das dient nur dazu, lästige Fallunterscheidungen zu vermeiden.) Wir spiegeln die Strecke PB an (DE) und erhalten die Strecke $P\tilde{B}$. Die Entfernung $|BE|$ heiße $\tilde{x}$. Dann ist

$$|A\tilde{B}| = \sqrt{(50 + 2\tilde{x})^2 + 100^2}\,. \tag{73.3}$$

Es gibt $\tilde{x}$ nach Definition an, wie tief der kleine Klaus unter der Baumspitze B hängt. Dieser Wert wird nach Gleichung (73.3) genau dann maximal, wenn $|A\tilde{B}|$ seinen maximalen Wert annimmt. Nach der Dreiecksungleichung gilt:

$$|A\tilde{B}| \leq |AP| + |P\tilde{B}| = |AP| + |PB| = 120\,. \tag{73.4}$$



Diesen Wert kann man aber auch wirklich erreichen: Wir wählen B' so auf dem Baumstamm des rechten Baumes, dass $|AB'| = 120$ gilt. Nach Pythagoras liegt dann B' genau $\sqrt{120^2 - 100^2} = \sqrt{4400} = 20 \cdot \sqrt{11} \approx 66{,}33$ Meter unterhalb der Höhe der Baumspitze A, also $\hat{x} := 20 \cdot \sqrt{11} - 50 \approx 16{,}33$ Meter unterhalb von B. Nun betrachten wir den Punkt P^*, der $x := \hat{x}/2$ Meter unterhalb von B auf der Strecke AB' liegt. Er hat offensichtlich von B denselben Abstand wie von B'; nach Konstruktion von B' gehört er somit zur Bahn der Rolle, an der Klaus hängt. Und da, wie schon angekündigt, mit ihm Gleichheit in (73.4) erreicht wird, ist kein Punkt tiefer als er, und wenn man es sich etwas genauer überlegt, sieht man auch leicht, dass dies der einzige solche Punkt ist.

Lösungen zu Aufgabenblatt 74

L 74.1 Um die Summe zu berechnen, überlegen wir zunächst, welche Zahlen Gustav am 31. Dezember aufschreibt. Am 1. Januar schreibt er eine Zahl, am 2. Januar zwei Zahlen, ... und schließlich am 30. Dezember 364 Zahlen. Also hat Gustav bis zum 30. Dezember $1+2+\ldots+364$ Zahlen aufgeschrieben. Um diese Zahl auszurechnen, verwenden wir die sogenannte „Gaußsche Summenformel“: $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ (siehe Bemerkung). In diesem Fall erhalten wir damit $1+2+\ldots+364=\frac{364\cdot 365}{2}=66\,430$.

Also sind $66\,430+1$, $66\,430+2$, $\ldots$, $66\,430+365$ Gustavs Zahlen für den 31. Dezember. Die gesuchte Zahl ist die Summe aus diesen und berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
&(66\,430+1)+(66\,430+2)+\ldots+(66\,430+365)\\
&=365\cdot 66\,430+(1+2+\ldots+365)\\
&=365\cdot 66\,430+\frac{365\cdot 366}{2}\\
&=24\,246\,950+66\,795=24\,313\,745\,,
\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt wiederum die „Gaußsche Summenformel“ verwendet haben.

Bemerkung: Wir wollen nun noch die oben verwendete „Gaußsche Summenformel“ beweisen. Neben der Methode der vollständigen Induktion kann man dazu den folgenden Trick verwenden, den schon Carl Friedrich Gauß benutzte, als er als Schüler die Zahlen von 1 bis 100 addieren sollte: Man betrachtet das Doppelte der Summe $1+2+3+\ldots+n$:

$$\begin{aligned}
2\cdot(1+2+\ldots+n) &= (1+2+\ldots+n)+(n+(n-1)+\ldots+1)\\
&= \quad 1+\quad 2 \quad + \quad 3 \quad +\ldots+n\\
&\quad\; +n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1
\end{aligned}$$

Da nun die Spaltensummen immer $n+1$ sind, folgt $2\cdot(1+2+3+\ldots+n)=n\cdot(n+1)$.
Das ergibt genau die gewünschte Formel $1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

L 74.2 In der ersten Situation sitzen sich Klara und Sebastian genau gegenüber, in beide Richtungen gesehen sitzen sie also im Abstand von 10 Stühlen.

