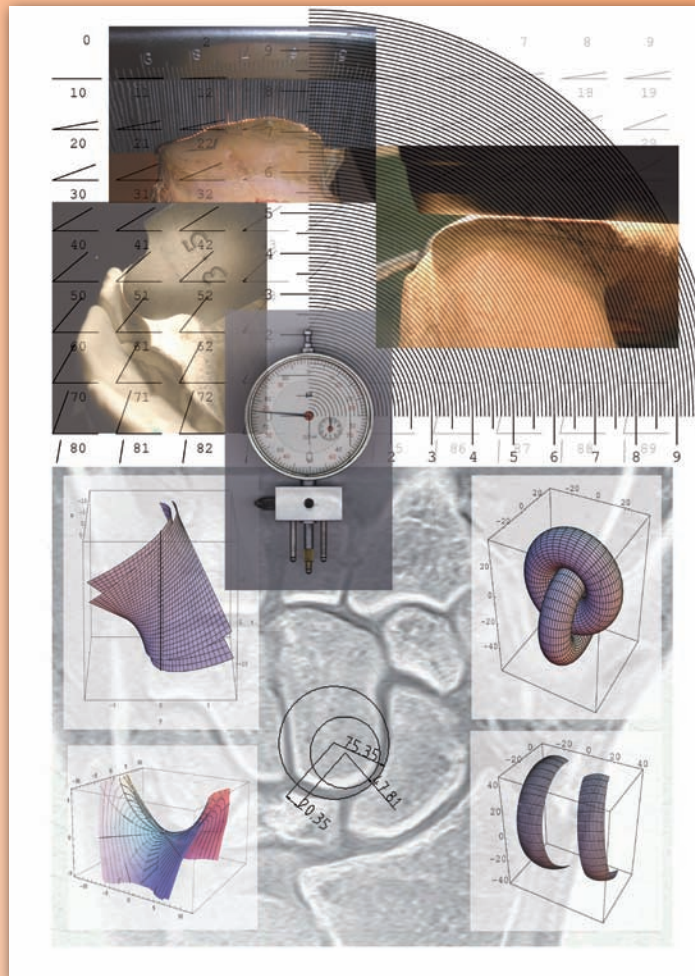


Henning Dathe

Die Form von Gelenkflächen

Morphometrie mit einfachen Mitteln

Forschungsbericht



Universitätsdrucke Göttingen

Henning Dathe
Die Form von Gelenkflächen

This work is licensed under the [Creative Commons](#) License 3.0 “by-nd”, allowing you to download, distribute and print the document in a few copies for private or educational use, given that the document stays unchanged and the creator is mentioned. You are not allowed to sell copies of the free version.



erschieden in der Reihe der Universitätsdrucke
im Universitätsverlag Göttingen 2012

Henning Dathe

Die Form von Gelenkflächen

Morphometrie mit
einfachen Mitteln

Forschungsbericht



Universitätsverlag Göttingen
2012

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Autorenkontakt

Henning Dathe

e-mail: hdathe1@gwdg.de

Dieses Buch ist auch als freie Onlineversion über die Homepage des Verlags sowie über den OPAC der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek (<http://www.sub.uni-goettingen.de>) erreichbar und darf gelesen, heruntergeladen sowie als Privatkopie ausgedruckt werden. Es gelten die Lizenzbestimmungen der Onlineversion. Es ist nicht gestattet, Kopien oder gedruckte Fassungen der freien Onlineversion zu veräußern.

Satz und Layout: Henning Dathe

Umschlaggestaltung: Franziska Lorenz

Titelabbildung: Henning Dathe

© 2012 Universitätsverlag Göttingen

<http://univerlag.uni-goettingen.de>

ISBN: 978-3-86395-065-1

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
1.1	Klassifikationen von Gelenken	7
1.1.1	Anatomische Klassifikation	8
1.1.2	Technische Klassifikation	8
1.2	Der Linienkontakt	10
1.3	Knochenumbau	12
1.4	Gliederung	13
1.5	Ziel und Zielgruppe	15
1.6	Danksagung	16
2	Morphometrie mit einfachen Mitteln	21
2.1	Radien und Krümmungen	21
2.1.1	Konturtaster und Radienschablone	22
2.1.2	Die Messuhr	24
2.1.3	Radienlehren	26
2.1.4	Bildverarbeitung	26
2.2	Geraden	28
2.3	Winkel	29
3	Mathematische Hilfsmittel aus der Differentialgeometrie von Flächen	39
4	Die Art des Kontaktes	43
5	Die statistische Auswertung	45
5.1	Benennung der Variablen	45
5.2	Vorbereitung des Datensatzes	46
5.3	Abhängigkeiten	47
5.4	Maße der Inkongruenz	48
5.5	Funktionen von Messgrößen und ihre Mittelwerte	54

6	Geometrische Modellbildung	57
6.1	Gleichungen	57
6.1.1	Parameterdarstellungen	57
6.1.2	Implizite Gleichungen	61
6.1.3	Explizite Gleichungen	63
6.1.4	Viele Schnitte als Höheninformation	65
6.2	Lokale Eigenschaften von Flächen	66
6.3	Technische Kriterien	67
7	Das hyperbolische Paraboloid	69
7.1	Die Parameterdarstellung als Regelfläche	70
7.2	Die Schnittkrümmungen	73
7.3	Parabelförmige Schnitte und der Satz von Euler	75
7.4	Die Einheiten	75
7.5	Beispiel: Das Daumensattelgelenk	77
7.6	Näheres zum Linienkontakt	79
7.7	Die Indizes der Inkongruenz	83
7.8	Der Daumensattel als hyperbolisches Paraboloid?	85
7.9	Vergleich mit dem Torus	86
7.10	Das nichtlineare Sattelmodell	87
8	Das einschalige Hyperboloid	93
8.1	Die Parameterdarstellung für einen Rotationskörper	94
8.2	Die allgemeine Parameterdarstellung	95
8.3	Die Halbachsen	97
8.4	Die Schnitthyperbeln	98
8.5	Beispiel: Das Humeroulnargelenk	99
8.6	Mehr zum Linienkontakt	102
9	Ellipsoid und Torus	107
9.1	Das Ellipsoid	107
9.1.1	Beispiel: Das Fingergrundgelenk	109
9.2	Der Torus	110
9.2.1	Beispiel: Das Femorotibialgelenk	112
10	Anhang	117
10.1	Ein Vorschlag zur Benennung morphometrischer Variablen	117

1 Einleitung

Morphometrie ist die Lehre vom Messen der Form. Eine Form ist per Definition unabhängig von Größe und Lage. Die Lage ihrerseits setzt sich zusammen aus der Translation (durch Auszeichnung eines Ortes als Bezugspunkt) und einer Rotation (in Form einer ausgezeichneten Orientierung).

In der klassischen Morphometrie [2] werden aber genau solche Koordinaten von Punkten (sog. Landmarks) als Ausgangsdaten verwandt. Die Größen- und Lageanteile werden mit ausgefeilten mathematischen Methoden herausgerechnet. Danach wird eine mittlere Form berechnet, um die Abweichungen einer individuellen Form von dieser sowohl in Ausmaß als auch in Struktur beschreiben zu können.

In unserer Vorgehensweise sind die Ausgangsdaten die Schnittkrümmungen von Oberflächen organischer Gelenke in ausgezeichneten Punkten und Winkel zwischen ausgezeichneten Richtungen. Eine Krümmung bzw. ein Radius enthält keine Lageinformation mehr, sondern nur noch die Größeninformation. Ein relativer Winkel enthält nicht einmal mehr diese. Krümmungsmaxima und Wendepunkte können zur Auszeichnung lageunabhängiger Koordinatensysteme verwandt werden. Indem eine Form so in eine Konstruktionsvorschrift (analog einer technischen Zeichnung) und einen Satz von Zahlen (den Bemessungen) überführt wird, wird eine statistische Auswertung mehrerer Formen möglich. Dann sind sowohl Fragen der Abmessungen als auch der Form an sich beantwortbar.

1.1 Klassifikationen von Gelenken

Zunächst befassen wir uns mit dem Gegenstand des Interesses: den Gelenken. In der medizinischen Literatur werden Gelenke nach der idealisierten Form ihrer Flächen oder ihrer Hauptbewegungsart klassifiziert. In der Technik benutzt man mehr als diese zwei Kriterien bei der Einteilung der Gelenke. Danach wird die tatsächliche Anwendbarkeit der untersuchten Klassifikation auf die Gelenke des menschlichen Körpers diskutiert.

1.1.1 Anatomische Klassifikation

Man unterscheidet nach der Form plane Gelenke (*Articulatio plana*), Eigelgenke (*Articulatio ellipsoidea*) mit einem und bikondyläre Gelenke mit zwei Gelenkkontakten (*Articulatio bicondylaris*) sowie die Sattelgelenke (*Articulatio sellaris*). Bei höherer Symmetrie präzisiert man ferner Drehgelenke (*Articulatio trochoidea*), weiter unterteilt in Rad- und Zapfengelenke (je nach relativer Lage der Knochenachse zur Bewegungsachse) und spezieller Kugelgelenke (*Articulatio sphaeroidea*) sowie Walzengelenke (*Articulatio cylindrica*). Der Funktion nach benennt man Scharniergelenke (*Ginglymus*) und wieder Kugelgelenke.

Bei näherem Hinsehen entpuppt sich diese Einteilung als geometrisch zu grob. Ferner bringt sie nicht klar genug zum Ausdruck, dass es sich bei einem Gelenk immer um (mindestens) *zwei* Flächen handelt. Dadurch impliziert sie die falsche Vorstellung von geometrisch übereinstimmenden Gelenkflächen, den sog. kongruenten Gelenken. Nun ist aber gerade die von unserer Arbeitsgruppe an allen Gelenken nachgewiesene geometrische Inkongruenz für die Schmierung des Gelenkes mit Synovia und damit die Ernährung des Knorpels notwendig. Nur im arthrotischen Gelenk sind die Flächen dauerhaft kongruent. Darüber hinaus hat die Inkongruenz Konsequenzen für die Kinematik des Gelenkes, denn sie erlaubt Deutungen mittels einfacher Ersatzgetriebe statt nur einzelner Bewegungsachsen.

Prominente Vertreter der hier besonders interessierenden Sattelgelenke [5] sind etwa das Wurzelgelenk des Daumens (*Articulatio carpometacarpalis pollicis*) und das Humeroulnargelenk (*Articulatio humeroulnaris*), welches einem Rotationshyperboloiden ähnelt und demnach zusätzlich ein Drehgelenk ist. Ferner gehört die femorale Fläche des Femoropatellargelenks in diese Kategorie. Neben den bikondylären Gelenken gilt diese Gelenkform als besonders anfällig gegenüber degenerativen Knorpelveränderungen. Das wird entweder mit deren Form selbst oder mit der aus einer Paarung resultierenden Inkongruenz begründet.

1.1.2 Technische Klassifikation

Man unterscheidet unabhängig nach

- Art der Berührung der Flächen
 - Punktkontakt (z.B. Kugel/Kugel mit unterschiedlichen Radien)

- Linienkontakt (z.B. Zylinder/Ebene, besser: Streckenkontakt)
- Flächenkontakt (z.B. Kugel/Kugel mit gleichen Radien)

Nach REULEAUX [31, 32] nennt man Gelenke mit Punkt- oder Linienkontakt die *höheren Elementenpaare* und die Gelenke mit Flächenkontakt *niedrigere Elementenpaare*. Diesen werden aufgrund ihres geringeren Flächendruckes (Druck = Kraft pro Fläche) günstigere mechanische Eigenschaften nachgesagt.¹

- Anzahl der Freiheitsgrade (= Anzahl f der möglichen unabhängigen Relativbewegungen)
 - der Translation (T)
 - der Rotation (R)
 - oder gekoppelt
- der grundlegenden Symmetrie der Bewegung
 - eben $\#=3$ (2T+1R)
 - sphärisch $\#=3$ (3R)
 - räumlich $\#=6$ (3T+3R)

Diese stellt eine Obergrenze g der Freiheitsgrade dar. Die verschiedenen Kontaktarten verringern diese um die sog. *Unfreiheit*: Punktkontakt $u=1$, Linienkontakt $u=2$, Flächenkontakt $u=3$. Es gilt also für ein Gelenk $f = g - \sum u$, wobei über alle Kontakte summiert wird. Ist insgesamt nur ein Freiheitsgrad gegeben, so spricht man von einem *Zwanglauf*, sind zwei Freiheitsgrade gegeben, so spricht man von einem *Flächenlauf*.

- Art der Bewegung an der Kontaktstelle
 - ebene Bewegung
 - * Rollen
 - * Gleiten, manchmal Wälzen genannt

¹Entsprechend wird in der Endoprothetik Kongruenz angestrebt. Was in der Technik gut ist, muss aber in Biologie oder Medizin noch lange nicht sinnvoll sein. So kann beispielsweise ein scheinbar hochbelastbarer Flächenkontakt, also ein niederes Elementenpaar, eine Unterversorgung des Gelenkknorpels hervorrufen, da kein Schmierfilm aus Synovia im Kontakt aufgebaut wird, oder sogar schädliche Scherkräfte nach sich ziehen.

- * Rollgleiten (Gleitwahlen), die Drehachse steht dann senkrecht zur Translationsrichtung und liegt tangential zur Gelenkfläche
- sphärische Bewegung
 - * Kreiseln (Bohren), die Drehachse steht senkrecht zur Gelenkfläche
- räumliche Bewegung
 - * Schrotten, die Drehachse liegt tangential zur Gelenkfläche und stimmt mit der Translationsrichtung überein
 - * und Mischformen.

Diese Arten der Bewegung können beschrieben werden durch Kennzahlen wie, im Fall einer ebenen Bewegung, die *Roll-Gleit-Zahl*.

- Ursache des Kontaktes
 - Kraftschluss
 - Formschluss (nur bei kongruenten Gelenken)

Es wurde auch schon behauptet,² dass ein Formschluss nur in genau einer Gelenkstellung vorliegt, der *close-packed-position*. Ein Punktkontakt vermindert die Anzahl der Freiheitsgrade einer Elementenpaarung um eins. Ein Formschluss, also ein Flächenkontakt, schränkt die Bewegung noch stärker ein, so dass dann in dieser Position von einer *Verriegelung* gesprochen werden kann.

Die Formgebung der Flächen eines Gelenkes ist demnach entscheidend für dessen mechanische Funktion, vgl. Tabelle 1.1.2 auf Seite 17. Insbesondere erhöhet sich bei inkongruenten Gelenken die Anzahl der Freiheitsgrade.

1.2 Der Linienkontakt

Der Linienkontakt nimmt eine Zwischenstellung bei der Alternative kongruent vs. inkongruent ein. Im einfachsten Fall einer geraden Kontaktlinie lässt er sich durch Zylinder mit Radien ungleicher Beträge oder Kegel ungleicher Öffnungswinkel realisieren. Eine solche Konstruktion besitzt zwei Freiheitsgrade. Sind die Gelenkflächen Ausschnitte aus dem Inneren eines speziellen Toruspaares wie aus den Abbildungen 1.1 und 1.2, ergibt sich

²MacConaill beruft sich in [23] auf Walmsley [36].

die Möglichkeit eines andauernden kongruenten aber dennoch beweglichen kreisförmigen Linienkontaktes. Man vergleiche dazu die Bilder 1.3 für den Fall gleich großer Schnittkrümmungen im Inneren der Tori und 1.4 für den allgemeinen Fall.

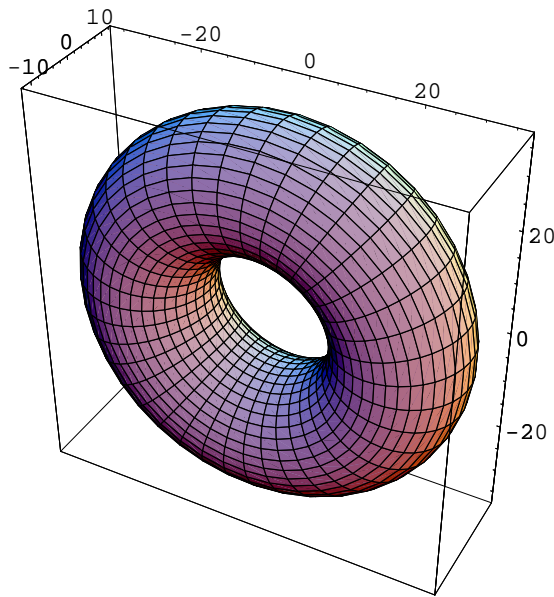


Abbildung 1.1: Ein Kreistorus (durch Rotation eines Kreises erzeugt) als Prototyp einer drehsymmetrischen Gelenkfläche. Er enthält sowohl konvex-konvexe Bereiche als auch konvex-konkave oder konvex-flache.

In den meisten dieser sattelförmigen Flächen finden sich im Gegensatz zum Torus einzeichnenbare gerade Linien endlicher Länge, die so genannten Erzeugenden (Abb. 1.5). Diese bilden eine Linienschar und unter geeigneten Voraussetzungen existieren sogar zwei sich kreuzende Scharen von Linien. Das hyperbolische Paraboloid, das elliptische Hyperboloid und natürlich die Ebene sind bereits alle Flächen mit zwei Scharen von Erzeugenden. Das Auffinden zweier Erzeugendenscharen ist also ein Befund, der die mathematisch in Frage kommenden Flächen schon sehr stark eingrenzt: Beide gehören in die Gruppe der algebraischen Flächen zweiter Ordnung, welche die einfachsten gekrümmten Flächen der Mathematik

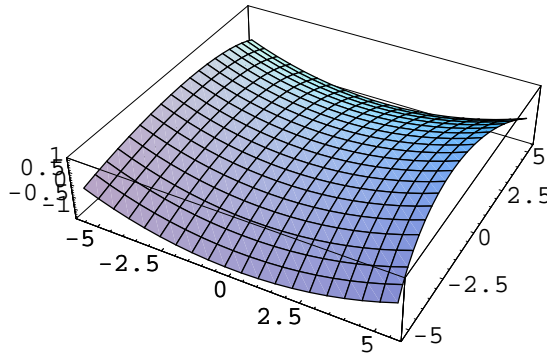


Abbildung 1.2: Eine sattelförmiger Ausschnitt des Torus aus Abb. 1.1.

sind. Ist nur eine Schar von Erzeugenden zu vermerken, so handelt es sich um eine sogenannte Regelfläche (englisch „ruled surface“), eine weitere gut untersuchte Familie von Flächen. Als Beispiel mag die Abbildung 1.6 dienen. Diese Erzeugenden können als linienförmige Kontakte bei der Übertragung von auf das Gelenk wirkenden Kräften und besonders Drehmomenten eine Rolle spielen, da die Übertragung eines Drehmomentes als Kräftepaar mehr als einen Kontaktpunkt benötigt.

1.3 Knochenumbau

Der Umbau von Knochen und des angrenzenden Gelenkknorpels wird neben einem ererbten Wachstumsmuster auch von mechanischen Reizen ausgelöst. Dann ist es aber durchaus denkbar, dass die unter Last kontaktierenden resultierenden Flächen als Lösungen der Differentialgleichungen der Mechanik einfachen mathematischen Gleichungen genügen. Ziel dieser Überlegungen ist es, Gelenkflächen in angemessener Weise mathematisch beschreiben zu können. Im Vordergrund steht daher die Gewinnung morphometrischer Daten. Diese werden leider nur selten publiziert, obwohl sie für biomechanische Modellbildung, numerische Simulationen der Kinematik und Elastomechanik oder auch für die Formgebung in der Endoprothetik von entscheidender Bedeutung wären. Insbesondere lässt erst der konkrete Vergleich kontaktierender Gelenkflächen Rückschlüsse auf ihre mechanische Funktion wie z. B. ihre Freiheitsgrade, Stabilität etc. zu.