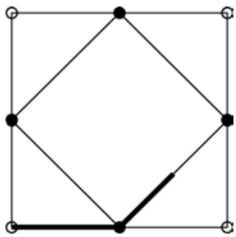
Dreht sich die Runde der Spielenden, ändert das nichts am Abstand zwischen Klara und Sebastian. Ebenso natürlich, wenn die beiden an einem Platztausch nicht beteiligt sind. Wenn einer der beiden nun an einem Platztausch beteiligt ist, ändern sich die Abstände in einer Richtung um $+4$, in der anderen um -4. Dabei muss gegebenenfalls – nämlich genau dann, wenn der eine quasi über die andere springt – noch 20 subtrahiert bzw. addiert werden. Weil 20 durch 4 teilbar ist, ändert sich damit bei keinem Zug, dass der Abstand der beiden in beiden Richtungen gemessen beim Teilen durch 4 den Rest 2 lässt. Damit kann offensichtlich Sebastian nie direkt neben Klara sitzen. (Umgekehrt können sie ebensowenig einmal ihre Plätze tauschen.)
Wenn sich ein weiterer Spieler dazugesellt, ist die Situation erwartungsgemäß anders. Von Klara nach rechts gemessen beträgt der Abstand nun 11; wird so getauscht, dass sich dieser Abstand dreimal verringert, beträgt er -1 bzw. 20, es sitzt dann also Sebastian links von Klara.
Bleibt die Frage, wie viele Runden man mindestens braucht: Offenbar reichen wegen der Abstände 10 bzw. 11 zwei Tausche nicht aus. Die drei Tausche kann man ebenso offensichtlich nicht ohne eine Drehung der Spielenden ausführen. Jedoch reicht eine Drehung tatsächlich aus, wie gleich gezeigt wird, daher lautet die Antwort auf die Frage: Es dauert vier Runden, wenn alle mithelfen. Und es muss nicht einmal Sebastian selbst mithelfen.
Hier eine der beiden Möglichkeiten: Im ersten Zug tauscht Klara mit dem Mitspieler, der 4 Plätze rechts von ihr sitzt. Dann wird die Runde so gedreht, dass Klara 4 Plätze links vom roten Stuhl zu sitzen kommt. (Sebastian ist dann 3 Plätze rechts vom roten Stuhl.) Im dritten Zug tauscht der auf dem roten Stuhl Sitzende mit Klara, die dann im vierten Zug mit dem Mitspieler 4 Plätze rechts von ihr, also demjenigen rechts von Sebastian tauscht.
Bei der anderen Möglichkeit wird nach Klaras erstem Zug so gedreht, dass Sebastian 4 Plätze rechts vom roten Stuhl zu sitzen kommt, Klara ist dann 3 Plätze links vom roten Stuhl. Dann wird Sebastian auf den roten Stuhl gebeten und er darf dann selbst entscheiden, ob er überhaupt neben Klara sitzen möchte!

Bemerkungen: Etwas abstrakt betrachtet, gehört diese Aufgabe zu einem riesigen Gebiet möglicher Fragestellungen: Man hat eine große Menge *denkbarer* Veränderungen (hier die Permutationen der Mitspieler auf den Stühlen), erlaubt aber nur gewisse Grund„züge“, und fragt dann, was noch möglich ist. In der Sprache der Algebra – das sei hier für Leser erwähnt, die schon einmal etwas von *Gruppen* im mathematischen Sinne gehört haben – heißt das dann: Wie sieht die *Untergruppe* einer gegebenen aus, die von bestimmten *Erzeugern* gebildet wird? Und: Wie viele Erzeuger brauche ich minimal, um ein bestimmtes Element der Gruppe zu bilden?

Ein ganz einfaches Beispiel für eine solche Fragestellung ist diese: Gegeben zwei natürliche Zahlen n und m, kann man durch beliebig häufige Addition und Subtraktion dieser Zahlen den Wert 1 erhalten? (Das ist fast schon unsere Aufgabenstellung.) Deutlich kniffliger, aber wesentlich „greifbarer“ geht es am „Zauberwürfel“ zu: Schafft man es, die Steine wieder zu ordnen, indem man nur die erlaubten Flächen bewegt (und den Würfel nicht in seine Einzelteile zerlegt)? Oder hat man beim letzten Zusammenbau etwa einen Fehler gemacht, der nur durch erneutes Auseinanderbauen behoben werden kann?

L 74.3 Wir nehmen an, dass die Mäuse punktförmig sind, damit sie sich beim Springen nicht die Köpfe aneinander stoßen.

Teil a) Zu Beginn stehen die Mäuse an den Eckpunkten eines Quadrats. Nachdem alle Mäuse eine halbe Kantenlänge in Richtung ihrer rechten Nachbarin gesprungen sind, bilden die vier neuen Standorte wiederum die Ecken eines Quadrats, welches allerdings kleiner ist als das ursprüngliche.



Die Kanten des neuen Quadrats sind dann gerade die Hypotenusen der rechtwinkligen Dreiecke, die sich aus den neuen Standorten von zwei benachbarten Mäusen sowie dem alten Standort der jeweils vorderen Maus ergeben. Mit dem Satz von Pythagoras erhalten wir nun die Kantenlänge a_{i+1} des neuen Vierecks:

$$a_{i+1} = \sqrt{\left(\frac{a_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_i}{2}\right)^2} = \frac{a_i}{2}\sqrt{2} = \frac{a_i}{\sqrt{2}}\,,$$

wobei a_i die Kantenlänge des vorherigen Vierecks ist. Setzen wir diese rekursive Formel nacheinander ein, erhalten wir die Kantenlängen in Abhängigkeit von $a_0 = 5\,\mathrm{m}$:

$$a_i = \frac{a_0}{\left(\sqrt{2}\right)^i}\,.$$

Da diese Kantenlänge stets größer als 0 ist, treffen sich die Mäuse niemals, sondern springen bis in alle Ewigkeit weiter.[1] Trotzdem legt dabei jede Maus nur einen endlichen Weg zurück, wie wir gleich sehen werden.

[1] Genauer gesagt: Sie müssen unendlich oft springen. Ob das auch in endlicher Zeit zu schaffen ist, darüber wollen wir hier nicht diskutieren.

Für die Weglänge S einer Maus gilt:

$$S = \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} + \ldots = \frac{a_0}{2} + \frac{a_0}{2\sqrt{2}} + \frac{a_0}{2\sqrt{2}^2} + \ldots = \frac{a_0}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}^2} + \ldots\right).$$

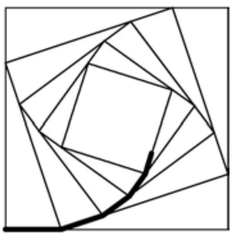
Dies ist eine sogenannte geometrische Reihe. Um die Summe auszurechnen, kann man nacheinander die Teilsummen S_m (mathematisch: Partialsummen) der ersten $1 + m$ Summanden ausrechnen[2]:

$$S_m = \frac{a_0}{2} \cdot \frac{1 - (1/\sqrt{2})^{m+1}}{1 - 1/\sqrt{2}}\,.$$

Um den Gesamtweg zu erhalten, lassen wir m gegen unendlich streben. Für sehr große m wird dann $(1/\sqrt{2})^{m+1} = 1/(\sqrt{2})^{m+1}$ gegen 0 streben, da der Nenner immer größer wird, während der Zähler gleich bleibt. Damit erhalten wir für die zurückgelegte Strecke der Maus

$$S = \frac{a_0}{2} \cdot \frac{1 - 0}{1 - 1/\sqrt{2}} = \frac{5\,\mathrm{m}}{2 - \sqrt{2}} \approx 8{,}54\,\mathrm{m}\,.$$

Teil b) Nun springt die Maus nicht genau die Hälfte der Seitenlänge des Quadrats, sondern nur einen n-ten Teil.



[2]Diese Formel kann man mit einem Trick sehr leicht herleiten – hier für die, die ihn noch nicht kennen: Man schreibe die Summe einmal in normaler Form auf und ziehe dann das $1/\sqrt{2}$-fache ab, indem man jeden Summanden mit $-1/\sqrt{2}$ multipliziert. Man sieht, dass sich fast alle Summanden gegeneinander wegheben und nur noch 1 und $-(1/\sqrt{2})^{m+1}$ übrig bleiben. Nun muss nur noch durch $1 - 1/\sqrt{2}$ geteilt werden.

Wir berechnen wiederum mit dem Satz von Pythagoras die Kantenlänge des neuen Quadrats, dabei haben jetzt die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks die Längen $\frac{1}{n}a_i$ und $(1-\frac{1}{n})a_i$. Es gilt

$$a_{i+1} = a_i\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{n}\right)^2} = a_i\sqrt{\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n} + 1}\,,$$

wobei a_i gerade die Kantenlänge des vorherigen Vierecks ist. Es ist $\frac{1}{n} \in]0,1[$, daher ist $\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n} + 1 < 1$. Wir wenden diese rekursive Formel wieder öfter an. Da die Maus nun immer den n-ten Teil einer Kantenlänge zurücklegt, ergibt sich ein Gesamtweg von

$$S = \frac{a_0}{n}\left(1 + \left(\sqrt{\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n} + 1}\right)^1 + \left(\sqrt{\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n} + 1}\right)^2 + \ldots\right).$$

Wieder unter Benutzung der Summenformel der geometrischen Reihe erhalten wir in Abhängigkeit von dem gewählten n-ten Teil die Summe

$$\begin{aligned} S &= \frac{a_0}{n} \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n} + 1}} \\ &= \frac{a_0}{n} \cdot \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n} + 1}\right)}{1 - \frac{2}{n^2} + \frac{2}{n} - 1} = \frac{a_0\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n} + 1}\right)}{2(1 - \frac{1}{n})} \end{aligned}$$

als Weglänge einer jeden Maus.

Betrachten wir diese Strecke für immer größer werdende n oder mit anderen Worten: Lassen wir das n gegen unendlich streben, so strebt der Nenner gegen 2 und der Zähler gegen $2a_0$. Die Gesamtstrecke der Maus nähert sich mit wachsendem n also immer mehr einer Länge von $\frac{2a_0}{2} = a_0 = 5\,\mathrm{m}$ an.
Außerdem nähert sich die Form des Weges immer mehr einer „runden“ Spirale, der sogenannten „logarithmischen Spirale“ an, die in vielfältiger Weise in der Natur vorkommt, z. B. bei der Anordnung der Sterne in einer Galaxie.

Zusatz: Zur Lösung im allerletzten Fall kann man auch mit einer anderen Überlegung kommen: Wenn sich die Sprungweite immer weiter verkleinert, gleicht sich die Situation immer mehr derjenigen an, in der die Mäuse kontinuierlich aufeinander zugehen. Dabei ist es wie oben auch so, dass die Mäuse in einem Quadrat starten und auch immer weiter ein Quadrat bilden. Wir betrachten Maus A, die auf Maus B zugeht. Wegen der Quadratgestalt bewegt sich B also immer rechtwinklig zur Bewegung von A. Deswegen ändert sich am

Abstand von A zu B nichts durch die Bewegung von B, sondern nur durch die von A, und A geht immer direkt auf B zu. Folglich muss A genau den Weg zurücklegen, den sie am Anfang von B entfernt war – nämlich a_0.