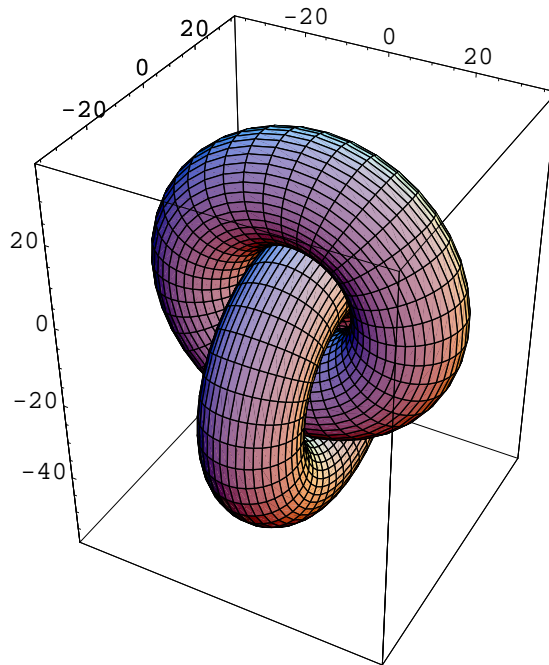


Abbildung 1.3: Zwei sich berührende Kreistori. Ihre Kinematik ist die von zwei Scharnieren mit gegeneinander verdrehten Achsen, welche durch die Rotationsachsen der Tori verlaufen. Insbesondere haben die konkaven und konvexen Radien im sattelförmigen Bereich der Tori den gleichen Betrag.

Historische Daten sind nur unter Vorbehalt brauchbar, da in der Natur Größen sowie oft auch Formen stetigen Veränderungen unterliegen („Akkelerationsprozess“), welche mindestens die Mittelwerte verändern. Ferner stellt sich die Frage, ob der Flächentyp anhand einfacher anatomisch zugänglicher Größen nicht auch genauer festgelegt werden kann.

1.4 Gliederung

In dieser kurzen Abhandlung soll zunächst auf möglichst einfach zu messende Größen und die Praktiken ihrer Messung eingegangen werden. Diese sind die Radien der Schnitt- und Hauptkrümmungen sowie bei Sattel-

flächen der Zwischenwinkel der Erzeugenden. Es wird eine Sammlung einfachster Mittel vorgestellt, um diese Größen zu messen. Die Bogenlänge, welche grundsätzlich auch messbar wäre, spielt in dieser Arbeit keine Rolle.

Danach werden die notwendigen mathematischen Begriffe zur lokalen Beschreibung der Flächen eingeführt und ihre Beziehungen zueinander diskutiert. Kennt man beispielsweise Schnitt- und Hauptkrümmungen sowie den Zwischenwinkel der Erzeugenden im selben Punkt, so kann man einen lokalen Zusammenhang zwischen ihnen nutzen: Sind die Hauptkrümmungen stark verschieden voneinander, so werden die Zwischenwinkel auch stark von 90° verschieden sein. Diese Überbestimmtheit kann zur Überprüfung der Daten oder zur Verbesserung der Genauigkeit benutzt werden. Abweichungen von solchen Beziehungen können aber auch als Hinweis darauf gewertet werden, dass die untersuchten Flächen keine Flächen zweiter Ordnung mehr sind.

Als Nächstes folgt ein Kapitel über geometrische Modellbildung, in der die in dieser Arbeit verwandten Flächen und ihre Gleichungen besprochen werden. Aus Gründen der Einfachheit und aufgrund ihrer Eigenschaften als Schmiegeflächen beschränke ich mich im Fortlauf dieser Arbeit nur noch auf algebraische Flächen zweiter Ordnung und Tori.

Danach folgt die Diskussion der einzelnen Gelenke. Zunächst wird die Darstellung einer Sattelfläche als Regelfläche besprochen. Obwohl es widersinnig scheint, lassen sich aus Geraden gekrümmte Flächen zusammensetzen. Eine Regelfläche ist eine aus Geraden solchermaßen zusammengesetzte Fläche, vgl. wieder etwa Abb. 1.6. Es findet sich auf ihr eine Schar von Erzeugenden. Diese sind der direkten Beobachtung zugänglich und lassen Rückschlüsse über die Gleichung der Fläche zu. Die Kehllinie, der kontinuierliche Grenzfall der Gemeinlote benachbarter Geraden, verliert ihre einfache Form (Parabel, Kreis oder Ellipse) und wird allgemeiner zur Striktionslinie. Beim hyperbolischen Paraboloid reichen zwei Parameter um die Gleichung festzulegen. Der Winkel zwischen beiden Erzeugenden allein reicht nicht zur Beschreibung der Fläche aus, dazu ist noch zusätzlich als Größenangabe einer der beiden Krümmungsradien der Kehlparabeln im Nullpunkt nötig.

Schließlich wird auf das einschalige Hyperboloid eingegangen. Als Rotationshyperboloid ist es aus der Kenntnis des Radius des Kehlkreises und dem Winkel zwischen Erzeugender und Mittelachse, gemessen in Projektion senkrecht auf das Gemeinlot der beiden, bestimmbar. Ist

die Grundlinie hingegen elliptisch, so müssen zuvor deren Halbachsen aus dem größten und kleinsten Krümmungsradius der Kehllinie berechnet werden. Hier sind also drei Parameter zur Bestimmung der Fläche nötig.

Der Vollständigkeit halber werden noch einige Bemerkungen zu eiförmigen und bikondylären Gelenkflächen gemacht. Bei den Letzteren sind zusätzliche Parameter zur Beschreibung der relativen Lage der Kompartimente zueinander nötig.

1.5 Ziel und Zielgruppe

Die Beschreibung einer Fläche durch wenige aussagekräftige Parameter hat den Vorzug, dass eine statistische Nachbereitung der Daten möglich ist. Bei allgemeinen Flächenklassen wie etwa Tensorprodukt-Splines [16] wird eine solche Statistik aufgrund der Datenflut praktisch unmöglich. Somit sind für genügend einfache Flächen Mittelwerte und Unterschiede in Größe und Form als Zahlen angebar. Diese Datenreduktion hat so neben dem ästhetischen Vorteil der Einfachheit auch den eingangs ange deuteten praktischen Nutzen in der Morphometrie.

Mitglieder der Zielgruppe dieser Arbeit sind, neben unserer Arbeitsgruppe, alle an Fragen der Formgebung organischer Gelenke interessierten Personen. Damit möchte ich also auch Anatomen und Zoologen ansprechen, die vorhaben, mit begrenztem Budget und technischem Aufwand quantitative dreidimensionale Morphometrie zu betreiben.

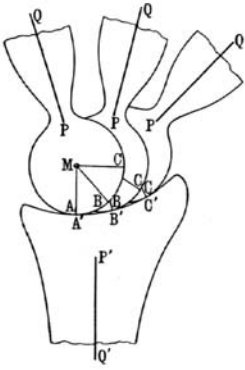
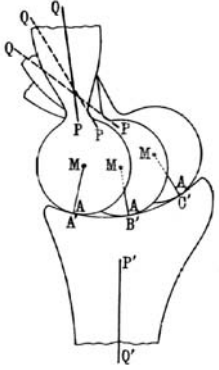
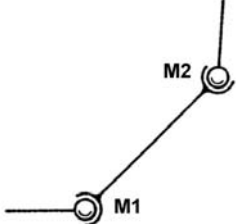
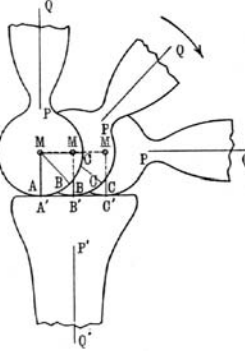
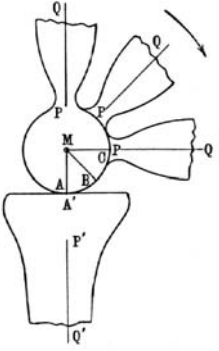
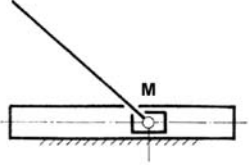
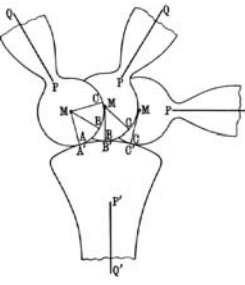
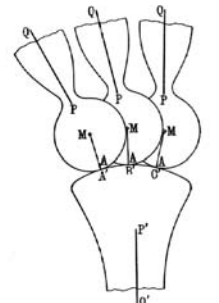
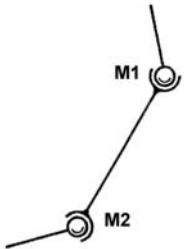
Ich bin mir des Anachronismus meiner Überlegungen durchaus bewusst. Im Zeitalter von immer höher auflösenden Magnetresonanz- und Computertomographie-Geräten mutet es schon kurios an, dass mit handwerklichen Methoden des 19. Jahrhunderts und der in den 20-er Jahren des vergangenen Jahrhunderts entwickelten Varianzanalyse gearbeitet werden soll. Der wesentliche Vorteil der modernen bildgebenden Verfahren besteht meines Erachtens aber nur darin, die Kinematik prinzipiell und in vivo mit einbeziehen zu können. In der Tat halte ich für den notwendigen nächsten Schritt die Klärung des Bezugs von Kinematik und Oberflächengeometrie (unter Berücksichtigung der bekannten Tatsachen bis zurück zu O. FISCHER [7], R. FICK [6] und H. STRASSER [35]) am einzelnen Gelenk. Ansätze für den dazu nötigen theoretischen Hintergrund sehe ich bei H. R. MÜLLER [25], J. HOSCHEK [15, 17, 18] und P. MEYER [22]. Indem sie das Problem als eben betrachteten und die Formen der

Kondylen der Gelenke zu Kreisen annäherten, konnten H. NÄGERL und Mitarbeiter das Problem auf die Getriebelehre bzw. auf die Kinematik von Gelenkketten zurückführen. Beispielsweise wird in [28] die Kinematik eines Knies zu der eines ebenen Vierecks eingegrenzt.

1.6 Danksagung

Diese Untersuchungen wurden durchgeführt als Mitglied der Arbeitsgruppe Biomechanik der Universitäten Göttingen, Greifswald und Jena unter der jeweiligen Leitung der Professoren H. NÄGERL, D. KUBEIN-MEESENBURG, J. FANGHÄNEL und P. ADAM. Ihnen und allen anderen Beteiligten sei an dieser Stelle mein Dank für die gute Zusammenarbeit ausgesprochen. Ganz besonders möchte ich Herrn NÄGERL für die kritische Durchsicht des Manuskripts und seine zahlreichen konstruktiven Anmerkungen danken.

Tabelle 1.1: Verschiedene Bewegungsformen und Ersatzgetriebe von Gelenken mit geringem Flächenkontakt. Diese von O. FISCHER den Zylindergelenken zugeschriebenen Bewegungsformen lassen sich auch problemlos übertragen auf komplexere sich eben bewegende Gelenke, welche in den Bahnen der Kontaktpunkte geschnitten werden. Bilder aus [7, 21]. Für nicht kreisförmige Schnitte gilt diese Konstruktion nur lokal.

Bewegung 1	Bewegung 2	mech. Ersatzgetriebe
		
		
		

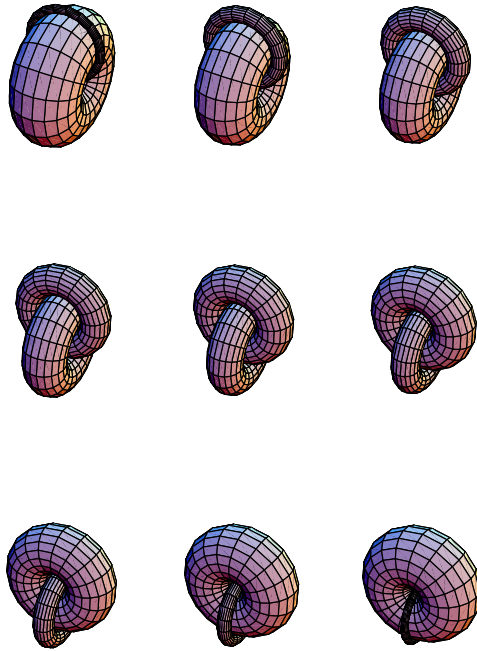


Abbildung 1.4: Eine Schar sich berührender Kreistori. Diese sind die einzigen Flächenpaarungen, bei denen die gesamte zweiparametrische Bewegung durchweg zwei kreisförmige Linienkontakte hat.



Abbildung 1.5: Der Abguss des femoralen Kompartements eines menschlichen Femoropatellargelenkes mit eingezeichneten Erzeugenden. Die Doppellinien entsprechen beiden Seiten eines Haarlineals. Die Abweichungen der Linien von Geraden liegen im Zehntel-Millimeter-Bereich. Bemerkenswert ist die Existenz zweier Scharen von Erzeugenden, denn es gilt: Jede Regelfläche mit zwei Geradenscharen, bei der zwei Geraden genau dann windschief sind, wenn sie der gleichen Schar angehören, ist entweder ein hyperbolisches Paraboloid oder ein einschaliges Hyperboloid [37]. Für die Funktion ist die Fläche in der Mitte allerdings nicht von Bedeutung, da der Kontakt auf je einem Punkt medial und lateral stattfindet [19]. Es handelt sich demnach dort nicht mehr um eine Fläche zweiter Ordnung.

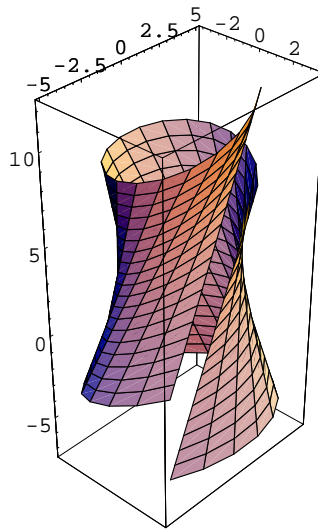


Abbildung 1.6: Eine Schraubregelfläche, welche aus einem elliptischen Hyperboloid abgeleitet wurde als spezielles Beispiel einer Regelfläche. Die Erzeugenden sind die steil aufwärts weisenden Linien.

2 Morphometrie mit einfachen Mitteln

Im Folgenden sollen einfache Methoden vorgestellt werden, mit denen Radien und Winkel an materiellen Körpern mit den ungefähren Abmessungen der menschlichen Gelenke bestimmt werden können. Im Rahmen der interindividuellen Streuungen stellen diese einen mehr als akzeptablen Kompromiss aus Genauigkeit und Aufwand dar.

Eine weitere der direkten Beobachtung zugängliche Größe ist die Bogenlänge, welche mit einem schlichten Maßband oder einem Rollrad mit Untersetzung, wie etwa zur Bestimmung einer Weglänge aus Wanderkarten gebräuchlich, bestimmt werden kann. Kennt man die Krümmung einer ebenen Kurve als Funktion der Bogenlänge, so kann man ihre Gleichung über den Hauptsatz der ebenen Kurventheorie bestimmen. Die Bogenlänge spielt aber in den folgenden Untersuchungen keine Rolle und sei daher nur der Vollständigkeit halber erwähnt.

2.1 Radien und Krümmungen

Der Kehrwert eines Radius r wird Krümmung $k = 1/r$ genannt. Diese Größe hat den Vorzug, auch annähernd ebene Schnitte mit in eine Statistik aufnehmen zu können ohne bei allzu großen Werten zu landen. Dennoch sind die Radien die am Objekt einfacher zugänglichen Größen. Zusammen mit Anfangs- und Endwinkel bezogen auf ein absolutes Koordinatensystem können sie Teil einer (technischen) Zeichnung sein.

Bisher wurden in unserer Arbeitsgruppe mit zahnärztlichen Abformmassen Duplikate aus besonders formtreuem und hartem Gips hergestellt. An diesen Modellen wurde nun über den Weg weiterer Abformungen verschiedene Schnitte durchgeführt und ihre Krümmungen bestimmt. Besonders kleine Schnitte müssen dazu (früher fotografisch, nun aber elektronisch mit Scanner und Drucker) vergrößert werden. Vom Zersägen eines Abgusses oder gar des Präparates selber soll (bis auf besondere Fotos,

etwa für Veröffentlichungen) Abstand genommen werden. Hingegen machen Schnitte an Negativformen Sinn, da man mit ihnen eine Zuordnung von Gelenk und Gegengelenk im Kontaktpunkt vornehmen kann. Die im Folgenden beschriebenen Methoden arbeiten mit möglichst geringem Aufwand und schonend am Objekt.

2.1.1 Konturtaster und Radienschablone

Der Konturtaster, auch Figurenlehre oder Kopierkamm genannt,¹ ist eine Anordnung aus parallelen mittels Reibung festgehaltenen relativ steifen Drähten, welche in ihrer Längsachse gegeneinander beweglich sind, vgl. die Abbildungen 2.1 und 2.2. Das Gerät wird beispielsweise von Fliesenlegern eingesetzt um den Verlauf von Heizungsrohren auf die Fliese zu übertragen oder von Instrumentenbauern, die etwa den Querschnitt eines Gitarrenhalses bestimmen wollen.



Abbildung 2.1: Ein Konturtaster, hier mit einer bogenförmigen Kontur.

Beide Konturen des Tasters werden nun mit einem Stift mit bekanntem Spitzendurchmesser s (etwa ein Druckbleistift) auf Papier übertragen. Ihre Krümmungsradien r_1 und r_2 können nun mit einer darübergelegten auf durchsichtiger Folie gedruckten Radienschablone (Abbildungen 2.3 und 2.4)² bestimmt werden. Da beide Radien die Stiftdicke s mit

¹Es scheint für dieses Werkzeug ebenso viele Bezeichnungen wie Hersteller zu geben. Hier eine Auswahl: Profilabtaster, (Ab)tastschablone, Konturenlehre, Kopierlehre, Nadelschablone, Konturier-Abtaster,...

²Warnung: Diese Exemplare wurden in PostScript erstellt und dort werden Kreise



Abbildung 2.2: Der Konturtaster in Aktion, hier am konvexen Sagittalschnitt des lateralen Kompartimentes eines Abgusses einer menschlichen Tibia.

unterschiedlichem Vorzeichen enthalten, erhält man den Radius über

$$\frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{(r + s) + (r - s)}{2} = \frac{2r}{2} = r \quad .$$

Als Mittelwert der beiden Einzelwerte erhöhte das sogar die Genauigkeit.