L 74.4 Wir betrachten zunächst nur Polynomfunktionen von einem Grad größer oder gleich 2. Sei g eine beliebige Gerade, die nicht parallel zur y-Achse liegt. Diese kann das Polynom in mehreren, in genau einem oder in gar keinem Punkt schneiden oder berühren.

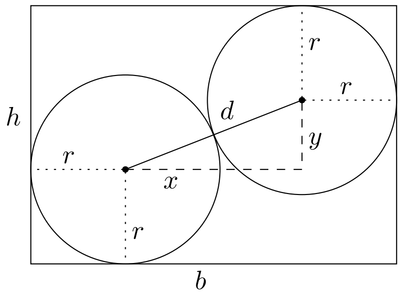
Im Fall von Berührpunkten kann g als Symmetrieachse ausgeschlossen werden, da der Graph des Polynoms in einer Umgebung des Berührpunktes per Definition nur auf einer Seite der Geraden verläuft.
Bei zwei oder mehr Schnittpunkten kann g ebenfalls keine Symmetrieachse sein, da sonst der Graph des Polynoms ein geschlossener „Kreisweg" wäre.
Bei keinem Schnittpunkt scheidet g als Symmetrieachse aus, da sonst der Graph des Polynoms aus zwei nicht zusammenhängenden Teilen bestehen würde.

Bleibt der Fall, dass Polynom und Gerade genau einen Schnittpunkt haben:
Bei Polynomen mit geradem Grad führt ein Schnittpunkt sofort zu (mindestens) einem weiteren Schnittpunkt. Begründung: Nach Annahme steht g nicht senkrecht und das Polynom hat mindestens Grad 2. Da die Steigung des Polynoms beliebig groß wird und jedes Polynom geraden Grades an beiden Rändern entweder nach $+\infty$ oder nach $-\infty$ geht, müssen sich Polynom und Gerade mindestens noch einmal schneiden.
Also ist der Grad des Polynoms im betrachteten Fall (genau ein Schnittpunkt mit g) ungerade und das Polynom hat somit auch eine ungerade Anzahl an Wendepunkten.
Damit g Symmetrieachse sein kann, muss das Polynom auf beiden Seiten des Schnittpunktes dasselbe Krümmungsverhalten haben. Insbesondere müssen die Anzahlen der Wendepunkte auf beiden Seiten übereinstimmen. Also muss der Schnittpunkt in einem (dem mittleren) Wendepunkt des Polynoms liegen. Da sich in einem Wendepunkt aber gerade die Krümmungsrichtung ändert, ist das Krümmungsverhalten um den Schnittpunkt herum nicht achsensymmetrisch.
Somit kann es zu einem Polynom vom Grad größer gleich 2 keine nicht-senkrechte Symmetrieachse geben.

Für Polynome vom Grad 0 oder 1 (also Geraden) ist es sehr einfach, Symmetrieachsen zu finden: Jede Gerade, die senkrecht auf dem Polynom steht, ist Symmetrieachse, außerdem ist das Polynom selbst Symmetrieachse. Für Polynome vom Grad 1 gibt es also unendlich viele nicht-senkrechte Symmetrieachsen, für solche vom Grad 0 genau eine, nämlich das Polynom selbst, denn alle Orthogonalen eines Polynoms vom Grad 0 stehen natürlich senkrecht auf der x-Achse.

Lösungen zu Aufgabenblatt 75

L 75.1 Offensichtlicherweise liegen bei einer optimalen Lösung die beiden Rohre in gegenüberliegenden Ecken und sie berühren sich. (Wäre das nicht so, könnte man beide ein wenig so verschieben, dass sie weder sich noch eine Wand berühren, und sie dann etwas größer machen – Widerspruch!)
Wir bezeichnen mit x den horizontalen Abstand der beiden Mittelpunkte, mit y den vertikalen Abstand, und $d = 2r$ sei der Durchmesser der Rohre. Es sei h die Höhe der Öffnung ($h = 37\,\text{cm}$) und b deren Breite ($b = 59\,\text{cm}$).



Dann gilt (vgl. Skizze):

$$\begin{aligned} x &= b - 2r = b - d\,, \\ y &= h - 2r = h - d \quad \text{und} \\ d^2 &= x^2 + y^2\,. \end{aligned}$$

Einsetzen der ersten beiden Zeilen in die dritte ergibt:

$$\begin{aligned} & d^2 = (b-d)^2 + (h-d)^2 = b^2 + h^2 - 2(b+h)d + 2d^2 \\ \iff\quad & d^2 - 2(b+h)d + b^2 + h^2 = 0 \\ \iff\quad & d^2 - 2(b+h)d + b^2 + 2bh + h^2 = 2bh \\ \iff\quad & (d - (b+h))^2 = 2bh \\ \iff\quad & d - (b+h) = -\sqrt{2bh}\,, \quad \text{da die linke Seite negativ sein muss} \\ \iff\quad & d = b + h - \sqrt{2bh}\,. \end{aligned}$$

Im konkreten Fall ergibt sich also

$$d = 59 + 37 - \sqrt{2 \cdot 59 \cdot 37} = 96 - \sqrt{4366} \approx 29{,}92\,\text{cm}$$

als maximal möglicher Radius der Rohre.

Bemerkung: Ausnahmsweise entstammt die Geschichte dieser Aufgabe nicht unserer Fantasie, sondern dem realen Leben: Genau so wurde die Aufgabe jemandem im Umkreis unseres Zirkels gestellt, und netterweise wurde das an uns weitergeleitet. Vielen Dank!

L 75.2 Gesucht sind alle nichtnegativen ganzen Zahlen a und b kleiner als 100 mit

$$\begin{aligned} & (a+b)^2 = 100a + b. \\ \iff \quad & a^2 + a(2b - 100) + (b^2 - b) = 0 \\ \iff \quad & a = 50 - b \pm \sqrt{2500 - 100b + b^2 - (b^2 - b)} \qquad \text{nach der } p\text{-}q\text{-Formel} \\ & \quad = 50 - b \pm \sqrt{2500 - 99b}\,. \end{aligned}$$

Da a und b ganze Zahlen sein sollen, muss $2500 - 99b$ eine Quadratzahl sein. Es muss also gelten: $2500 - 99b = z^2$ mit einem $z \in \mathbb{Z}$.

Eine Möglichkeit, an dieser Stelle fortzufahren, ist, zu erkennen, dass b nicht größer als 25 sein kann (da sonst z^2 als negativ anzunehmen wäre), und dann für b alle Zahlen von 0 bis 25 auszuprobieren.

Ein etwas allgemeinerer Weg, den wir im Folgenden gehen wollen, betrachtet die Restklassen bei Division durch geeignete Zahlen:
Da $99b$ durch 9 und 11 teilbar ist und 2500 bei Division durch 9 den Rest 7 und bei Division durch 11 den Rest 3 lässt, muss auch z^2 bei Division durch 9 den Rest 7 und bei Division durch 11 den Rest 3 lassen.

Allgemein gilt für beliebige natürliche Zahlen x, m und k:

$$x^2 \equiv (m-x)^2 \mod m \qquad \text{und} \qquad x^2 \equiv (x + k \cdot m)^2 \mod m\,.$$

Um nun alle Quadratzahlen zu bestimmen, die bei Division durch m einen bestimmten Rest q lassen, genügt es also, die Quadrate der Zahlen zwischen 0 und $m/2$ zu prüfen, da sich aus diesen Zahlen und den beiden obigen Operationen alle Quadratzahlen erzeugen lassen.
Alle weiteren Zahlen, deren Quadrate dieselbe Restklasse q haben, erhält man dann durch Differenzbildung zu m und durch Addition beliebiger Vielfacher von m.

Konkret in unserem Fall: Die Reste von 0^2, 1^2, 2^2, 3^2 bzw. 4^2 bei Division durch 9 sind 0, 1, 4, 0 bzw. 7.

Also sind die Quadratzahlen mit Rest 7 genau die Zahlen 4^2, $(9-4)^2 = 5^2$, $(4+k\cdot 9)^2$ und $(5+k\cdot 9)^2$ mit $k = 1, 2, 3, \ldots$, das heißt: 4, 5, 13, 14, 22, 23, 31, 32, 40, 41, 49, 50, …
Die Reste von 0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2 bzw. 5^2 bei Division durch 11 sind 0, 1, 4, 9, 5 bzw. 3.
Also sind die Quadratzahlen mit Rest 3 genau die Zahlen 5^2, $(11-5)^2 = 6^2$, $(5+k\cdot 11)^2$ und $(6+k\cdot 11)^2$ mit $k = 1, 2, 3, \ldots$, das heißt: 5, 6, 16, 17, 27, 28, 38, 39, 49, 50, …
Da b nicht negativ sein darf, muss außerdem $z \leq 50$ sein.
Aus diesen drei Bedingungen folgt, dass z nur 5, 49 oder 50 sein kann. Gehen wir diese drei Fälle durch:

$$\begin{aligned}
z = 5 \quad &\Longrightarrow \quad b = (2500 - 5^2) : 99 = 25 \\
&\Longrightarrow \quad a = 50 - 25 \pm 5 \\
&\Longrightarrow \quad a = 20 \text{ oder } a = 30 \\[1ex]
z = 49 \quad &\Longrightarrow \quad b = (2500 - 49^2) : 99 = 1 \\
&\Longrightarrow \quad a = 50 - 1 \pm 49 \\
&\Longrightarrow \quad a = 0 \text{ oder } a = 98 \\[1ex]
z = 50 \quad &\Longrightarrow \quad b = (2500 - 50^2) : 99 = 0 \\
&\Longrightarrow \quad a = 50 - 0 \pm 50 \\
&\Longrightarrow \quad a = 0 \text{ oder } a = 100\,.
\end{aligned}$$

Eine Probe bestätigt, dass die Tupel $(20, 25)$, $(30, 25)$, $(00, 01)$, $(98, 01)$ und $(00, 00)$ die gesuchte Eigenschaft haben.