Das Verfahren kann auch direkt am Rechner durchgeführt werden. Dazu versucht man, einen Scan der Kontur und (bei gleicher Auflösung) eine Datei einer Radienschablone mit durchsichtigem Hintergrund via Bildverarbeitung in Übereinstimmung zu bringen. Dann ist nach dem Scan keine weitere Arbeit am Modell mehr nötig. Um eine unmittelbare Überprüfbarkeit der verarbeiteten Daten zu gewährleisten, sollte immer ein Stück Millimeterpapier gemeinsam mit der Kontur eingescannt werden,

Während der Suche nach dem passenden Kreis bekommt man ein gutes Gespür für den Bereich in Frage kommender Radien und damit eine Aussage über die Genauigkeit der Anpassung desselben. Die gewünschte Güte der Approximation kann auch über Radienschablonen mit verschiedenen Strichdicken im Vorfeld festgelegt werden. Ferner ist der Winkelbereich der Kontur, welcher durch einen Kreis angenähert wird, prinzipiell gut erkennbar.

ungenau als kubische Bézier-Splines dargestellt. Ferner hängt die Maßhaltigkeit eines Ausdruckes vom Drucker, seinem Treiber, dessen Einstellungen sowie dem Druckmedium ab.

Indem die beidseitigen Winkel des Konturtasters mit der Gelenkfläche gleich gehalten werden, liegt die Normale der Oberfläche in der Ebene des Tasters. Die Oberflächennormale kann man näherungsweise veranschaulichen, indem man eine Reißzwecke mit dem Rücken auf das Gelenk legt. Durch Drehen des Konturtasters um diese Oberflächennormale können die Hauptkrümmungsrichtungen wegen ihrer Extremaleigenschaft empirisch bestimmt werden. Mit dem Konturtaster können aber noch weitere Untersuchungen an der Gelenkfläche vorgenommen werden. Eine vermutete Spiegelsymmetrie des Schnittes kann man durch Umdrehen des Konturtasters direkt überprüfen. Vermutet man eine Rotationssymmetrie, so ist dies mittels Verschieben des Konturtasters entlang des Schnittes kontrollierbar. Ferner kann untersucht werden, ob sich ein Schnitt finden lässt, der über einem möglichst großen Bereich der Fläche gleich bleibt, obwohl sich sowohl Lage als auch Orientierung der Schnittebene ändern. Eine solche Fläche wäre dann eine sogenannte Extrusionsfläche.

2.1.2 Die Messuhr

Ein Kreis ist durch drei Punkte festgelegt, also auch sein Radius. Die Messuhr besteht aus drei mit kugelförmigen Spitzen versehenen Tastern, wobei der mittlere beweglich ist, vgl. Abb. 2.5. Die beiden äußeren Taster haben den gleichen Radius r und Abstand d zum mittleren, sie berühren die zu messende Fläche wobei das Gerät insgesamt senkrecht zur Fläche im mittleren Taster zu halten ist. Die Skala ist drehbar, so dass der Taster auf einer Ebene angebracht den Wert Null anzeigt. In dieser Nullstellung müssen alle drei Kugelmittelpunkte auf einer Geraden liegen. Der senkrecht zu einer gekrümmten Fläche gehaltene Taster zeigt nun den Abstand x von der Verbindungslinie der Kontaktpunkte der äußeren Taster an. Aus diesem Messwert soll der Radius R der Schnittkrümmung der Fläche berechnet werden.

Aus Figur 2.6 entnimmt man

$$\begin{aligned}(R+r)^2 &= d^2 + ((R-x+r))^2 = d^2 + ((R+r)-x)^2 \\ &= d^2 + (R+r)^2 + x^2 - 2(R+r)x \quad ,\end{aligned}$$

und nach Subtraktion der quadratischen Glieder in $(R+r)$ erhält man aufgelöst nach R

$$R = \frac{d^2 + x^2 - 2rx}{2x} = \frac{d^2}{2} \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x - r \quad . \quad (2.1)$$

Für negative x kehrt sich das Vorzeichen von R erwartungsgemäß um.

Diese Berechnungen lässt man sich vorzugsweise von einem Computer durchführen — hier ein Bespiellisting in QBASIC.

```
REM Radien fuer Messuhr mit Krueimmungskorrektur
CLS
d = 7           'halber Fuehlerabstand
rk = 1.5       'Fuehlerradius
PRINT
titel$ = "Radien fuer Fuehlerabstand" + STR$(2 * d)
titel$ = titel$ + " und Fuehlerradius" + STR$(rk) + ","
titel$ = titel$ + " 'raus mit Wert < 0 o. > 10"
PRINT titel$
PRINT "-----"
DO
INPUT "Anzeige der Messuhr"; x
IF x < 0 OR x > 10 THEN EXIT DO
xx = x - 5 'Mittelstellung der Messuhr
IF xx <> 0 THEN
    r = (d * d + xx * xx - 2 * rk * xx) / (2 * xx)
    r = INT(r * 10 + .5) / 10
    PRINT "Radius:",
    PRINT USING "+###.# "; r;
    PRINT ,
    PRINT "Durchmesser:",
    PRINT USING "+###.# "; 2 * r
    ELSE PRINT " Infty "
END IF
LOOP
SYSTEM
```

Durch Ausprobieren verschiedener Kippungen kann die maximale Schnittkrümmung und damit die Flächennormale per Hand eingestellt werden. Durch Bewegen der Messuhr etwa entlang einer Kehllinie kann unmittelbar die Konstanz einer Krümmung überprüft werden. Indem man sie um den mittleren Taster dreht, ist die Messuhr auch zum Auffinden von asymptotischen Richtungen bzw. Erzeugenden geeignet, vorausgesetzt, diese sind lang genug.

Es ist möglich, diese Berechnungen zusammen mit etwa einem induktiven Messtaster in ein netzunabhängiges einfachst zu handhabendes Gerät zur schnellen Bestimmung von Radien zu integrieren. So etwas wurde meines Wissens nach bisher zwar nicht gebaut, wäre aber bei Serien von Messungen durchaus nützlich.

Die Messuhr kann Radien von $d-r$ bis $-(d+r)$ messen, an der Grenze

klemmt das aber. Der Bereich des mittleren Tasters ist entsprechend von $-d$ bis $+d$ zu wählen. Die Abhängigkeit von Radius und Krümmung ist beispielhaft in Abb. 2.7 dargestellt. Es handelt sich bei der Messuhr also eher um ein Gerät zur direkten Bestimmung der Krümmung als um eines zur Messung von Radien.

Die Genauigkeit der Messuhr ist optimal im Bereich maximaler Steigung der Krümmung $K(x) = 1/R(x)$ als Funktion von x , vgl. wieder Abb. 2.7. Das Maximum wird bestimmt durch $\partial^2 K / \partial x^2|_{x_o} = 0$ und definiert die Mitte dieses Bereiches. Nach Gleichung (2.1) und einiger Rechnung folgt eine Gleichung dritten Grades für den Punkt x_o

$$0 = \frac{4 (d^2 (2r - 3x_o) + x_o^3)}{(d^2 + x_o (-2r + x_o))^3}$$

also mit den Werten unseres Beispiels $x_o \approx 1mm$ und $R_o \approx 23mm$. Die Abmessungen der Messuhr können folglich dem erwarteten Messbereich optimal angepasst werden.

2.1.3 Radienlehren

Unter einer Lehre versteht man in der Technik eine Vorrichtung zum Prüfen von Werkstücken. Ebenfalls mit dem Lichtspalttest können die mit der Messuhr ermittelten Radien anhand genau kreisbogenförmig geschliffener Metallplättchen überprüft werden, vgl. Abb. 2.8.

Die Entscheidung für einen Radius trifft man durch Vergleich mit benachbarten Plättchen über die Breiten der Lichtspalte. Da sich zwei nicht übereinstimmende Kreise immer in nur einem Punkt berühren, deutet das Vorliegen von zwei Berührungspunkten auf eine zwischen diesen Punkten zunehmende Krümmung der Messfläche hin. Diese wäre dann kein Kreis mehr. Als Beispiel mag Abb. 2.9 dienen.

Bei unzugänglichen Gebieten kann man den Konturtaster mit Radienlehren sinnvoll kombinieren, da eine Kontur immer in konkaver und konvexer Form vorliegt.

2.1.4 Bildverarbeitung

Neben der oben erwähnten Verwendung von Radienschablonen mit durchsichtigem Hintergrund gibt es noch eine weitere Möglichkeit, Radien aus gescannten Schnitten zu bestimmen, und zwar über die Koordinaten dreier Punkte der Schnittkontur. Ein Kreis ist ja eindeutig durch drei Punkte

definiert. Das erfordert natürlich nicht nur die drei Pixelkoordinaten sondern auch Kenntnis über die Auflösung des Scans (und bei Programmen, die der Druckvorbereitung dienen außerdem noch Ausgabegröße bzw. Skalierung). Ich beziehe mich im Folgenden auf das freie Programm GIMP (“**GNU Image Manipulation Program**”). Man bekommt dort die Koordinaten des Cursors angezeigt, und zwar wahlweise in Pixeln oder umgerechnet auf Längen. Diese Umrechnung hängt von der prinzipiell frei wählbaren Auflösung wie folgt ab: Seien (p, q) die ganzzahligen Koordinaten des betrachteten Pixels und s die Auflösung des Bildes, meist angegeben in dpi (“**dots per inch**”). Da $1\text{inch} = 1\text{Zoll} = 25.4\text{mm}$, gilt die Beziehung

$$(x, y)/\text{mm} = (p, q) \frac{1}{s/\text{dpi}} \frac{1}{25.4} .$$

Eine erwähnenswerte Besonderheit stellt hier das in der Medizin weit verbreitete DICOM Datenformat dar (“**D**igital **I**maging and **C**ommunications in **M**edicine”). Es enthält neben den eigentlichen Bilddaten auch einen textbasierten Header aus sog. Tags, der neben personenbezogenen Daten auch solche zur Bildentstehung wie etwa die Auflösung enthält. Ein gutes Programm zum Konvertieren von DICOM-Dateien in andere Datenformate ist das freie IrfanView.

Das Prinzip geht wie folgt: Aus den drei Punkten (x_1, y_1) , (x_2, y_2) und (x_3, y_3) berechnet man die Determinante

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

und bestimmt dann aus den Koeffizienten der sich ergebenden Gleichung

$$a(x^2 + y^2) + 2dx + 2ey + f = 0$$

durch Vergleich mit $(x - \mathbf{m})^2 - r^2 = 0$ Mittelpunkt \mathbf{m} und Radius r zu

$$\mathbf{m} = \left(-\frac{d}{a}, -\frac{e}{a}\right) \quad \text{und} \quad r = \frac{1}{a} \sqrt{d^2 + e^2 - af} .$$

Für das Quadrat des Radius ergibt sich insbesondere die vom Mittelpunkt unabhängige Form

$$r^2 = \frac{((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2) ((x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2) ((x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2)}{4(x_3(y_2 - y_1) + x_2(y_1 - y_3) + x_1(y_3 - y_2))^2} .$$

Bisher ist mir aber leider kein Bildbearbeitungsprogramm bekannt, in dem das realisiert ist. Dazu muss man sich, ggf. nach Konversion in ein Zwischenformat, eines CAD-Programms (“Computer Aided Design”) bedienen, sofern dieses einen Grafikimport besitzt. Ein solches Programm ist das unter Linux freie QCad. Ein Beispiel findet sich in Abb. 2.10.

Es gibt darüber hinaus diverse numerische Verfahren, bei denen ein Kreis an auch mehr als drei Punkte angepasst werden kann. Beispielsweise kann der obige Determinantenansatz auf das überbestimmte Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^2 + y_n^2 & x_n & y_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 2d \\ 2e \\ f \end{pmatrix} = \mathbf{0}_n$$

verallgemeinert werden. Problematisch werden solche ausgleichenden Verfahren dann, wenn die zu messende Kontur kein Kreis mehr ist. Das ließe sich daran überprüfen, ob die Ergebnisse der Kreisanpassung von der Wahl der Punkte abhängen.

2.2 Geraden

Das Haarlineal (Abb. 2.11) ist das Pendant zu den Radienlehren für gerade Konturen. An glatten Oberflächen erlaubt der Lichtspalttest wegen der exakt gerade geschliffenen Flächen Genauigkeiten bis zu $5/1000mm$. Für unsere Zwecke dient es dazu, an Gelenkflächen asymptotische Richtungen oder – je nach Bereich – erzeugende Geraden aufzufinden. Die erreichte Anpassung an eine gerade Line und deren Länge kann mit etwas Erfahrung und einer guten Beleuchtung an der Größe des Lichtspaltes abgelesen werden. Es ist eine gute Beleuchtung erforderlich, wie in Abb. 2.12. Auf sehr kleinen Gelenkflächen ist die Spitze hilfreich. Bei schwer zugänglichen Abschnitten einer Gelenkfläche kann es ersatzweise durch ein hinreichend genau geschliffenes Skalpell oder notfalls auch durch die Spitze eines breiten Schraubenziehers ersetzt werden.

Die gefundenen Geradenabschnitte können nun einfach mit einem Stift direkt auf der Fläche eingezeichnet werden, und zwar beidseits des Haarlineals (vgl. Abb. 1.5). Problematisch ist es dann, wenn die Geraden „am Grund“ einer insgesamt eher konkaven Fläche verlaufen. Dann muss man entweder einen der Radienlehre ähnelnden aber planen Prüfkörper

herstellen oder die Untersuchung an einem Negativ-Abguss der Gelenkfläche durchführen.

2.3 Winkel

Winkel haben den Vorzug, als dimensionslose Größen unabhängig von der Vergrößerung also vom Maßstab zu sein. Das erklärt auch ihren bevorzugten Einsatz etwa in der Kephalmetrie. Im Gegensatz zu ebenfalls dimensionslosen Verhältniszahlen haben sie aber eine unmittelbare geometrische Bedeutung.

Falls auf einer Gelenkfläche zwei Scharen von Erzeugenden vorliegen, kann deren Zwischenwinkel als Messgröße verwendet werden. Andere Winkel zur Beschreibung von Flächen sind die von Asymptoten, etwa am Femoropatellar- oder am Humeroulnargelenk.

Zum unmittelbaren Messen von Winkeln gibt es diverse einfache Winkelmesser, vgl. Abb. 2.13 oder 2.14, welche senkrecht zur Flächennormale im Schnittpunkt der Erzeugenden gehalten werden müssen. Die Reproduktionsgenauigkeit liegt mit etwa 1° unterhalb der interindividuellen Streuungen der mir bekannten Gelenkflächen und auch unterhalb der intersubjektiv verschiedenen Einzeichnung von Asymptoten.

Zur Messung von Winkeln eignen sich auch Schablonen, vgl. Abb. 2.15. Diese müssen wieder möglichst senkrecht zur Oberflächennormale angehalten werden. Das gilt auch für Winkel zwischen Asymptoten: Hier muss die Bezugsebene genau definiert und eingehalten werden. Die Schablonen sind natürlich unabhängig von der Wahl der Vergrößerung.

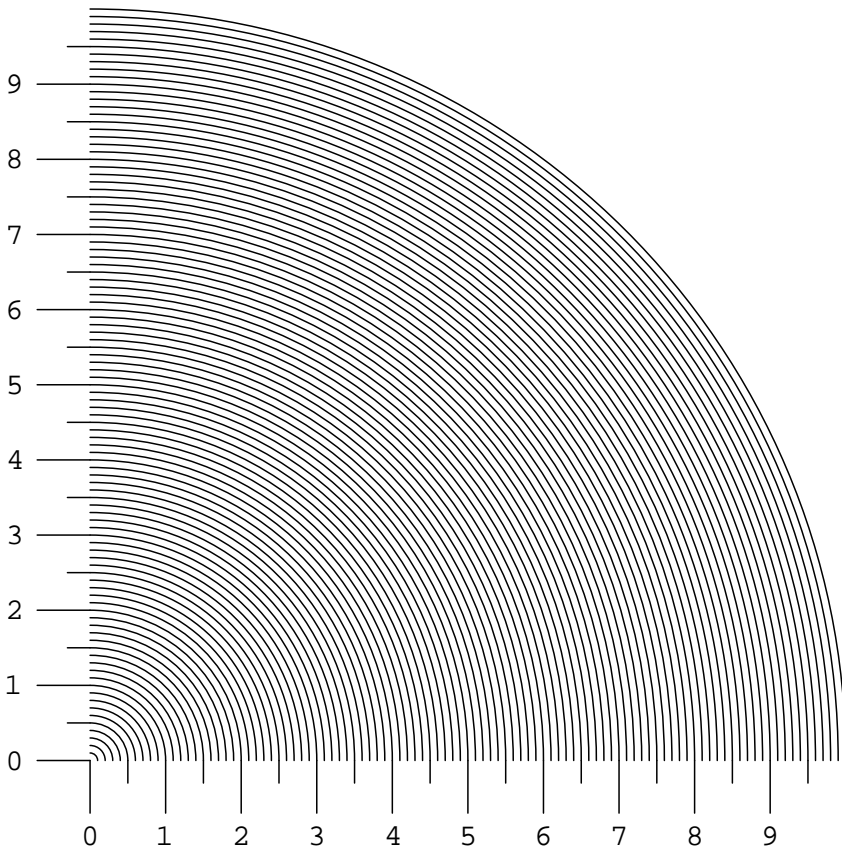


Abbildung 2.3: Eine Radienschablone. Der Mittelpunkt kann bei einer Folie mit einer heißen Nadel herausgebrannt werden, so dass der Mittelpunkt an der Durchzeichnung oder am Scan markiert werden kann.

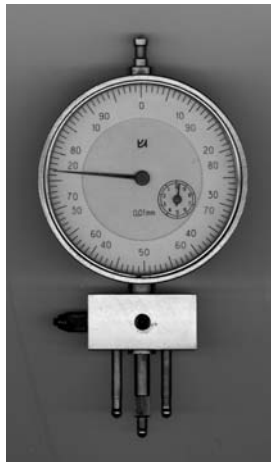


Abbildung 2.5: Eine handelsübliche Messuhr mit einem von einem Feinmechaniker angefertigten Zusatzaufbau aus zwei Spitzen mit gleichen Radien und gleichem Abstand zum mittleren Taster.

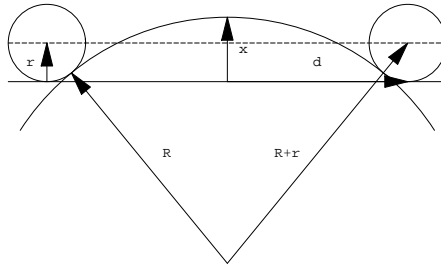


Abbildung 2.6: Das Prinzip der Messuhr. Der Weg vom Mittelpunkt der Schnittkontur zum Mittelpunkt eines äußeren Fühlers kann direkt über die Diagonale als Kathete der Länge $R+r$ verlaufen. Ein anderer Weg geht über die beiden Katheten zunächst aufwärts zum höchsten Punkt der Kontur mit R , dann abwärts auf die Bezugsline mit $-x$ und wieder aufwärts um den Fühlerradius r und schließlich im rechten Winkel dazu entlang der gestrichelten Linie um den halben Fühlerabstand d . Der Satz des PYTHAGORAS liefert dann den obigen Ansatz.

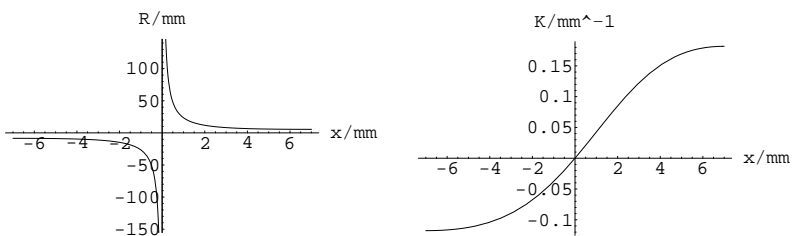


Abbildung 2.7: Die Abhängigkeit des Radius R und der Krümmung $K = 1/R$ vom Anzeigewert x am Beispiel der Messuhr aus Abb. 2.5. Die Abmessungen sind $d = 7\text{mm}$ und $r = 1.5\text{mm}$.



Abbildung 2.8: Drei handelsübliche Radienlehren. Die Abstände und ihre Abstufungen sind: 1–3(0.25) 3.5–7(0.5)mm, 7.5–15(0.5)mm und 15.5–20(0.5) 21–25(1)mm.



Abbildung 2.9: Radienlehren in Aktion am Abdruck eines menschlichen Oberkiefers. Der 3-er Radius berührt den Frontzahn nur in einem Punkt und ist daher zu klein, der 4-er und erst recht der 4.5-er berühren die Kontur in zwei Punkten und sind zu groß. Am Besten passt der 3.5-er Radius mit vielleicht einer Tendenz zu größeren Werten.



Abbildung 2.10: Eine MRT-Aufnahme der Handwurzel wurde mittels des „Pixel-Spacing“, DICOM-Tag (0028,0030), auf eine Auflösung von 254 dpi entsprechend 10 Pixel/mm heraufgerechnet und invertiert. Die Kreise wurden aus je drei Punkten mit dem Programm QCad berechnet, bemaßt und eingezeichnet. Die Maßangaben sind demnach in Zehntelmillimetern. Die unterschiedlichen Mittelpunkte ergeben eine dimere Kette [27].

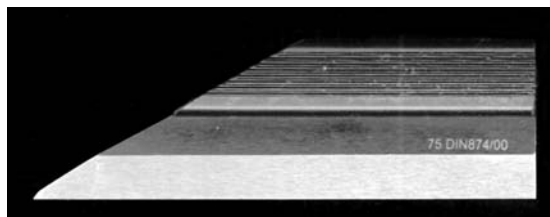


Abbildung 2.11: Ein Haarlineal.

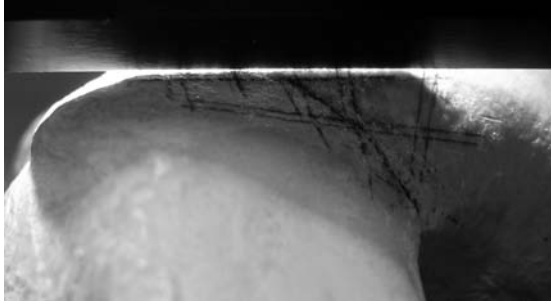


Abbildung 2.12: Ein Haarlineal in Aktion an dem Abguss eines menschlichen Femoropatellargelenkes. Die Spaltbreite erscheint aufgrund der sehr hellen rückwärtigen Beleuchtung größer als in Wirklichkeit.



Abbildung 2.13: Ein einfacher Winkelmesser.

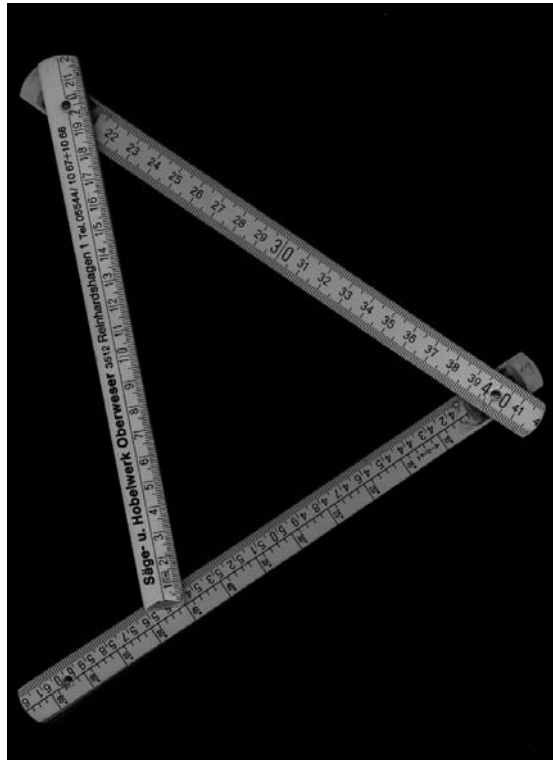


Abbildung 2.14: Ein Zollstock mit einer auf dem Kosinussatz beruhenden Zusatzskala für Winkel, hier eingestellt auf 45° . Man beachte das nichtlineare Verhältnis von Winkel- zu Längeninkrement.

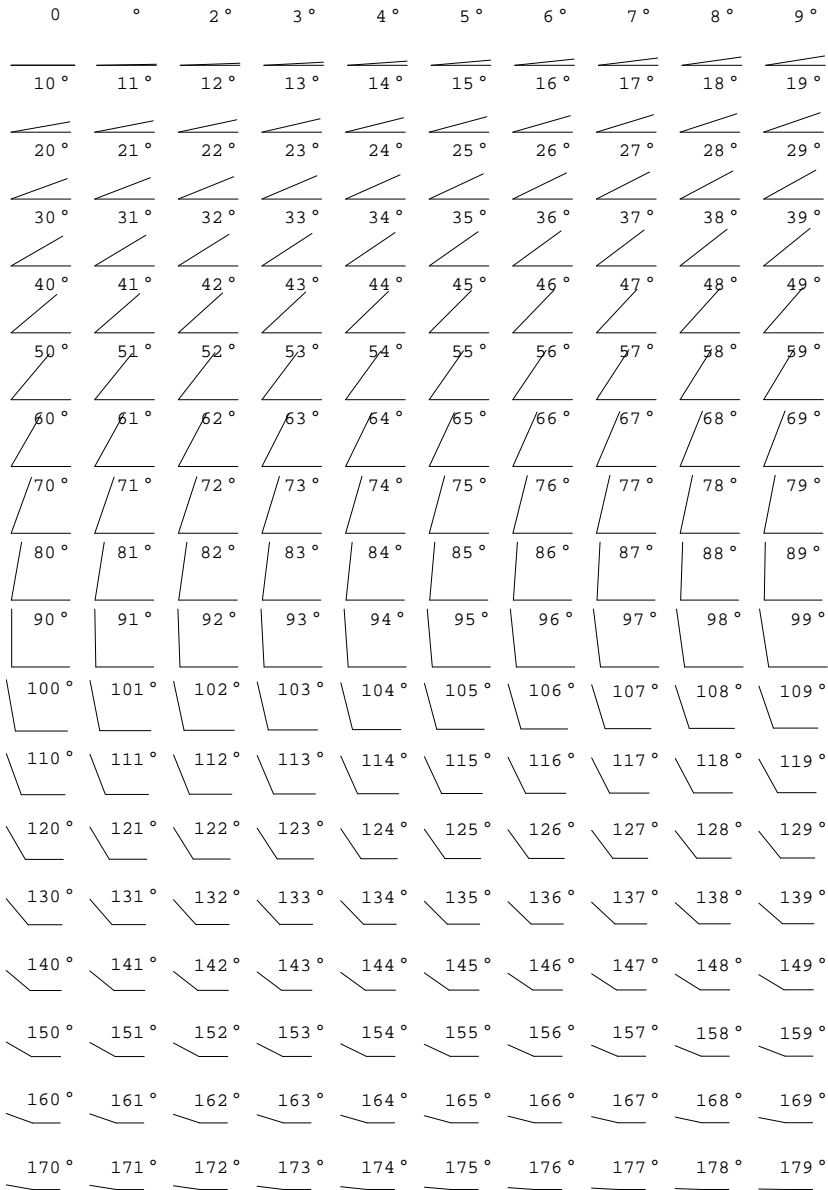


Abbildung 2.15: Winkelschablonen zum Ausdrucken auf Transparentfolie.

3 Mathematische Hilfsmittel aus der Differentialgeometrie von Flächen

Zunächst soll die Umgebung eines Punktes der Fläche lokal untersucht werden [13, 20]. Eine Fläche hat in jedem ihrer Punkte eine Schmiegeebene, welche als Grenzfall approximierter Ebenen zu beliebig kleinen Umgebungen betrachtet werden kann. Diese Ebene besitzt eine Normale, die Flächennormale, welche lokal senkrecht auch zur Fläche steht. Wählt man eine weitere Ebene so, dass diese Normale in ihr liegt, so erhält man als Schnitt dieser mit der Fläche eine ebene Raumkurve, vgl. Abbildung 3.1. Deren Krümmung (der Kehrwert des Radius r der Schnittkontur) im betrachteten Flächenpunkt nennt man Schnittkrümmung.

Dreht man die Schnittebene um den Normalenvektor als Achse um den Winkel φ , so erhält man i.A. andere Krümmungsradien $r(\varphi)$. Die Minima und das Maxima der Krümmungen werden während einer vollen Umdrehung der Schnittebene je zweimal angenommen, man spricht von den Hauptkrümmungen. Die zugehörigen Richtungen nennt man die Hauptkrümmungsrichtungen.

Aus der Differentialgeometrie ist nun bekannt, dass die Hauptkrümmungsrichtungen aufeinander senkrecht stehen.¹ Ferner wird so auf der Fläche zunächst lokal ein Koordinatensystem ausgezeichnet, welches auf die gesamte Fläche fortgesetzt werden kann.

Schnitte mit dem Normalenvektor in der Schnittebene nennt man auch *Normalschnitte*. Der Satz von EULER beschreibt nun einen Zusammenhang zwischen den Hauptkrümmungen und denen der Normalschnitte: Ist φ der Winkel der Schnittkurve zur ersten Hauptkrümmungsrichtung

¹Das liefert schon einmal einen praktischen Test, ob man am Modell bzw. der Gelenkfläche die richtigen Schnittrichtungen zum Messen der Hauptkrümmungsradien gewählt hat. Diese haben meist eine in anatomischen Termini formulierbare mechanische Funktion.

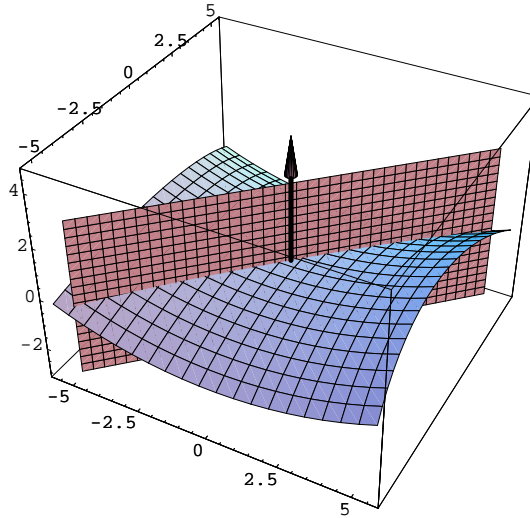


Abbildung 3.1: Der Torusausschnitt aus Abb. 1.2 mit eingezeichneter Flächennormale und einer Schnittebene mit im Ursprung verschwindender Schnittkrümmung. Die Abweichung von einer Erzeugenden sind zwar klein, aber deutlich zu erkennen.

tung, so lassen sich die Krümmungen $\kappa(\varphi) = 1/r(\varphi)$

$$\kappa(\varphi) = \kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi \quad (3.1)$$

auf die Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 zurückführen. Der Satz von MEUSNIER verallgemeinert dieses Resultat auf nicht normale Schnitte

$$\kappa(\varphi) = \frac{\kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi}{\cos \gamma} \quad , \quad (3.2)$$

wobei γ der Winkel ist, den die Schnittebene mit der Flächennormale einschließt.

In der Differentialgeometrie von Flächen treten die beiden Hauptkrümmungen als Eigenwerte einer Matrix auf, der sog. zweiten Fundamentalfarm. Diese Matrix kann durch weitere Invarianten beschrieben werden, insbesondere durch ihre Determinante $\kappa_1 \kappa_2$ und ihre Spur $\kappa_1 + \kappa_2$. Das Produkt der beiden Krümmungen nennt man die Gaußsche Krümmung,

und den Mittelwert der beiden Krümmungen, also die Hälfte der Spur, nennt man die mittlere Krümmung.

Haben die Hauptkrümmungen gleiche Vorzeichen (also beide konvex oder beide konkav), so spricht man von einem elliptischen Flächenpunkt. Sind sie darüber hinaus gleich, so wird der Punkt sphärisch oder auch Nabelpunkt bzw. Umbilikalpunkt genannt. Ist eine der beiden Hauptkrümmungen gleich Null, so handelt es sich um einen parabolischen Flächenpunkt. Haben die Hauptkrümmungen verschiedene Vorzeichen (also eine konkav und die andere konvex), so spricht man von einem hyperbolischen Flächenpunkt. Dann aber existieren zwischen den Hauptkrümmungsrichtungen zwei Richtungen φ_+ und φ_- mit verschwindender Krümmung, die sog. asymptotischen Richtungen. Lässt sich ein solcher Geradenabschnitt über einen größeren Bereich der Fläche fortsetzen, so spricht man von Erzeugenden (bzw. erzeugenden Geraden). Man erhält dann aus

$$0 = \kappa_1 \cos^2 \varphi_{\pm} + \kappa_2 \sin^2 \varphi_{\pm}$$

zunächst für das Verhältnis der Radien

$$\tan^2 \varphi_{\pm} = \frac{\sin^2 \varphi_{\pm}}{\cos^2 \varphi_{\pm}} = -\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = -\frac{r_2}{r_1} \quad (3.3)$$

und weiter

$$\tan \varphi_{\pm} = \pm \sqrt{-\frac{r_2}{r_1}} \quad .$$

Die Hauptkrümmungsrichtungen sind demnach Winkelhalbierende der Asymptoten und umgekehrt. Der Winkel α zwischen den beiden Asymptoten oder auch Erzeugenden ist im Gegensatz zu dem zwischen den Hauptkrümmungsrichtungen von 90° verschieden, denn es gilt

$$\alpha = \varphi_+ - \varphi_- = 2 \arctan \sqrt{-\frac{r_2}{r_1}} \quad . \quad (3.4)$$

Gilt speziell $r_1 = -r_2$ wie beim Toruspaar aus Abb. 1.3, so folgt $\alpha = 2 \arctan 1 = 90^\circ$ und die Asymptoten stehen senkrecht aufeinander. Ist $r_2 < r_1$, so ist der Winkel kleiner als 90° , im gegenteiligen Fall ist er größer. Beide Male liegen die Asymptoten um den größeren Schnittradius näher beisammen, da der Winkel bezüglich der zu r_1 gehörenden Richtung definiert war. Der größere Radius zieht als „geradere“ Linie die Asymptoten gewissermaßen an. Vertauscht man die beiden Radien, so erhält man

im Vergleich zum ursprünglichen Radienverhältnis wegen (3.3)

$$\sqrt{\frac{r_1}{r_2}} = \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \cot \frac{\alpha}{2} = \tan \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \tan \left(\frac{180^\circ - \alpha}{2} \right)$$

genau den Supplementwinkel $180^\circ - \alpha$. Insbesondere bei Winkeln um $\alpha \approx 90^\circ$ muss man also auf die Zuordnung aufpassen.

Um von einem konvex/ konvexem Gebiet in ein konvex/ konkaves zu gelangen, muss mindestens eine der beiden Krümmungen zwischen-
drin verschwinden. Die Menge aller dieser parabolischen Punkte einer Fläche bildet Linien², welche die Gebiete aller elliptischen von den hyperbolischen Punkten trennen. Im Falle etwa des Torus aus Abb. 1.1 sind das genau die Kreise an der Seite. In den hyperbolischen Bereichen einer Fläche können die asymptotischen Richtungen zu einem Liniennetz fortgesetzt werden, den sog. asymptotischen Kurven. Sind diese gerade, dann sind sie genau die Erzeugenden. Von größerer Bedeutung sind aber die Hauptkrümmungslinien, welche die Hauptkrümmungsrichtungen zu einem auf der gesamten Fläche definierten und orthogonalem Koordinatennetz ausweiten.

Die Gleichung (3.3) oder (3.4) reduziert auf hyperbolischen Flächenstücken die scheinbar unabhängigen drei Parameter r_1 , r_2 und φ auf zwei. Werden also sowohl die Radien als auch dieser Zwischenwinkel an einer Sattelfläche gemessen, so kann mittels dieser Redundanz die Genauigkeit der gemessenen Parameter erhöht werden. Dazu benutzt man zweckmäßigerweise die Gleichung (3.3) für das Verhältnis der Radien. Mittelt man

$$v := \frac{1}{2} \left(\tan^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) - \frac{r_2}{r_1} \right) \quad , \quad (3.5)$$

so erhält man die ebenfalls gemittelten Radien

$$R_1 := \frac{1}{2} (r_1 + r_2/v) \quad \text{und} \quad R_2 := \frac{1}{2} (r_2 + vr_1) \quad , \quad (3.6)$$

deren Verhältnis

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{r_2 + vr_1}{r_1 + r_2/v} = v \frac{r_2/v + r_1}{r_1 + r_2/v} = v$$

wieder v ergibt. Die derart gemittelten Größen sind also in sich konsistent.

²Regelflächen bestehen nur aus parabolischen Punkten, diese können demnach sogar ganze Bereiche bilden.

4 Die Art des Kontaktes

Bei den vorangegangenen Überlegungen zur Berührung von Flächen wurden die Aspekte des sich berührenden Materials bewusst außer Acht gelassen. Im Gegensatz zu den Abmessungen spielt dieses nur eine untergeordnete Rolle. Die Berücksichtigung von Materialeigenschaften im Gelenkkontakt ist darüber hinaus mathematisch höchst anspruchsvoll. In diesem kurzen Abschnitt soll es um die notwendigen Zutaten einer solchen realistischen mathematischen Beschreibung des Knorpelkontaktes gehen. Eine Durchführung dieses ebenso aufwändigen wie wenig nutzbringenden Unterfangens möchte ich aber Anderen überlassen.

Die Unterscheidung in Punkt-, Linien- und Flächenkontakt ist rein geometrisch. Schon in der HERTZschen Theorie der elastischen Berührung fester Körper [11] geht der Kontaktpunkt in eine elliptisch berandete Kontaktfläche über. Die charakteristischen Parameter der Theorie sind die Hauptkrümmungsradien der Berührflächen sowie der Winkel ihrer gegenseitigen Verdrehung. Ein anderer Aspekt biologischer Gelenke ist die Gelenkflüssigkeit (*Synovia*), die im einfachsten Fall durch die SOMMERFELDSche Theorie der Schmiermittelreibung [34] hydrodynamisch beschrieben werden kann. Der wesentliche neue Parameter dieser Theorie ist die Viskosität des Schmiermittels. Beide Theorien, die HERTZsche und die SOMMERFELDSche, werden vereint in der Elastohydrodynamik (EHD) von DOWSON [4]. Dort kann näherungsweise eine für die Schmierung nötige minimale Schmiermitteldicke angegeben werden, d.h. eine mathematische „Kongruenz“ der Gelenkflächen wäre sogar für die Bewegung hinderlich und für den Knorpel schädlich.