L 75.3 Teil a): Da die 59th Street genau sechs Straßen nördlich vom Ausgangspunkt liegt, kann diese Straße von der Gruppe in drei Stunden nur erreicht werden, falls die Gruppe stets in Richtung Norden geht. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die Gruppe eine halbe Stunde in Nord-Richtung bewegt, beträgt jeweils $\frac{1}{4}$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4096} = 0{,}000244140625$, also ungefähr $0{,}02\,\%$.

Teil b): Um die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu berechnen, bestimmen wir zunächst die Anzahl aller Wegrouten, bei denen man innerhalb von drei Stunden wieder am Ausgangspunkt vorbeikommt. Da man sich innerhalb einer halben Stunde stets von einer Kreuzung zu einer benachbarten Kreuzung bewegt, kann man nur nach einer geraden Anzahl von Schritten, also nach vollen Stunden, wieder am Ausgangspunkt ankommen.

Im Folgenden bezeichnen wir mit n_I die Anzahl der Routen, die die Eigenschaft I haben. Dabei werden wir in unserem Fall I als Kombinationen aus den Zahlen $1, 2, 3$ sowie den Buchstaben „u“ und „o“ schreiben. Dabei bedeutet die Zahl, dass sich die Gruppe nach dieser Anzahl von Stunden wieder am Ausgangspunkt befindet. Die Buchstaben „u“ bzw. „o“ verknüpfen diese Bedingungen durch ein logisches „und“ bzw. „und/oder“. Über nicht als Zahlen auftretende Zeitpunkte soll dabei keine Aussage gemacht werden.

Gesucht ist nun die Anzahl der Routen, bei denen sich die Gruppe nach einer, zwei oder drei Stunden wieder am Ausgangspunkt befindet, also n_{1o2o3}. Es wird sich herausstellen, dass die Anzahl der Routen, die nur „und“-Bedingungen erfüllen, vergleichsweise einfach bestimmen lässt. Daher wollen wir n_{1o2o3} anders darstellen. Um zunächst einmal n_{1o2} zu berechnen, addieren wir n_1 und n_2. Dann haben wir jedoch die Routen, bei denen die Gruppen nach einer und nach zwei Stunden am Ausgangspunkt vorbeikommt, doppelt gezählt und müssen ihre Anzahl daher noch einmal subtrahieren. Es gilt also

$$n_{1o2} = n_1 + n_2 - n_{1u2}\,.$$

Außerdem ist $(1o2)u3 = (1u3)o(2u3)$, sodass man analog

$$\begin{aligned} n_{1o2o3} &= n_{1o2} + n_3 - n_{(1o2)u3} \\ &= n_{1o2} + n_3 - (n_{1u3} + n_{2u3} - n_{1u2u3}) \\ &= n_1 + n_2 + n_3 - n_{1u2} - n_{1u3} - n_{2u3} + n_{1u2u3} \end{aligned}$$

erhält. Diese Formel ist ein Spezialfall der sogenannten „Siebformel“.

Um nun die Anzahlen der Routen zu bestimmen, sehen wir jede Route (bzw. Teilroute) als Menge von k (halbstündigen) Schritten an, die in Teilmengen von k_1 Schritten in Nord-, k_2 in Süd-, k_3 in West- und k_4 Schritten in Ostrichtung unterteilt werden kann ($k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = k$). Die Anzahl der Möglichkeiten, die es dafür gibt, bestimmt man mit Hilfe des Multinomialkoeffizienten

$$\binom{k}{k_1, k_2, k_3, k_4} := \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot k_4!}$$

(siehe Bemerkung). Die Bedingung, dass man sich dabei nach k Schritten wieder am Ausgangspunkt befindet, ist dann gleichbedeutend damit, dass man jeweils gleich viele Schritte in Nord- und Süd- bzw. in West- und Ostrichtung gegangen ist, also dass $k_1 = k_2$ und $k_3 = k_4$ gilt.

Für $I = 1$ betrachten wir die zulässigen Möglichkeiten für die beiden ersten Schritte. Da diese jeweils entweder in Nord-/Süd- oder West-/Ostrichtung gemacht werden können, sind dies dann $\binom{2}{1,1,0,0} + \binom{2}{0,0,1,1}$ Möglichkeiten. Weiterhin können die Schritte drei bis sechs jeweils in beliebige Himmelsrichtung erfolgen. Damit ergibt sich

$$n_1 = \left(\binom{2}{1,1,0,0} + \binom{2}{0,0,1,1}\right) \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = (2+2) \cdot 4^4 = 4^5 .$$