Gerne werden ausgestanzte Knorpelscheiben experimentell auf ihre Materialeigenschaften untersucht. Dazu muss aber immer eine Theorie herangezogen werden. Die einfachste solche Theorie ist der erstmals von BOUSSINESQ [3] durchgerechnete isotrope elastische Halbraum. Es handelt sich aber bei Gelenkoberflächen nicht um einen solchen Halbraum. Der Knorpel sitzt vielmehr als Schicht veränderlicher Dicke auf dem Knochen. Er kann von der Oberfläche bis zu den tiefen knochennahen Bereichen noch weiter in verschiedene Schichten unterteilt werden. Schließlich

ist in jedem Punkt der Oberfläche über die HULTCRANTZschen Linien [12] eine Richtung ausgezeichnet. Der Knorpel kann demnach nicht als isotropes Medium betrachtet werden.

Aber nicht nur die Anisotropie des Knorpels steht vereinfachenden Sichtweisen im Wege. Der Flüssigkeitsanteil des Knorpels hat einen wesentlichen Anteil am mechanischen Verhalten des Gelenkes, insbesondere auf die Lastverteilung und die Reibung. Die Inkompressibilität von Flüssigkeiten kommt gerade bei schnellen Vorgängen zum Tragen. Zur Viskosität des Knorpels tragen außer der Feststoffmatrix und der Gewebsflüssigkeit selber die Einbettung der Flüssigkeit in den als poröses Medium angesehenen Faserapparat dar. Diese sog. biphasische Theorie geht wesentlich auf MOW [24] zurück.

Falls hohe Lasten oder schnelle Relativbewegungen Ursache von degenerativen Erscheinungen des Knorpels sind, sollten thermische Effekte in Betracht gezogen werden. Ferner gibt es Ansätze, die mechanischen Eigenschaften der Synovia durch starke magnetische Felder zu beeinflussen; auch das müsste in eine realistische Theorie des Knorpelkontaktes eingearbeitet werden. Diese Effekte könnten zusammen mit biochemischen Prozessen als Auslöser von Knochenumbau im Rahmen der Erweiterten Thermodynamik [26] beschrieben werden. Dieses Vorhaben ist meines Wissens in der Gelenkbiomechanik aber noch nicht durchgeführt worden.

Alle eben genannten theoretischen Rahmen basieren auf Differentialgleichungen und benötigen daher Rand- und Anfangswerte. Die morphometrischen Bemühungen der vorliegenden Arbeit sind daher für verschiedenste Fragestellungen nützlich und insbesondere als unabhängig von ihnen zu betrachten.

5 Die statistische Auswertung

In diesem Kapitel sollen die bewährten Verfahren zur statistischen Auswertung kurz vorgestellt werden. Da die entsprechenden Gelenke und die dortigen Verfahren in den Doktorarbeiten unserer Abteilung ausführlich diskutiert sind, habe ich mich bei den Beispielen absichtlich beschränkt. Es geht also um eine zusammenfassende Darstellung der Gemeinsamkeiten, welche anderen Arbeitsgruppen als Entscheidungsgrundlage dienen kann. Da diese Abhandlung kein Lehrbuch der Statistik sein kann, sind die genannten Begriffe und Verfahren in geeigneten Quellen nachzulesen, wie etwa in [9, 10].

5.1 Benennung der Variablen

Große Statistik-Programme wie SAS stammen noch aus der Ära der Großrechner bzw. der von DOS. Diese lassen aus druck- und programmtechnischen Gründen oft nur Variablennamen mit maximal 8 Zeichen zu. Passend dazu stehen die Daten in Tabulator-separierten Textdateien. Es müssen geeignete Kürzel zur Benennung der Variablen her. Diese sollen ferner eine gedankliche Brücke zu den ursprünglichen Größen herstellen, also möglichst aussagekräftig sein. Der Fairness halber sollte aber erwähnt werden, dass solche Informationen meist in einem der Variablen zugeordneten String gespeichert werden, dem sog. Label, welches dann in den Statistiken und Grafiken automatisch verwandt wird.

In der Anatomie gibt es bereits den Versuch, Benennungen zu formalisieren, indem diese aus verschiedenen Namensteilen zusammengesetzt werden. Der erste Teil nennt die Baugruppe (wie z. B. den Knochen) oder die besondere Bauform (wie etwa Eminentia, Fossa, Sulcus, . . . für Hervorhebung, Grube, Rinne, . . .). Der zweite Namensteil beschreibt Eigenschaften wie Form, Lage, Länge oder Farbe des ersten oder präzisiert dessen Zugehörigkeit zu Organen. Der dritte Namensteil (und folgende) ergänzt eventuell fehlende Angaben zu Ort, Größe oder Anzahl. Abkürzungen für häufig wiederkehrende Strukturen (z. B. Art. für Gelenk, M. für Muskel)

sind natürlich gebräuchlich.

Mein Vorschlag ist es, entweder bewährte Begriffe zu verwenden, oder aber eine standardisierte Beschreibung zu verwenden, etwa eine Buchstabenfolge mit festgelegter Syntax. Der Zeichensatz sollte sich auf 7-Bit-ASCII (**A**merican **S**tandard **C**ode for **I**nformation **I**nterchange) beschränken, es sollten also weder Umlaute noch Sonderzeichen verwandt werden. Genaueres findet sich in Anhang 10.1.

Der erste Buchstabe legt die mathematische Art und damit die physikalische Dimension der gemessenen Größe fest, der zweite gibt Hinweise auf eine gedanklich zu Grunde liegende geometrische Figur. Dritter und vierter Buchstabe gehören zu den zur Gelenk- bzw. Gegenfläche gehörenden Knochen. Der fünfte Buchstabe spezifiziert den untersuchten Abschnitt der Fläche und der sechste legt die etwaige Orientierung der Schnittebene fest. Falls die Werte noch mathematisch weiterverarbeitet wurden, nehme man schließlich noch einen siebten Buchstaben hinzu. Schon mit diesen wenigen Merkmalen gerät man bereits in die Nähe der Grenze der 8.3-Konvention der DOS-Ära.

5.2 Vorbereitung des Datensatzes

Professionelle Statistikprogramme arbeiten vorzugsweise in ihren eigenen Datenformaten oder mit einfachen Textdateien (*kein Word!*). Diese Textdateien bestehen aus dem ASCII-Zeichensatz. Sie können mit jedem Editor bearbeitet (edit, notepad, vi, emacs, ...) und auch direkt über das Internet ausgetauscht werden. In einer Zeile stehen mit Leerzeichen oder Tabulatoren getrennte Einträge wie Modellname (als Text) oder Radian (als Zahl), die Daten. Eine solche Zeile möchte ich als Datensatz bezeichnen. Die einzelnen Zeilen sind, für den Benutzer meist unsichtbar, durch ein besonderes Zeichen getrennt, den sog. Record-Separator. Dieser ist (leider) von Betriebssystem zu Betriebssystem verschieden.

Je nach Fragestellung variiert die optimale Anordnung der Daten. Mehr zu den Fragestellungen im nächsten Abschnitt 5.3. Durch Einführen genügend vieler Variablen kann ein Gelenk insgesamt in einer Zeile dargestellt werden. So können einfach neue Größen berechnet werden. Durch Bildung insbesondere paarweiser Differenzen sind diverse Hypothesen testbar. Im krassen Gegensatz dazu steht eine Anordnung, bei der in jeder Zeile durch Klassifikationsvariablen wie „Ebene“, „Schnitt“ etc. zunächst die Art der Variable festgelegt wird und dann nur noch ihr Wert, im Extrem-

fall genau einer, eingetragen wird. Die erste Anordnung liefert präzisere Aussagen über paarweise Tests, und erlaubt das einfache Programmieren abgeleiteter Größen. Die Zweite ist günstiger für Varianzanalyse, also zum raschen Erkennen der wesentlichen Abhängigkeiten. Zwischen diesen beiden Extremen soll nun ein Kompromiss versucht werden.

Nach dem in den vorigen Abschnitten Gesagten sind zu paarungsfähigen Größen eigene Variable einzuführen. Mit R , W und A sollen im Folgenden Radien, Winkel und Abstände bezeichnet werden. Die Indizes F und G bezeichnen die Fläche und ihre Gegenfläche. In einer Zeile stehen nun etwa

Präparat	Ebene	Schnitt	...	R_F	R_G	W_F	W_G	A_F	A_G	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Damit können Differenzen wie $R_F - R_G$, Verhältnisse wie R_F/R_G oder abgeleitete Größen wie $\tan(W_F/2)$ direkt für jedes Gelenk berechnet werden. Dann kann zwar ohne erneute Umordnung nicht mehr etwa ein sagittaler gegen einen horizontalen Radius getestet werden (also ein Test auf das Vorliegen einer Kugelfläche), aber für die Modellbildung ist die Varianzanalyse gut genug. Um also eine Paarung punktweise (also nicht schnittweise) vorzunehmen, müsste eine sehr spezielle Fragestellung vorliegen.

5.3 Abhängigkeiten

Als nächstes soll der Einfluss von verschiedenen bekannten Faktoren wie etwa Geschlecht, Händigkeit, Fläche oder Gegenfläche, Lage des Schnittes, Orientierung der Schnittebene, Alter, ... auf die untersuchten Radien (oder weitere Längen) untersucht werden. Da etwa Geschlecht und Händigkeit Klassifikationsgrößen sind, ist das Mittel der Wahl eine Varianzanalyse. Das Alter hingegen ist eine Intervallgröße und dann wäre das Mittel der Wahl eine Kovarianzanalyse. Beide werden zusammengefasst von den sog. verallgemeinerten linearen Modellen (**g**eneralized **l**inear **m**odel, GLM), welche auch unterschiedliche Fallzahlen in den Messgruppen erlauben.

Ziel ist es, ein einfaches aber dennoch räumliches geometrisches Modell der Fläche mit möglichst wenigen Parametern zu entwickeln. Für die Entwicklung von Endoprothesen sind nicht nur die relevanten Mittelwerte, sondern auch deren Streuungen interessant, da durch sie mehrere Größenvarianten beschrieben werden können.

Zur Orientierung beginnt man mit dem reinen Haupteffektmodell, auch um eine Vorstellung über die zu erwartenden Größenordnungen der Mittelwerte der Hauptklassen zu erhalten. Faktoren mit nicht signifikantem Einfluss werden danach von der weiteren Auswertung ausgeschlossen. Danach hangelt man sich von dem vollständig gekreuzten Modell aller verbleibenden Faktoren zum kleinsten Modell, welches alle Signifikanzen beinhaltet. Mit paarweisen t -Tests (evtl. mit BONFERRONI-grouping) werden ferner die verschiedenen mehrstufigen Faktoren wie Schnitte zu unterscheidbaren Gruppen zusammengefasst. Zu diesem Gruppen bestimmt man schließlich die Mittelwerte. Sowohl Haupteffekte als auch gekreuzte Effekte können mit geeigneten Boxplots visualisiert werden. Die einzelnen Modelle können durch das Bestimmtheitsmaß oder etwa das AIC (Akaike Information Criterion) miteinander verglichen werden. Auch hier sind Visualisierungen der Residuen der Modelle, etwa in Form von Boxplots, Histogrammen, (Normal)-Q-Q-Plots und einfachen Plots als Zeitreihe (bei geeigneter Sortierung der Rohdaten, zum Ausschluss systematischer Fehler), möglich und sinnvoll.

Am Ende fasst man die gewonnene Information wieder in einer maßhaltigen Zeichnung oder, wie in dieser Arbeit, einem entsprechenden 3D-Plot zusammen. Als Vorbild einer technischen Zeichnung mögen zum Abschluss die Abbildungen 5.1 und 5.2 dienen.

Hat man Abhängigkeiten von Gruppen wie etwa vom Geschlecht festgestellt, dann bleibt noch zu klären, ob es sich dabei um einen Größen- oder um einen Formeffekt handelt. Dazu kann man eine Skalierung etwa der gemessenen Radien auf die Mittelwerte der Gruppen oder auch eine individuelle Skalierung anwenden. Sollten die Signifikanzen dadurch verschwinden, handelt es sich um einen Größeneffekt, andernfalls um einen Formeffekt. Ein ausgeprägter sexueller Dimorphismus hätte für die Endoprothetik zur Folge, dass dem Operateur die doppelte Zahl an Endoprothesen zur Verfügung stehen müsste.

5.4 Maße der Inkongruenz

Zum Nachweis von Inkongruenz eignet sich der paarweise Vergleich von Schnittkrümmungen oder Krümmungsradien von Gelenkfläche F und Gegengelenkfläche G . Es geht also darum, die Größe des Unterschiedes im Einzelfall zu messen um sie dann insgesamt zu quantifizieren. Die gesuchte Kennzahl soll dabei die anschauliche Eigenschaft besitzen, im Falle

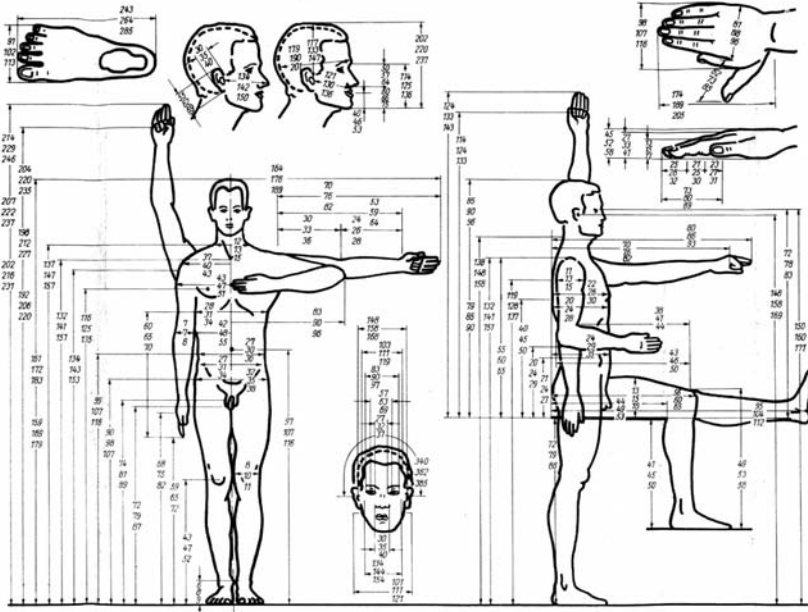


Abbildung 5.1: Der männliche Standardmensch. Bei den Zahlen handelt es sich um die P_5 , P_{50} und P_{95} -Perzentile. Invertierter innerer Umschlageinband von [8].

eine konvex-konkaven Paarung bei Vorliegen einer Inkongruenz positiv zu sein, wie etwa die Radiendifferenz

$$\Delta = |R_{\text{Fossa}}| - |R_{\text{Caput}}| \quad .$$

Da aber in der bisherigen Vorzeichenkonvention $R_{\text{Fossa}} < 0$ gilt, ist das genau das negative der Summe der vorzeichenbehafteten Radien. Für die Statistik ist es aber günstiger, ausschließlich mit positiven Radien zu rechnen und die passenden Vorzeichen in den entsprechenden Formeln zu berücksichtigen. Das sei im Folgenden der Fall. Dabei kann man die Radiendifferenz

$$\Delta_R = R_F - R_G$$

oder die der Krümmungen

$$\Delta_K = K_F - K_G = \frac{1}{R_F} - \frac{1}{R_G} = \frac{R_G - R_F}{R_F R_G}$$

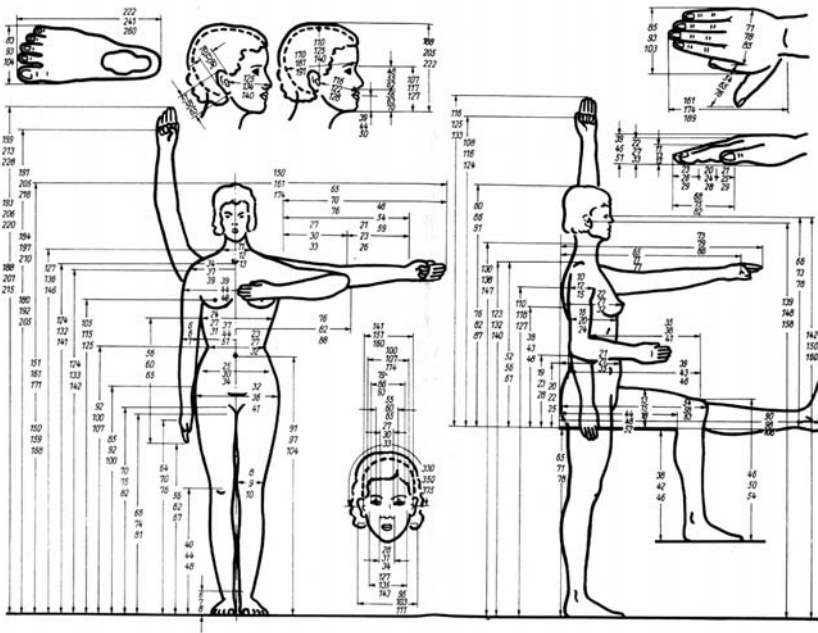


Abbildung 5.2: Der weibliche Standardmensch. Aus [8].

mit einem geeigneten Test gegen Null untersuchen. Unter der Voraussetzung der wenigstens näherungsweise Normalverteilung ist das der ein-Stichproben-t-Test. Einen schnellen Überblick verschafft man sich mit dem Zeichentest, bei dem nur die Vorzeichen der Differenzen untersucht werden, auf der sicheren weil nichtparametrischen Seite ist man mit dem signed-rank-Test von Wilcoxon. Das hat ggf. für jeden Schnitt getrennt zu erfolgen.

Nun hängen aber die Differenzen Δ_R und Δ_K wegen

$$\Delta_K = K_F - K_G = \frac{R_G - R_F}{R_F R_G} = \frac{-\Delta_R}{R_F R_G}$$

über die individuell verschiedenen Radien voneinander ab. Das kann zur Folge haben, dass der eine Test ablehnt (also das Vorliegen einer Inkongruenz bestätigt) und der andere nicht. Da aber die beiden Beschreibungsweisen über Radien oder Krümmung prinzipiell gleichberechtigt sind¹, haben wir ein Problem. Wie also definiert man Inkongruenz?

¹Nicht ganz: Die Radiendifferenz besitzt eine biomechanisch wichtige Deutung als

Radien und Radiendifferenzen haben die physikalische Dimension einer Länge L , Krümmungen und ihre Differenzen den Kehrwert L^{-1} . Mathematische Funktionen verarbeiten aber grundsätzlich nur dimensionslose Größen. Das Ergebnis statistischer Tests sollte aber unabhängig von der Wahl des Einheitensystems sein. Das leistet beispielsweise der ein-Stichproben-t-Test, indem er die Differenz von empirischem Mittelwert \bar{x} der Stichprobe zum tatsächlichen Mittelwert μ der Grundgesamtheit durch die empirische Streuung Δx der Stichprobe teilt. Die Testgröße $\frac{\bar{x}-\mu}{\Delta x} \sqrt{n}$ ist damit von der Wahl der Einheiten unabhängig und kann mit der Verteilung $t_{\alpha, n-1}$ verglichen werden. Hat man es, wie hier, mit mehr als einer dimensionsbehafteten Größe zu tun, so bietet sich von vornherein die Reduktion auf dimensionslose Größen an; das genaue Verfahren ist Gegenstand der sog. Dimensionsanalyse [29]. Im Falle zweier Radien R_1 und R_2 ist das einfach das Verhältnis R_2/R_1 dieser Radien, welches, um Gleichheit der Radien abzulehnen, gegen 1 getestet werden muss. Das entspricht einem Test der Größe

$$\frac{R_2}{R_1} - 1 = \frac{R_2 - R_1}{R_1} =: v_1$$

gegen Null.

Da aber Gelenk und Gegengelenk grundsätzlich gleichberechtigt sind, kann man genauso gut den Kehrwert R_1/R_2 betrachten, also analog die Größe

$$\frac{R_1}{R_2} - 1 = \frac{R_1 - R_2}{R_2} =: v_2 = -\frac{R_1}{R_2} v_1$$

gegen Null testen. Nun gilt im uns interessierenden Falle annähernder Kongruenz $v_2 \approx -v_1$. Um Gelenk und Gegengelenk gleich zu behandeln, bietet es sich an, die Verhältnisse v_2 und $-v_1$ zu mitteln. Die bekanntesten Mittelwerte sind das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel, abgekürzt mit m_A , m_G und m_H . Das geometrische Mittel ist nur für positive Größen definiert und scheidet damit aus, da die die gesuchte Formel sowohl für konvexe als auch konkave Schnitte gelten soll.

Gelenkzweischlag auch dimere Gelenkkette genannt [27]. Aber auch diese muss als Länge zu den typischen Abmessungen des Gelenkes in Bezug gesetzt werden. Das Verhältnis von Differenz zu Mittelwert wäre eine solche Größe. Aber das Modell der dimeren Kette versagt bei einseitig planen Gelenken, die in ihrer mechanischen Funktion Schubgelenken entsprechen. Ferner ergaben sich bei der empirischen Untersuchung ähnlicher Gelenke teilweise derart große Radien, so dass diese insgesamt im Gegensatz zu den Krümmungen nicht mehr normalverteilt waren.

Es ergeben sich so die beiden folgenden potentiellen Kennzahlen der Inkongruenz

$$\begin{aligned}
 m_A &= \frac{1}{2}(v_2 - v_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1} - \frac{R_1 - R_2}{R_2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1} + \frac{R_2 - R_1}{R_2} \right) = \frac{1}{2}(R_2 - R_1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \\
 &= \frac{1}{2}(R_2 - R_1) \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2} = \frac{R_2^2 - R_1^2}{2R_1 R_2} \\
 m_H &= \left(\frac{1}{2}(v_2^{-1} - v_1^{-1}) \right)^{-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{R_1}{R_2 - R_1} + \frac{R_2}{R_2 - R_1} \right)^{-1} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2 - R_1} \right)^{-1} = \frac{R_2 - R_1}{(R_1 + R_2)/2} \quad .
 \end{aligned}$$

Die Vertauschung von Gelenk und Gegengelenk $1 \leftrightarrow 2$ äußert sich nur noch im Vorzeichen der nunmehr dimensionslosen Kennzahlen. Ferner ergeben sich beim Einsetzen der Krümmungen genau dieselben Ausdrücke aber für Fläche und Gegenfläche vertauscht:

$$\begin{aligned}
 m_A &= \frac{K_1^2 - K_2^2}{2K_2 K_1} \\
 m_H &= \frac{1/K_2 - 1/K_1}{(1/K_1 + 1/K_2)/2} = \frac{K_1 - K_2}{(K_2 + K_1)/2} \quad ,
 \end{aligned}$$

d. h. falls man seine Daten durch die Krümmungen beschreibt, ändert man an den Kennzahlen wieder nur das Vorzeichen.

Nun hat man außer den Radien- und Krümmungsdifferenzen sowie den Verhältnissen drei weitere Kandidaten für Kennzahlen zum Beschreiben der Inkongruenz gefunden. Man sollte sich in jedem Fall einen visuellen Überblick nicht nur über den Datensatz selbst sondern auch über alle abgeleiteten Kennzahlen mit Hilfe von Histogrammen oder besser Box-Plots verschaffen. Auch die Normalität sollte mit geeigneten Tests überprüft werden, um die Zulässigkeit der nachfolgenden Varianzanalyse zu sichern. Geeignet sind der χ^2 - oder der Kolmogoroff-Smirnov-Anpassungstest. Gebräuchlich sind ferner Tests auf Schiefe und Exzess, die ja bei der Normalverteilung auf Mittelwert und Standardabweichung zurückgeführt werden können. Eine für erfahrene Statistiker nützliche Visualisierung ist der Normal-Propability-Plot, der mit geeignetem Wahrscheinlichkeitspapier auch von Hand durchgeführt werden kann. Dazu

werden die Daten zunächst der Größe nach sortiert und danach der auf die Gesamtzahl bezogene Anteil aller Messwerte bestimmt, die kleiner oder gleich diesem Wert sind („empirische Verteilungsfunktion“). Diese werden dann gegen die Quantile der Normalverteilung aufgetragen. Im Idealfall ergibt sich eine Gerade. Danach erst dürfen die auf Normalverteilung fußenden linearen Modelle auf die erfolgreich getesteten Variablen zur Anwendung kommen.

Eine gleiche Radien- oder Krümmungsdifferenz Δ_R oder Δ_K beschreibt für ein Gelenk mit kleineren Radien sicherlich eine größere Inkongruenz als für eines mit größeren Radien oder anderen Abmessungen. Man kommt also um eine individuelle Normierung auf geeignete Größen nicht herum. Mögliche Kandidaten für solche Bezugsgrößen, welche keine der beiden Flächen bevorzugen, sind wieder die beiden Mittelwerte, R_A und R_H . Nun gilt aber, wie man sich durch Nachrechnen überzeugt,

$$\begin{aligned} m_A &= \Delta_R/R_H \\ m_H &= \Delta_R/R_A \quad , \end{aligned}$$

daher führt diese Überlegung sofort auf die bereits untersuchten Indizes zurück.

Nun soll eine Entscheidung zugunsten eines der Indizes getroffen werden. Dazu nehmen wir den konvex-konvexen Fall wieder hinzu und betrachten ihn für gleich große Radien. Dieses ist der Fall maximaler Inkongruenz, da, sobald einer der Radien vergrößert wird, sich die Situation dem konvex-planen Fall annähert. In der jetzigen Notation gilt dann $R_F = -R_G$, woraus $m_A = 0$ folgt, was eine nicht vorhandene Kongruenz fälschlicherweise vortäuscht. Wegen $R_A = 0$ divergiert der Index m_H , was die maximale Inkongruenz genau zum Ausdruck bringt.

Als Maß für die Inkongruenz eines Schnittes schlage ich also das dimensionslose Verhältnis von Differenz zu arithmetischem Mittel vor

$$I_S = \frac{R_F - R_G}{(R_F + R_G)/2} = \frac{K_G - K_F}{(K_G + K_F)/2} \quad . \quad (5.1)$$

Dieser dimensionslose Index kann sowohl von den Radien als auch von den Krümmungen ausgehend berechnet werden und hat – bis auf das Vorzeichen – in beiden Fällen dieselbe Rechenvorschrift. Bei Vertauschen der Gelenkflächen ändert er wiederum sein Vorzeichen. Er ist zudem, formelmäßig gesehen, der einfachste Ausdruck. Er erlaubt eine Untersuchung der Form unabhängig von der Größe des Gelenkes. Aufgrund

dieser Eigenschaft kann er auch dazu verwandt werden, die Inkongruenz *verschiedener* Gelenke entweder des menschlichen Körpers oder sogar des Tierreiches miteinander zu vergleichen.

Es gibt aber noch eine weitere Möglichkeit, Inkongruenz zu charakterisieren. Im Verlauf dieser Arbeit² wird sich zeigen, dass ein Linienkontakt von sattelförmigen Gelenkflächen entlang deren Erzeugender nur dann zustande kommen kann, wenn für die Hauptkrümmungen R und r gilt

$$R_F r_F = R_G r_G \quad ,$$

also wenn die Gaußschen Krümmungen $1/(Rr)$ übereinstimmen. Die übliche gegen Null zu testende dimensionsbehaftete Größe wäre demnach

$$R_F r_F - R_G r_G \quad .$$

Analog zu den obigen Gedankengängen schlage ich aber statt dessen den Index

$$I_G = \frac{R_F r_F - R_G r_G}{(R_F r_F + R_G r_G)/2} \quad (5.2)$$

als weiteres Maß der Kongruenz vor.

5.5 Funktionen von Messgrößen und ihre Mittelwerte

In dieser Arbeit werden Funktionen, oft Winkelfunktionen und deren Umkehrungen, als Transformationen auf gemessene Größen angewandt. Diese Beziehungen zwischen den Einzelwerten gelten aber nicht mehr für deren Mittelwerte. Damit sind diese Mittelwerte nicht mehr einfach als mittelwertige Form zu interpretieren. Da das Ziel dieser Arbeit aber genau eine solche gemittelte Form ist, gilt es, diese Diskrepanz genauer zu beleuchten. Dadurch ist eine Entscheidung möglich, ob beobachtete Differenzen vorwiegend auf die verwendeten Transformationen oder auf andere Ursachen zurückzuführen sind.

Sei f die betrachtete Funktion zur Umrechnung $f_i = f(x_i)$ eines Wertes x_i , dessen Mittelwert \bar{x} und dessen Varianz σ sei. Die Varianz

²Es handelt sich um die Fragestellung, ob anhand der Abmessungen am Daumensattel oder dem Humeroulnargelenk entschieden werden kann, ob ein Linienkontakt realisiert ist. Die entsprechenden Kapitel sind 7.6 und 8.6.

wird berechnet über den Erwartungswert

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1} E((x_i - \bar{x})^2) \quad .$$

Betrachtet man eine Entwicklung um diesen Mittelwert

$$f(x_i) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x_i - \bar{x}) + \frac{1}{2}f''(\bar{x})(x_i - \bar{x})^2 + \mathcal{O}((x_i - \bar{x})^3) \quad ,$$

so gilt für den Erwartungswert

$$\begin{aligned} E(f(x_i)) &= f(\bar{x}) + f'(\bar{x})E(x_i - \bar{x}) + \frac{1}{2}f''(\bar{x})E(x_i - \bar{x})^2 + \mathcal{O}((x_i - \bar{x})^3) \\ &= f(\bar{x}) + \frac{1}{2}f''(\bar{x})\frac{n}{n-1}\sigma^2 + \mathcal{O}((x_i - \bar{x})^3) \quad . \end{aligned}$$

Damit ist die Differenz nicht mehr Null wie $f_i - f(x_i) = 0$, sondern hängt wegen

$$\bar{f} - f(\bar{x}) \approx \frac{1}{2}f''(\bar{x})\frac{n}{n-1}\sigma^2$$

von der zweiten Ableitung der Funktion und der Streuung und Anzahl der Messwerte ab. Für lineare Funktionen verschwindet sie. Bei Werten mit geringer Streuung fällt sie wenig ins Gewicht. Wegen $\frac{n}{n-1} = \frac{n-1+1}{n-1} = 1 + \frac{1}{n}$ ist die Abhängigkeit von der Anzahl bei genügenden Fallzahlen vernachlässigbar.

Die in dieser Arbeit wichtige Umrechnung

$$\alpha = 2 \arctan \sqrt{-\frac{r_2}{r_1}}$$

ist, wie auch der Inkongruenzindex (5.1)

$$I_S = \frac{R_F - R_G}{(R_F + R_G)/2} \quad ,$$

eine Funktion von den zwei Variablen. Bis auf Terme dritter Ordnung erhält man für zwei Größen x und y in der Nähe der Mittelwerte

$$\begin{aligned} f(x_i, y_i) &= f(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_i - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(y_i - \bar{y}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i - \bar{x})^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y_i - \bar{y})^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad , \end{aligned}$$

und für den Erwartungswert folgt

$$\begin{aligned} \bar{f} &= E(f(x_i, y_i)) = f(\bar{x}, \bar{y}) \\ &+ \frac{1}{2} E \left(((x_i - \bar{x}), (y_i - \bar{y})) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \Big|_{(\bar{x}, \bar{y})} \begin{pmatrix} x_i - \bar{x} \\ y_i - \bar{y} \end{pmatrix} \right) . \end{aligned}$$

Mit der HESSE-Matrix ausgewertet an den Mittelwerten

$$\mathbf{H} := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \Big|_{(\bar{x}, \bar{y})}$$

und der Varianz-Kovarianzmatrix

$$\mathbf{\Sigma} := E \left(((x_i - \bar{x}), (y_i - \bar{y})) \begin{pmatrix} x_i - \bar{x} \\ y_i - \bar{y} \end{pmatrix} \right)$$

lässt sich das wegen $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \text{Sp}(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) = \text{Sp}(\mathbf{A} \mathbf{x} \mathbf{x}^T)$ kürzer schreiben als

$$\bar{f} - f(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2} \text{Sp}(\mathbf{H} \mathbf{\Sigma}) .$$

Für Funktionen von mehr als zwei Variablen verfährt man analog.

Damit ist die Diskrepanz zwischen Funktionen des Mittelwertes einerseits und dem Mittelwert von Funktionen der Einzelwerte andererseits erklärbar, und zwar indem man sowohl die Streuung der Einzelwerte als auch die zweite Ableitung der Funktion mit zur Erklärung hinzuzieht. Hier ist also eine grundsätzliche Möglichkeit aufgezeigt worden, unter gegebenen Voraussetzungen beide Größen ineinander umzurechnen. Man sollte sich demnach davor hüten, etwa eine Kongruenz oder Inkongruenz allein aus den Mittelwerten unter Verwendung des entsprechenden Index abzulesen zu wollen, da die Voraussetzungen zu dieser Umrechnung nicht gegeben sind. Kein Weg führt schließlich am statistischen Test vorbei, selbst die Formeln dieses Abschnittes stellen nur Näherungen dar.

6 Geometrische Modellbildung

Es geht, wie gesagt, in dieser Arbeit *nicht* um eine möglichst genaue Darstellung von Flächen. Dazu eignen sich Splines, welche in verschiedensten Spielarten in CAD-Systemen zum Einsatz kommen. Ein Überblick der dort verwandten mathematischen Methoden findet sich in Quelle [16]. Jedoch liefern Splines keine Anhaltspunkte zum Verständnis der Funktion des Gelenkes und zu viele Daten für eine aussagekräftige Statistik.

Flächen können nach verschiedenen Kriterien klassifiziert werden. Aus der Sicht der Mathematik bieten sich zunächst Gleichungen an. Deren freie Parameter können dann über die lokalen Eigenschaften der Flächen bestimmt werden, insbesondere über ihre Schnittkrümmungen. Flächen mit weniger freien Parametern ist bei gleicher Erklärungskraft der Vorzug zu geben. Nicht zuletzt können fertigungstechnische Kriterien den Ausschlag zu einer Modellbildung geben. In dieser Arbeit beschränken wir uns auf Flächen zweiter Ordnung und Tori. Der mathematisch weniger geneigte Leser kann dieses Kapitel daher getrost überspringen.

6.1 Gleichungen

Die meisten Flächen lassen sich durch eine Parameterdarstellung beschreiben, manchmal sind sie Lösungen einer Gleichung und selten lassen sie sich mehr als nur lokal nach einer ausgezeichneten Richtung auflösen.

6.1.1 Parameterdarstellungen

Unter der Parameterdarstellung einer Fläche versteht man die Parametrisierung jedes ihrer Punkte \boldsymbol{x} durch zwei reelle Parameter, etwa s und t in der Form $\boldsymbol{x}(s, t)$. Es folgt eine Übersicht der gängigsten Typen mit deren Eigenschaften.

Es ist klar, dass ein Zusammenhang zwischen der Form der Flächen eines Gelenkes und seiner Bewegung besteht. Die Fläche des einen Gelenkes hüllt während der Bewegung die andere ein und umgekehrt. Ohne auf die mathematischen Bedingungen an Hüllflächen näher einzugehen

[15, 25], kann man sich gut vorstellen, dass sie bestimmt werden, indem man eine Schar charakteristischer Linien, die Kontaktlinien, zu einer Fläche zusammenfügt. Es liegt also nahe, eine Fläche durch Bewegung einer Raumkurve $\mathbf{y}(s)$ zu erzeugen. Eine sog. *kinematische Fläche* oder *Bewegfläche* wird demzufolge durch

$$\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{y}(s) + \mathbf{z}(t)$$

von Drehmatrix $\mathbf{R}(t)$, Raumkurve $\mathbf{y}(s)$ und Translation $\mathbf{z}(t)$ festgelegt. Ist die Raumkurve $\mathbf{y}(s)$ eben, so kann sie als erzeugende Kontur einer derart entstandenen Fläche mit dem Konturtaster bestimmt werden. Weiter kann von einer solchen Kurve eine genäherte technische Zeichnung angefertigt werden, welche dann in einem CAD-Programm als Grundlage der genäherten Fläche dient.

Seien $\mathbf{t}(t)$, $\mathbf{n}(t)$ und $\mathbf{b}(t)$ die zur weiteren Raumkurve $\mathbf{z}(t)$ gehörenden Vektoren des begleitenden Dreibeins, also Tangente, Normale und Binormale. Eine sog. *Extrusionsfläche* entsteht, indem die Raumkurve $\mathbf{y}(s)$ entlang dieser weiteren Kurve geschleppt wird, wobei die Orientierung des begleitenden Dreibeins angenommen wird. Das leistet aber genau die Drehmatrix $\mathbf{R}(t) = (\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t))$ zusammen mit der Gleichung der kinematischen Fläche, also mit $\mathbf{z}(t)$ als sog. *Leitlinie*. Ist die Kurve $\mathbf{y}(s)$ eben, so kann die Drehung allein in der von Normale und Binormale festgelegten Ebene verlaufen.

Die zu speziellen wichtigen Bewegungen gehörenden Flächen haben wieder eigene Namen. Handelt es sich um eine reine Translation, so spricht man von einer *Schiebfläche* mit der Gleichung

$$\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{y}(s) + \mathbf{z}(t) \quad .$$

Handelt es sich um eine gleichmäßige reine Rotation um die konstante Achse $\boldsymbol{\alpha}$, so erhält man eine *Rotationsfläche* mit der Gleichung

$$\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha} \cdot t) \cdot \mathbf{y}(s) \quad ,$$

wobei man sich meist für $\mathbf{y}(s)$ wieder auf eine ebene Kurve beschränkt, vorzugsweise in der zx - oder zy -Ebene und mit $\boldsymbol{\alpha}$ in z -Richtung. Bei einer *Schraubfläche* addiert man zusätzlich eine Bewegung in Richtung der Rotationsachse, also

$$\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha} \cdot t) \cdot \mathbf{y}(s) + \boldsymbol{\alpha} \cdot f(t) \quad ,$$

wobei die Funktion $f(t)$ meistens linear ist.

Auch die zu speziellen Erzeugenden gehörenden Flächen haben wieder eigene Namen. Eine *Regelfläche* mit der Gleichung

$$\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{y}(t) \cdot s + \mathbf{z}(t)$$

hat Geraden mit Aufpunkt $\mathbf{z}(t)$ und Richtung $\mathbf{y}(t)$ als Erzeugende. Die Richtung wird mit $\mathbf{y}(t) = \mathbf{R}(t)\boldsymbol{\alpha}$ durch Rotation eines konstanten Vektors gegeben. Eine *Röhrenfläche* der Gleichung (wieder \mathbf{n} Normale, \mathbf{b} Binormale von \mathbf{z})

$$\mathbf{x}(s, t) = r \cdot (\mathbf{n}(t) \cos s + \mathbf{b}(t) \sin s) + \mathbf{z}(t)$$

wird von einem Kreis mit Radius r erzeugt.