Analog erhält man:

$$\begin{aligned}
n_2 &= \left(\binom{4}{2,2,0,0} + \binom{4}{1,1,1,1} + \binom{4}{0,0,2,2}\right) \cdot 4^2 \\
&= (6+24+6) \cdot 4^2 = 36 \cdot 4^2 , \\
n_3 &= \binom{6}{3,3,0,0} + \binom{6}{2,2,1,1} + \binom{6}{1,1,2,2} + \binom{6}{0,0,3,3} \\
&= 20 + 180 + 180 + 20 = 400 , \\
n_{1u2} &= \left(\binom{2}{1,1,0,0} + \binom{2}{0,0,1,1}\right) \\
&\quad \cdot \left(\binom{2}{1,1,0,0} + \binom{2}{0,0,1,1}\right) \cdot 4 \cdot 4 = 4 \cdot 4 \cdot 4^2 = 4^4 , \\
n_{1u3} &= \left(\binom{2}{1,1,0,0} + \binom{2}{0,0,1,1}\right) \\
&\quad \cdot \left(\binom{4}{2,2,0,0} + \binom{4}{1,1,1,1} + \binom{4}{0,0,2,2}\right) = 4 \cdot 36 = 144 , \\
n_{2u3} &= \left(\binom{4}{2,2,0,0} + \binom{4}{1,1,1,1} + \binom{4}{0,0,2,2}\right) \\
&\quad \cdot \left(\binom{2}{1,1,0,0} + \binom{2}{0,0,1,1}\right) = 36 \cdot 4 = 144 , \\
n_{1u2u3} &= \left(\binom{2}{1,1,0,0} + \binom{2}{0,0,1,1}\right) \cdot \left(\binom{2}{1,1,0,0} + \binom{2}{0,0,1,1}\right) \\
&\quad \cdot \left(\binom{2}{1,1,0,0} + \binom{2}{0,0,1,1}\right) = 4^3 = 64 .
\end{aligned}$$

Mit obiger Formel folgt

$$n_{1o2o3} = 4^5 + 36 \cdot 4^2 + 400 - 4^4 - 144 - 144 + 64 = 1520 .$$

Da es insgesamt $4^6 = 4096$ mögliche Pfade gibt, von denen jeder gleich wahrscheinlich ist, beträgt dann die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{1520}{4096} = \frac{95}{256} = 0{,}37109375$, also ungefähr 37 %.

Bemerkung (Herleitung des Multinomialkoeffizienten):
Um aus einer m-elementigen Menge genau l Elemente auszuwählen, hat man $\binom{m}{l} := \frac{m!}{l!(m-l)!}$ Möglichkeiten: Nämlich m für das erste Element, ..., $m-l+1$ für das l-te Element; da die Reihenfolge der ausgewählten Elemente keine Rolle spielt, führen dabei jeweils $l!$ Möglichkeiten zum gleichen Ergebnis, weshalb die Anzahl noch durch $l!$ zu dividieren ist. Man erhält also $\frac{1}{l!} \cdot m \cdot \ldots \cdot (m-l+1) = \frac{1}{l!} \cdot \frac{m!}{(m-l)!}$.
Gesucht ist die Anzahl der Möglichkeiten, eine Menge mit n Elementen in k Teilmengen mit $n_1, \ldots, n_k$ Elementen zu unterteilen (mit $n_1 + \ldots + n_k = n$). Diesen Unterteilungsvorgang können wir auch wie folgt auffassen: Wir wählen zunächst aus der Gesamtmenge n_1 Elemente für die erste Teilmenge, dann aus den verbleibenden $n - n_1$ Elementen n_2 Elemente für die zweite Teilmenge usw. So bekommt man insgesamt

$$\begin{aligned} &\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-n_1-\ldots-n_{k-1})!}{k_n! \cdot (n-n_1-\ldots-n_k)!} \\ &= \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!} =: \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} \end{aligned}$$

Möglichkeiten.

L 75.4 Es bietet sich an, zunächst auszurechnen, wie viele Bäume von jeder der drei Arten im vorigen Jahr geschmückt worden sind. Dazu muss man ein Gleichungssystem mit den drei unbekannten Anzahlen x (Art 1), y (Art 2), z (Art 3) lösen, welches sich aus den Informationen vom letzten Jahr ergibt:

$$71x + 101y + 147z = 1\,000\,000 \quad \text{(Kerzen)} \tag{75.1}$$
$$4x + 5y + 6z = 48\,600 \quad \text{(Arbeitsstunden)} \tag{75.2}$$
$$x + y + z = 9\,984 \quad \text{(Bäume)} \tag{75.3}$$

(75.1) − 71 · (75.3) und (75.2) − 4 · (75.3) liefern

$$30y + 76z = 291\,136 \tag{75.4}$$
$$y + 2z = 8\,664\,. \tag{75.5}$$

(75.4) − 30 · (75.5) ergibt

$$16z = 31\,216 \iff z = 1\,951\,.$$

Durch Einsetzen in (75.5) und (75.3) erhält man schließlich

$$x = 3\,271 \qquad y = 4\,762 \qquad z = 1\,951\,.$$

Zurück zur eigentlichen Fragestellung: Für welche Anzahlen außer 9 984 ist es möglich, die zwei Vorgaben einzuhalten?
Etwas anders formuliert lautet diese Frage: Angenommen, man verändert die Anzahl einer Sorte im Vergleich zum Vorjahr (um a), um wie viel (b bzw. c) muss man dann die Anzahlen der anderen beiden Sorten ändern, um die Gesamtzahlen der Kerzen und der Arbeitsstunden beizubehalten?
Die Summe der Veränderungen in den einzelnen Sorten ist dann gerade die Differenz aus Bäumen in diesem Jahr zur Vorjahreszahl.