Bevor man sich komplizierteren erzeugenden Kurven zuwendet, sollte man den einfachen Fall von aus Geraden zusammengesetzten Flächen gut verstanden haben. Außer dem später noch ausführlich behandeltem einschaligen Hyperboloid und dem hyperbolischen Paraboloid sind besondere solcher *Regelflächen* mit ihren Zusatzeigenschaften in der Tabelle 6.1.1 gegeben

Tabelle 6.1: Regelflächen und ihre Eigenschaften.

Name	Gleichung
Verbindungsfläche	$\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{y}(s)t + \mathbf{z}(s)(1 - t)$
Doppelte Regelfläche	$\mathbf{x}(s, t) = (\mathbf{y}_1 + t\mathbf{y}_2) + s(\mathbf{z}_1 + t\mathbf{z}_2)$
Schraubregelfläche	$\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha} \cdot t) \cdot (\mathbf{a} + s\mathbf{r}) + h \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot t$
Wendelfläche	$\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha} \cdot t) \cdot \mathbf{r} \cdot s + h \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot t$
Tangentenfläche	$\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{y}(t) + \mathbf{y}'(t) \cdot s$
Verallgemeinerter Kegel	$\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{R}(t) \cdot (s\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{y}(t) \cdot s$
Verallgemeinerter Zylinder	$\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{y}(t) \cdot (s\boldsymbol{\alpha})$

Da in der technischen Industrie der Rohstoff oft in ebener Form vorliegt (z. B. Blech, textile Stoffe), sind die in eine Ebene abwickelbaren Flächen von besonderer Bedeutung. Eine abwickelbare Regelfläche nennt man *Torse*. Sie ist eine Regelfläche mit der zusätzlichen Bedingung $(\mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') = 0$. Die letzten drei Einträge obiger Tabelle 6.1.1 sind bereits alle Torsen. Eine abwickelbare Fläche entsteht durch knickfreies Aneinandersetzen solcher Flächenstücke entlang ihrer Erzeugenden.

Ein besonderes Merkmal der Regelflächen ist die sog. *Striktionslinie* oder *Kehllinie*. Sie ist als Grenzwert der Gemeinlote benachbarter Erzeugender definiert. Für verallgemeinerte Kegel degeneriert sie zu einem Punkt, für verallgemeinerte Zylinder existiert sie nicht. Bei einer Tangentenfläche, welche sich aus den Tangenten einer Raumkurve, der sog. *Leitkurve*, zusammensetzt, ist sie genau diese erzeugende Leitkurve.

6.1.1.1 Besondere Parametrisierungen

Man kann sich eine Parametrisierung als *Netz* auf einer Fläche vorstellen. Diese wird so in eine Menge aus kleinen Vierecken $\mathbf{x}(s, t)$, $\mathbf{x}(s + ds, t)$, $\mathbf{x}(s, t + dt)$, $\mathbf{x}(s + ds, t + dt)$ zerlegt. Da diese Vierecke aber im Allgemeinen nicht eben sind, zieht man noch eine der beiden Diagonalen des windschiefen Viereckes und erhält so eine zur Parametrisierung passende *Triangulierung* der Fläche.

Manchmal ist die Art der Parametrisierung für die Charakterisierung einer Fläche ausschlaggebend. Beispielsweise liegt eine Minimalfläche genau dann vor, wenn u und v isotherme harmonische Koordinaten sind, d.h. $\mathbf{x}_u \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_v \mathbf{x}_v = \text{const}$ und $\mathbf{x}_u \mathbf{x}_v = 0$ mit $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$. Die Subskripte bezeichnen hierin die partiellen Ableitungen. Über die bekannte Analogie der Laplacegleichung zu den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen besteht eine enge Verbindung von Minimalflächen zur Funktionentheorie.

In der Definition der kinematischen Fläche wurde eine Drehmatrix verwandt. Diese enthält die Winkelfunktionen $\sin(t)$ und $\cos(t)$. In der Analysis wird zur Integration solcher Funktionen die *Halbwinkelsubstitution* $u := \tan(t/2)$ eingesetzt, welche auch hier als Parametrisierung sinnvoll ist. Es ergeben sich nämlich die rationalen Funktionen

$$\sin(t) = \frac{2u}{1 + u^2} \quad \text{und} \quad \cos(t) = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} .$$

In der Tat spielen *rationale Parametrisierungen* in Computergrafik und CAD eine große Rolle. Des Weiteren sind sie für Computeralgebra besonders brauchbar.

Analog zu den Schiebeflächen kann man sich noch weitere besonders einfache Parametrisierungen ansehen wie etwa die Kreuzproduktfläche mit $\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{y}(s) \times \mathbf{z}(t)$. Sie ist eine weitere Darstellung einer Fläche aus zwei Raumkurven.

6.1.2 Implizite Gleichungen

Außer den Parameterdarstellungen gibt es noch diverse weitere Methoden zum Beschreiben von Flächen. In diesem Abschnitt werden Flächen als Punktmengen charakterisiert, welche Lösungen einer Gleichung der allgemeinen Form

$$F(x, y, z) = 0$$

oder vektoriell geschrieben

$$F(\mathbf{x}) = 0$$

sind. Man spricht dann auch von Flächen als Nullstellengebilde. Da der Torus und die Flächen zweiter Ordnung Beispiele solcher Flächen sind, könnte diese Flächenfamilie für unsere Zwecke wichtig sein.

Ist die Funktion F algebraisch und von der Ordnung n , so spricht man von einer *Fläche n -ter Ordnung*. Sie hat die Gleichung

$$\sum_{i,j,k=0}^n a_{ijk} x^i y^j z^k = 0 \quad ,$$

oder in Tensorform unter Benutzung der Summationskonvention

$$\sum_{k=1}^n (\mathbf{x})_{i_1} (\mathbf{x})_{i_2} \cdots (\mathbf{x})_{i_k} A^{i_1 i_2 \cdots i_k} + a = 0 \quad .$$

Von Interesse in projektiver Geometrie und Kinematik ist noch die homogene Form mit

$$\mathbf{y} := \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Sie lautet nun

$$(\mathbf{y})_{i_1} (\mathbf{y})_{i_2} \cdots (\mathbf{y})_{i_n} B^{i_1 i_2 \cdots i_n} = 0$$

und vereinigt alle Koeffizienten in einem Tensor n -ter Stufe.

Spezielle algebraische Flächen sind der Torus und die Flächen zweiter Ordnung. Der *Kreistorus* ist durch nur zwei Parameter festgelegt. Seine Gleichung lautet im Ursprung bei liegender Orientierung (die Mittelachse weist in z -Richtung)

$$(\mathbf{x}^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2 (x^2 + y^2)$$

Er ist eine Fläche vierter Ordnung. Als Rotationskörper wird er erzeugt von einem Kreis mit Radius r dessen Mittelpunkt um den Abstand R von

der z -Achse entfernt ist. Die vektorielle Gleichung eines Kreistorus mit Mittelpunkt \mathbf{m} und Orientierung \mathbf{e} lautet

$$\left((\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 + R^2 - r^2 \right)^2 = 4R^2 \left((\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 - [(\mathbf{x} - \mathbf{m}) \cdot \mathbf{e}]^2 \right)$$

Eine elementare Herleitung dieser Gleichung nebst Bild findet sich in Abschnitt 9.2.

Manchmal werden auch der innere und der äußere Radius dieses Reifens benutzt, vgl. Abb. 6.1. Mit $r_i = R - r$ und $r_a = R + r$ (also $R = (r_i + r_a)/2$ und $r = (r_a - r_i)/2$) lautet die Gleichung des Torus

$$\left((\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 + r_i r_a \right)^2 = (r_i + r_a)^2 \left((\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 - [(\mathbf{x} - \mathbf{m}) \cdot \mathbf{e}]^2 \right) \quad .$$

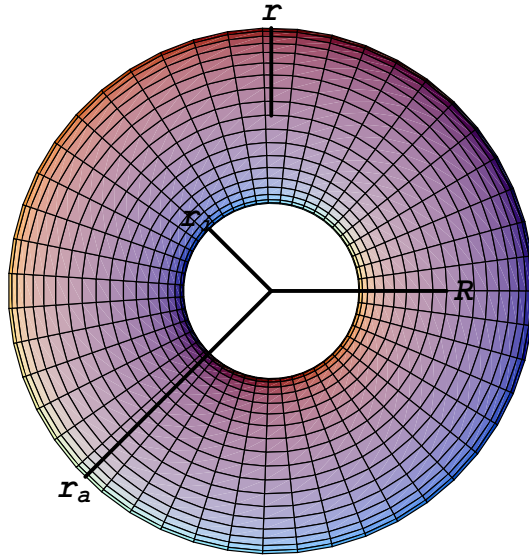


Abbildung 6.1: Innerer Radius $r_i = R - r$ und äußerer Radius $r_a = R + r$ eines Kreistorus in der Draufsicht.

Durch ungleichförmige Skalierung der Koordinatenachsen entsteht aus dem Kreistorus der sog. *allgemeine Torus*

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + R^2 - r^2 \right)^2 = 4R^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \quad ,$$

vgl. Abb. 6.2. Die hier die mögliche Skalierung der z -Achse kann unterbleiben, um die Radien weiterhin im Maßstab der z -Achse interpretieren zu können. Durch Rotation einer Ellipse entsteht der sog. *elliptische Torus* für welchen gilt $a = b \neq c$.

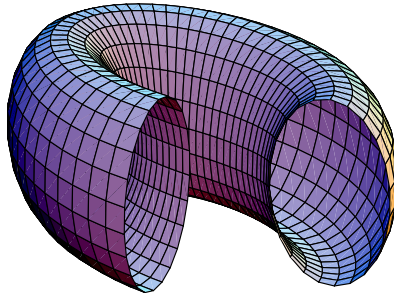


Abbildung 6.2: Der allgemeine Torus. Er geht aus dem Kreistorus durch Skalierung hervor.

Die am wohl besten untersuchten und gleichzeitig einfachsten algebraischen Flächen sind die Flächen zweiter Ordnung. Eine Übersicht ist in Tabelle 6.2 dargestellt.

6.1.3 Explizite Gleichungen

Falls an der Gelenkfläche eine ausgezeichnete Richtung existiert wie etwa die Kontaktpunktnormale in der Ruhestellung oder der “close packed position”, so bietet sich die explizite Form einer Gleichung als dritte Möglichkeit zur Beschreibung einer Gelenkfläche an. Dazu darf die Fläche aber keine Bereiche mit dazu senkrechter Normale mehr besitzen (wie etwa bei den Seiten von Rotationsflächen); das ergäbe dann keine mathematische Funktion mehr. Die allgemeine Form einer (nach z als auszeichneter Richtung aufgelösten) expliziten Gleichung lautet

$$z = f(x, y) \quad .$$

Tabelle 6.2: Flächen zweiter Ordnung und ihre Eigenschaften. Das Symbol % steht als Platzhalter für den darüberliegenden Eintrag.

Name	Gleichung in Normalform	Eigenschaften
Ellipsoid	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	
Drehellipsoid	%, $a = b \neq c$	Drehfläche
Kugel	%, $a = b = c$	%
Einschaliges Hyperboloid	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = +1$	Doppelte Regelfläche
Einschaliges Drehhyp.	%, $a = b$	%, Drehfläche
Zweischaliges Hyperboloid	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	
Zweischaliges Drehhyp.	%, $a = b$	Drehfläche
Hyperbolischer Zylinder	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = +1$	z beliebig, Torse
Parabolischer Zylinder	$y^2 = 2px$	%, Schmiegefläche
Elliptischer Zylinder	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = +1$	z beliebig, Torse
Kreiszyylinder	%, $a = b$	%, Rotationsfläche
Hyperbolisches Paraboloid	$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$	(2×) Regelfl., Schmiegefl.
Elliptisches Paraboloid	$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	Schmiegefläche
Drehparaboloid	%, $a = b$	Drehfläche
Elliptischer Kegel	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	Torse
Kreiskegel	%, $a = b$	%, Rotationsfläche

Beliebt sind polynomiale Ansätze wie

$$z = \sum_{ij} a_{ij} x^i y^j$$

oder solche, die bestimmte Funktionsfamilien wie orthogonale Polynome f_i mit

$$z = \sum_{ij} a_{ij} f_i(x) f_j(y)$$

als Basis verwenden.

Die Auszeichnung einer Richtung erlaubt die Definition einer numerischen Abweichung eines realen Flächenpunktes (x_m, y_m, z_m) von seiner Gleichung, und zwar in Form seines Abstandes $z_m - \sum_{ij} a_{ij} f_i(x_m) f_j(y_m)$ vom Messpunkt zur Fläche entlang dieser ausgezeichneten Richtung. Man bestimmt die Koeffizienten a_{ij} eines solchen Ansatzes, indem man etwa die Summe der Quadrate dieser Abstände minimiert. Es gibt allgemeinere Abstandsbegriffe wie z. B. das Maximum dieser Abweichungen. Zu diesen sog. *Normen* gibt es wiederum passende Orthogonalpolynome mit denen man die Art der Anpassung kontrollieren kann.

6.1.4 Viele Schnitte als Höheninformation

Eine besondere Situation liegt vor, wenn viele gleich dicke Schichten relativ zu einem anatomischen Koordinatensystem ausgewertet wurden. In dieser Form liegen Daten typischerweise bei dreidimensionalen bildgebenden Verfahren vor. Dann kann die Schichtnormale als z -Achse und die Schnittnummer multipliziert mit der Schichtdicke als z -Koordinate aufgefasst werden. Diese ist dann die unabhängige Variable eines Regressionsmodells (oder einer Kovarianzanalyse). Die abhängigen Variablen können die Koordinaten der interessierenden Punkte selbst sein, oder aber die hier interessierenden Radien und Mittelpunktskoordinaten der Schnitte. Zur Vereinfachung möchte ich mich hier auf lineare und quadratische Modelle beschränken; das stellt aber keine wesentliche Einschränkung dar. Es sind auch nichtlineare Fits denkbar, etwa auf Kreise oder Ellipsen.

Die allgemeine Gleichung einer solchen Regression ergibt sofort eine Parameterdarstellung der Fläche. Seien $x_0(z)$ und $y_0(z)$ die gefitteten Mittelpunkte der Kreise und $r(z)$ die entsprechenden Radien. Dann ist

$$\mathbf{x}(z, \phi) = \begin{pmatrix} x_0(z) \\ y_0(z) \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r(z) \sin \phi \\ r(z) \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

die Parameterdarstellung der gemittelten Fläche. Ein Regressionsmodell legt damit zusammen mit den vor-ausgewerteten Schnitten die Familie der möglichen Flächen fest. Daher müssen mehrere statistische Modelle untersucht und ihre Schätzer gegen Null getestet werden, was dann das Modell festlegt.

Sind beispielsweise alle Größen konstant, so handelt es sich um einen Kreiszyylinder. Sind die Mittelpunkte konstant und der Radius linear in z , so handelt es sich um einen Kreiskegel bzw. um dessen Stumpf. Verändern sich die Mittelpunkte linear, so handelt es sich um elliptische Zylinder oder Kegel. Von Interesse sind auch die Walzenflächen, bei denen die Mittelpunkte konstant und die Radien quadratisch in z sind. Es handelt sich um Rotationskörper. Aus $r(z) = a + bz + cz^2$ ergibt sich wegen $r(z) = \sqrt{x^2(z) + y^2(z)}$ nach Quadrieren die implizite Gleichung

$$x^2 + y^2 = (a + bz + cz^2)^2 \quad ,$$

welche vom Grad 4 ist und, je nach Vorzeichen von c , sowohl spindelförmig als auch hyperboloidal sein kann. Eine statistisch nachgewiesene Kon-

stanz der Mittelpunkte das hängt natürlich von der vorbereiteten Situation ab, da dann die Schnittnormale und die Symmetriachse der Fläche übereinstimmen müssen.

Das Modell der vor-Auswertung, hier meist ein Kreis, sollte in Parameterdarstellung bekannt sein, etwa $x(t)$ und $y(t)$. Nach Durchführung der Regression der Fitparameter nach z ergibt sich schließlich

$$\mathbf{x}(t, z) = \begin{pmatrix} x(t, z) \\ y(t, z) \\ z \end{pmatrix}$$

als zugehörige Gleichung der Fläche. Ob diese nur eine schiefliegende Rotationsfläche ist, lässt sich anhand des Netzes der Hauptkrümmungslinien entscheiden: Diese sollten (für reguläre Flächen) mit den Meridianen und Breitenkreisen übereinstimmen.

6.2 Lokale Eigenschaften von Flächen

Glatte und knickfreie Flächen lassen sich in der Umgebung eines Punktes nach einer Koordinate, vorzugsweise mit der z -Achse als Richtung der Flächennormale und dem Flächenpunkt selbst als Nullpunkt auflösen. Die nach dem zweiten Glied abgebrochene Taylorreihe

$$z = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy$$

beinhaltet (neben der Ebene) das elliptische und das hyperbolische Paraboloid und den parabolischen Zylinder – je nach Vorzeichen der Koeffizienten. Diese Schmiegeflächen korrespondieren zu den elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Flächenpunkten.

Neben den hier ausführlich behandelten Haupt- und Schnittkrümmungen sind in der Flächentheorie noch weitere lokale Parameter wichtig. Sie können weitere Hinweise auf eine zu Grunde liegende Flächenfamilie liefern. Diese sind:

Mittlere Krümmung. $H := \kappa_1 + \kappa_2$. Gilt $H = 0$ auf der gesamten Fläche, so liegt eine sog. Minimalfläche vor. Diese Beziehung zwischen den beiden Hauptkrümmungen kann empirisch an mehreren Punkten der Fläche überprüft werden. Eine Minimalfläche hat bei fest vorgegebener Randlinie einen minimalen gesamten Flächeninhalt, daher der Name. Sie werden daher gerne durch Seifenhäute realisiert, deren Ränder passend gebogene Drähte sind.

Gaußsche Krümmung. $K := \kappa_1 \cdot \kappa_2$. Für $K = 0$ liegen Abschnitte von Torsen vor, das ist die Vereinigung von Tangentenflächen, verallgemeinerten Zylindern und verallgemeinerten Kegeln.

Geodätische. Sie sind die lokal kürzesten Verbindungslinien zwischen zwei Punkten gemessen in ihrer Bogenlänge. Sie sind die kürzesten Linien der inneren Geometrie, also wenn die Fläche nicht verlassen werden kann. Falls die Geodätischen ebene Kurven sind, sind die Flächen Regelflächen oder sog. Gesimsflächen (Diese beinhalten die Dreh- und Röhrenflächen, vgl. [20], Kap. 6.7).

6.3 Technische Kriterien

Nicht jeder Flächentyp ist mit jedem Verfahren herzustellen. Aufgrund ihrer geometrischen Eigenschaften sind einige Flächen wie folgt fertigbar:

- Rotationsflächen an der Drehbank
- Regelflächen mit Oberfräse, Styroporsäge oder Laser
- Abwickelbare Flächen durch Abkanten/Walzen/Rollen
- Explizite Gleichungen mit der xyz -Fräse
- Extrusionsflächen an der Mehrachs-Schleifmaschine
- Alle Flächen mit der Stereolithographie oder Gusstechniken.