Es gilt also, das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} 71(x+a)+101(y+b)+147(z+c) &= 1\,000\,000 \quad &&\text{(Kerzen)} \\ 4(x+a)+5(y+b)+6(z+c) &= 48\,600 &&\text{(Arbeitsstunden)} \end{aligned}$$

Nach „Abzug“ der bereits bekannten Lösung ergibt sich das (homogene) Gleichungssystem:

$$71a+101b+147c=0 \tag{75.6}$$

$$4a+5b+6c=0 \tag{75.7}$$

Auflösen von (75.7) nach a und Einsetzen in (75.6) ergibt:

$$\frac{49}{4}b+\frac{81}{2}c=0 \iff b=-\frac{162}{49}c$$

sowie

$$a=\frac{129}{49}c\,.$$

Das bedeutet: Will man 49 Bäume mehr nach Art 3 schmücken, so muss man 162 weniger nach Art 2 und 129 mehr von Art 1 schmücken. Insgesamt hat man dann $49-162+129=16$ Bäume mehr als im Vorjahr zu schmücken.

Da alle Anzahlen ganzzahlig sein müssen und da 49 teilerfremd zu 162 und 129 ist, darf die Anzahl der Bäume, die nach Art 3 geschmückt werden, nur um Vielfache von 49 variieren – immer ausgehend von der Situation im letzten Jahr.
Nun ist die Frage, wie oft man 49 Bäume von Art 3 maximal hinzunehmen bzw. weglassen kann, ohne von einer der anderen beiden Arten eine negative Anzahl von Bäumen schmücken zu müssen.
Da man von 4 762 (Art 2 im Vorjahr) maximal 29-mal 162 abziehen kann (denn $4\,762-29\cdot 162=64<162$), ist die maximal mögliche Anzahl von Bäumen mit

147 Kerzen $1\,951+29\cdot 49 = 3\,372$. Insgesamt gibt es dann $9\,984+29\cdot 16 = 10\,448$ Bäume.
Mit demselben Argument ($3\,271-25\cdot 129 = 46 < 129$) erhält man als minimale Zahl vom Bäumen mit 147 Kerzen $1\,951 - 25\cdot 49 = 726$. Insgesamt hat man dann $9\,984 - 25\cdot 16 = 9\,584$ Bäume.

Die gesuchten Anzahlen sind also

$$9\,584\,, \quad 9\,584 + 1\cdot 16\,, \quad 9\,584 + 2\cdot 16\,, \quad \ldots, \quad 9\,584 + 54\cdot 16 = 10\,448\,.$$

Index

Inhaltsverzeichnis

In eigener Sache

Ebenfalls erschienen im Universitätsverlag Göttingen sind der erste und zweite Band mit Aufgaben und Lösungen des Mathematischen Korrespondenzzirkels.

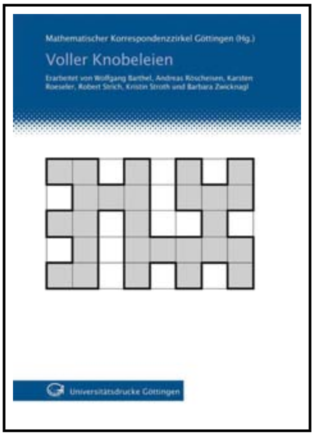
Voller Knobeleien

Erarbeitet von Wolfgang Barthel, Andreas Röscheisen, Karsten Roeseler, Robert Strich, Kristin Stroth u. a.

Publiziert 2005

Softcover, 180 S.

ISBN 978-3-930457-76-2



Voller neuer Knobeleien

Erarbeitet von Karsten Roeseler, Robert Strich und Kristin Stroth

Publiziert 2008

Softcover, 191 S.

ISBN 978-3-940344-15-1

Zu beziehen sind die Bücher entweder direkt bei den Autoren unter http://www.math.uni-goettingen.de/zirkel oder alternativ beim Universitätsverlag Göttingen (http://www.univerlag.uni-goettingen.de).

Nach „Voller Knobeleien“ und „Voller neuer Knobeleien“ gibt der Mathematische Korrespondenzzirkel Göttingen mit diesem Buch den mittlerweile dritten Band seiner Aufgabensammlung heraus.

In gewohnt sorgfältiger Ausarbeitung werden insgesamt 25 Aufgabenblätter des Zirkels mit 100 kniffligen Aufgaben aus den Gebieten Zahlentheorie, Kombinatorik, Logik, Geometrie und Wahrscheinlichkeitsrechnung vorgestellt und in anschaulicher und häufig überraschend „anderer“ Weise gelöst. Wie auch schon die Bände 1 und 2 bietet dieses Buch nicht nur eine Menge Knobelspaß für Schüler ab Klasse 8 und Erwachsene, sondern auch vielfältige Möglichkeiten zur Vorbereitung auf Mathematikwettbewerbe und zur Gestaltung schulischer Mathematik-Arbeitsgemeinschaften.

GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT
GÖTTINGEN

ISBN: 978-3-86395-042-2

Universitätsdrucke Göttingen