Die Liste erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Auch das kann ein wichtiges Kriterium zur Modellbildung sein. Ist etwa für die Fertigung einer Endoprothese aus Kostengründen ein bestimmtes Verfahren anvisiert, so sollte man die morphometrische Untersuchung diesem Verfahren angleichen. Stimmen reale Fläche und Modell nun gar nicht überein, sollten die gewählte Modellbildung sowie das gewünschte Fertigungsverfahren noch einmal überdacht werden.

7 Das hyperbolische Paraboloid

Die Gleichung des hyperbolischen Paraboloides, der einfachsten Sattelfläche, lautet in Normalform

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad . \quad (7.1)$$

Ein Beispiel ist in Abb. 7.1 gegeben.

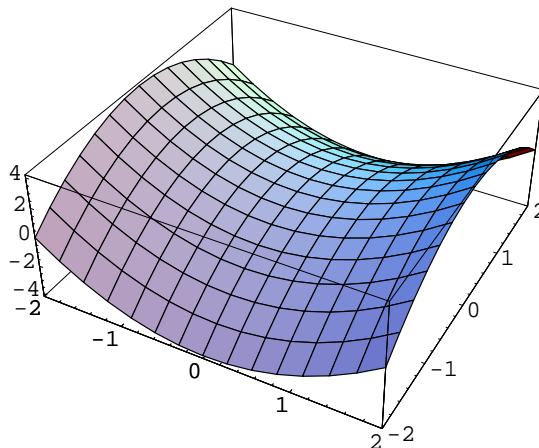


Abbildung 7.1: Das hyperbolische Paraboloid $z = x^2 - y^2$, also $a = b = c = 1$.

Dies lässt sich in die beiden Faktoren

$$\frac{z}{c} = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \quad (7.2)$$

zerlegen. Die Klammern stellen eine Umparametrisierung der Koordinaten (x, y) auf

$$u = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \quad \text{und} \quad v = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$$

dar. Wegen $z = cuv$ stellt auch ein Produkt der ursprünglichen Koordinaten als Flächenparameter, etwa $z = xy$ die Gleichung einer solchen Fläche dar. Beispiele dieser Fläche sind in den Abbildungen 7.2 und 7.3 gegeben.

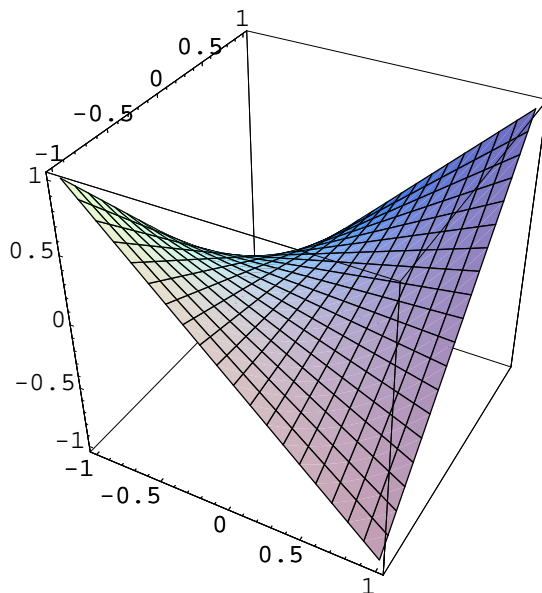


Abbildung 7.2: Das hyperbolische Paraboloid $z = x \cdot y$. Gegenüber der Fläche in Abb. 7.1 ist diese um 45° gedreht und anders parametrisiert.

Gesucht ist nun eine Möglichkeit, aus den der Messung zugänglichen Größen wie den Radien der Scheitelkreise der Kehlparabeln oder den Winkeln zwischen den Erzeugenden die Parameter a, b und c der Gleichung zu bestimmen. Diese Parameter haben alle die Dimension einer Länge. Es scheint zunächst so, als sei die gesamte Fläche durch insgesamt drei Parameter gegeben.

7.1 Die Parameterdarstellung als Regelfläche

Eine Regelfläche ist eine einparametrische Schar von Geraden. Sei \mathbf{a} der Aufpunkt einer Geraden und \mathbf{r} der nicht notwendigerweise normierte

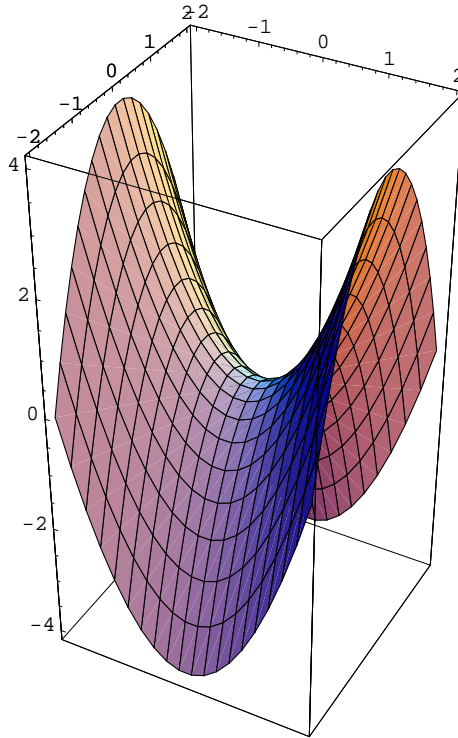


Abbildung 7.3: Das hyperbolische Paraboloid $z = (x - y)(x + y)$. Bis auf die Skalierung der Grafik stimmt die Fläche mit der aus Abb. 7.1 überein.

Richtungsvektor. Dann lautet die Punkt-Richtungs-Form der einzelnen Geraden $\mathbf{x}(v) = \mathbf{a} + v\mathbf{r}$. Daher ist

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{a}(u) + v\mathbf{r}(u) \quad .$$

die gesuchte Parameterdarstellung einer Regelfläche

Eine Darstellung des hyperbolischen Paraboloides mit parabolischen Aufpunkten ergibt sich zu

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au/\sqrt{c} \\ 0 \\ u^2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} a/\sqrt{c} \\ \pm b/\sqrt{c} \\ 2u \end{pmatrix} \quad .$$

Der Beweis, dass diese Parameterdarstellung der obigen Gleichung genügt, beschränkt sich auf Einsetzen und Nachrechnen.

Der Winkel zwischen den beiden Erzeugenden \mathbf{r}_+ und \mathbf{r}_- hängt von u ab. Da aber im Schnittpunkt der Kehlparabeln $u = 0$ gilt, vereinfacht sich die Rechnung. Man erhält dort für den Kosinus des Zwischenwinkels α

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{r}_+ \cdot \mathbf{r}_-}{|\mathbf{r}_+||\mathbf{r}_-|} = \frac{a^2/c - b^2/c}{a^2/c + b^2/c} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} .$$

Dies lässt sich nach dem Verhältnis a/b auflösen, und es ergibt sich im Intervall $\alpha \in [0, \pi]$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \frac{\alpha}{2} , \quad (7.3)$$

d.h. das Verhältnis zwischen a und b ist durch den halben Zwischenwinkel $\alpha/2$ bestimmt. In Abb. 7.2 waren die zwei Erzeugendenscharen also bereits mit den Koordinaten x und y als Flächenparameter realisiert. In Abb. 7.4 findet sich der dazu gehörige Höhenlinienplot.

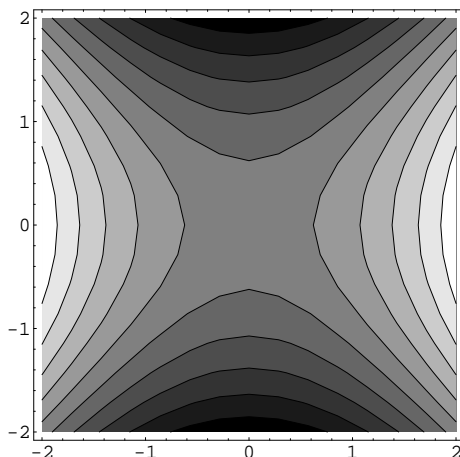


Abbildung 7.4: Die Höhenlinien des hyperbolischen Paraboloides $z = xy$. Die Fläche stimmt mit der aus Abb. 7.2 überein. Die beiden asymptotischen Richtungen des Ursprungs sind gut zu erkennen.

Schöner wäre es, bereits als Aufpunkt eine Gerade verwandt zu haben. Das aber leistet genau die Zerlegung (7.2). Man erhält die Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}(u, v) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(u+v)/2 \\ b(u-v)/2 \\ cuv \end{pmatrix} \quad , \quad (7.4)$$

welche sich auf zwei Arten auf die Form einer Regelfläche bringen lässt:

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} au/2 \\ bu/2 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} a/2 \\ -b/2 \\ cu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av/2 \\ -bv/2 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} a/2 \\ b/2 \\ cv \end{pmatrix} \quad .$$

Als Kosinus des Zwischenwinkels zwischen den Richtungen

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ 2cu \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$\cos \varphi_{ar}(u) = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2) \sqrt{1 + \frac{4c^2 u^2}{a^2 + b^2}}} \quad .$$

Für $u = 0$ ergibt sich erwartungsgemäß das alte Ergebnis, für große Abstände vom Ursprung verschwindet der Kosinus und der Schnittwinkel geht gegen 90° .

7.2 Die Schnittkrümmungen

Für $x = \text{const}$ ergeben sich die Parabeln $z(y)$

$$\frac{z}{c} + \frac{y^2}{b^2} = \text{const} \quad ,$$

und für $y = \text{const}$ ergeben sich die Parabeln $z(x)$

$$\frac{z}{c} - \frac{x^2}{a^2} = \text{const} \quad .$$

Der Krümmungsradius r einer explizit gegebenen Funktion $y(x)$ an einem Punkt x_0 ist allgemein gegeben durch

$$r_0 = \frac{(1 + (y'_0)^2)^{3/2}}{y''_0} \quad . \quad (7.5)$$

Ein positiver Radius entspricht einer konvexen Fläche und ein negativer einer konkaven.

Beispielsweise für die Schnitte $x = \text{const}$ der Sattelfläche ergeben sich die Ableitungen der Funktion $z(y)$

$$z' = -c \frac{2y}{b^2} \quad \text{und} \quad z'' = -c \frac{2}{b^2}$$

und daher im Nullpunkt mit $y_0 = 0$

$$z'_0 = 0 \quad \text{und} \quad z''_0 = -c \frac{2}{b^2} \quad ,$$

also

$$r_{y0} = -\frac{b^2}{2c} \quad . \quad (7.6)$$

Entsprechend erhält man für $y = \text{const}$ die Schnittkrümmung in x -Richtung

$$r_{x0} = \frac{a^2}{2c} \quad . \quad (7.7)$$

Abermals ist das Verhältnis a/b bestimmbar durch

$$\frac{a}{b} = \sqrt{-\frac{r_{x0}}{r_{y0}}} \quad ; \quad (7.8)$$

und mit (7.3) folgt in Übereinstimmung mit dem allgemeineren Satz von EULER

$$\cot \frac{\alpha}{2} = \sqrt{-\frac{r_{x0}}{r_{y0}}} \quad .$$

Löst man die Gleichungen (7.6) und (7.7) nach a und b auf und setzt diese Werte in die Normalgleichung (7.1) des Hyperboloides ein, so erhält man

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{2cr_{x0}} - \frac{y^2}{2cr_{y0}} \quad ,$$

also nach Durchmultiplizieren mit c die Gleichung

$$z = \frac{x^2}{2r_{x0}} - \frac{y^2}{2r_{y0}} \quad . \quad (7.9)$$

Ein Sattel ist demnach durch zwei Radien festlegbar, der dritte Parameter in der Gleichung der Normalgleichung kann als Einheit des Längenmaßstabes interpretiert werden, mehr darüber im Abschnitt 7.4.

7.3 Parabelförmige Schnitte und der Satz von Euler

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass die Annahme von parabelförmigen Schnitten im Ursprung zusammen mit dem Satz von EULER sofort auf eine Fläche zweiter Ordnung führt, genauer eine Schmiegefläche. Ein hyperbolisches Paraboloid entsteht also, wenn die Krümmungen unterschiedliche Vorzeichen haben.

Die Krümmung κ_0 einer Parabel $z = cx^2$ im Ursprung beträgt nach Formel (7.5) $\kappa_0 = 2c$. Dies verwendet man in der folgenden Gleichung einer Fläche in Polarkoordinaten, wobei x durch r ersetzt wird

$$\begin{aligned}x &= r \cos \alpha \\y &= r \sin \alpha \\z &= c(\alpha)r^2 = \frac{1}{2}\kappa_0(\alpha)r^2 \quad ,\end{aligned}$$

welche explizit Parabeln für die Höhenkoordinate ansetzt. In den Ausdruck für z setzt man den Satz von EULER ein und ersetzt die dann entstehenden Ausdrücke wieder durch x und y

$$\begin{aligned}z &= \frac{1}{2} \left(\kappa_1 \cos^2 \alpha + \kappa_2 \sin^2 \alpha \right) r^2 \\&= \frac{1}{2} \left(\kappa_1 r^2 \cos^2 \alpha + \kappa_2 r^2 \sin^2 \alpha \right) \\&= \frac{1}{2} \left(\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2 \right) \quad .\end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung einer Schmiegefläche zweiter Ordnung in Hauptachsenform. Abbildung 7.5 zeigt einen solchen aus Parabeln zusammengesetzten Sattel.

7.4 Die Einheiten

Die Wahl des Einheitensystems ist bei der Beschreibung der Fläche noch frei, d.h. sie kann willkürlich festgelegt werden. Das äußert sich darin, dass die Gleichung in Normalform (7.1) mit beliebigen Faktoren multipliziert werden kann, aber noch immer dieselbe Fläche beschreibt. In Millimetern etwa, also mit $c = 1mm$, ergibt sich

$$r_{y0}/mm = -\frac{b^2/mm^2}{c/mm} = -\frac{b^2}{mm^2} \quad ,$$

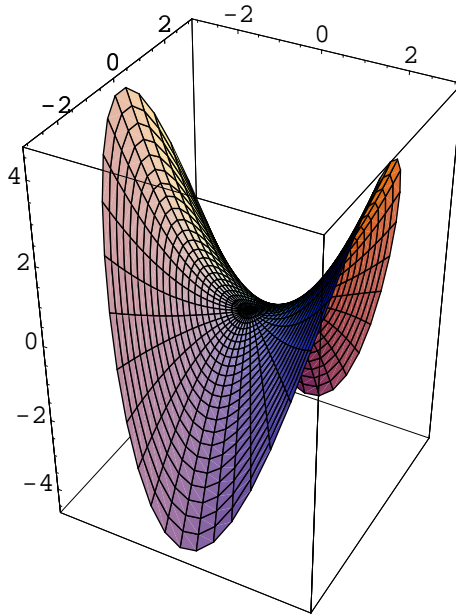


Abbildung 7.5: Die aus Parabeln $z = c(\alpha)r^2 = \frac{1}{2}(\kappa_1x^2 + \kappa_2y^2)$ zusammengesetzte Sattelfläche zweiter Ordnung. Die verwendeten Krümmungen sind $\kappa_1 = 1$ und $\kappa_2 = -1$.

also

$$b/mm = \sqrt{-r_{y0}/mm}$$

und entsprechend

$$a/mm = \sqrt{r_{x0}/mm} \quad .$$

Damit sind die Parameter a und b der Sattelfläche also schon allein aus der Messung zweier Schnittkrümmungen bestimmbar, wie im letzten Abschnitt vorgeführt wurde. Es ist aber auch möglich, das aus dem Winkel bestimmbare Verhältnis a/b zusammen mit nur einem der beiden anderen Werte zu benutzen, wie es bereits zur konsistenten Mittelung 3.6, 3.5 verwandt wurde.

Aus 3.4 und 3.3 können durch Subtraktion der beiden Seiten der Gleichungen dimensionslosen Testgrößen abgeleitet werden, und zwar

$$\Delta\alpha := \alpha - 2 \arctan \sqrt{-\frac{r_{y0}}{r_{x0}}} \approx 0 \quad (7.10)$$

für die Winkel und

$$\Delta v := \tan^2 \frac{\alpha}{2} - \left| \frac{r_{y0}}{r_{x0}} \right| \approx 0 \quad (7.11)$$

für die Radienverhältnisse. Unter den Voraussetzungen des Satzes von EULER-MEUSNIER 3.1, 3.2 sollten diese Größen statistisch nicht von Null verschieden sein. Sie zeichnen sich unter den vielen Möglichkeiten, die Gleichungen (3.3) oder (3.4) in einer Statistik zu nutzen, durch ihre einfache Interpretierbarkeit als Winkel- oder Verhältnisdifferenz aus.

Sind also die Voraussetzungen der obigen Sätze gegeben, so sind diese Tests allgemein und können wegen der Redundanz ihrer Parameter als Maß für die Genauigkeit der Messung verwandt werden. Da diese Gleichung aber lokal allgemein gilt, entscheiden diese Testgrößen nicht über die Frage, ob es sich bei der Fläche tatsächlich um eine Sattelfläche zweiter Ordnung handelt. Das zeigt entweder die Güte der Anpassung der Schmiegekreise an die potentiellen Kehllinien bzw. Hauptkrümmungsrichtungen oder die Art der Abhängigkeit des Zwischenwinkels über die Fläche.

7.5 Beispiel: Das Daumensattelgelenk

Am Daumensattelgelenk nahe der Handwurzel liegt ein Gelenk aus zwei Sattelflächen vor. Der Greifbewegung entspricht die Flexion- Extensionsrichtung (auch volar-dorsal genannt) und senkrecht dazu die Adduktion-Abduktionsrichtung (auch radial-ulnar genannt). Im Folgenden sollen die Abkürzungen FE und AA verwandt werden. Die Messungen von Schnittkrümmungen und Zwischenwinkel wurden von RAINER PERPLIES [30] an 28 Gelenken vorgenommen. Mit den Buchstaben R, W und D sollen Radien, Winkel und Differenzen abkürzend bezeichnet werden.

Eine Fläche nennt man orientierbar, wenn in der Umgebung eines Punktes hinreichend kleine geschlossene Kurven um diesen Punkt im positiven Sinn durchlaufen werden. Das bekannte Möbiusband ist das Standardbeispiel einer nicht orientierbaren Fläche. Oberflächen materieller Körper sind über ihre äußere Flächennormale orientierbar. Die Vorzeichen der Hauptkrümmungen der Gelenkflächen sind (+ entspricht konvex, – konkav)

	proximal	distal
AA	–	+
FE	+	–

und die AA- und FE-Richtungen sollen mit den Koordinatenachsen x und y identifiziert werden — dann entspricht die Standardperspektive der Abbildungen dieser Arbeit einer Ansicht des Gelenkes, bei der der Daumenrücken der linken Hand gleichzeitig mit der Handinnenfläche zu sehen ist. Zur Kontrolle wurde der Winkel zwischen beiden Richtungen bestimmt; er betrug bei jeder Messung erwartungsgemäß 90° .

Mittelwert und Standardabweichungen der Beträge der Radien sind

	proximal	distal
RAA	-13.3 mm \pm 1.6 mm	11.0 mm \pm 1.2 mm
RFE	7.3 mm \pm 1.5 mm	-8.1 mm \pm 1.2 mm

und die der Zwischenwinkel, derart gemessen, dass die AA-Richtung eingeschlossen ist

	proximal	distal
WE	$86.6^\circ \pm 3.1^\circ$	$90.1^\circ \pm 2.5^\circ$

Es konnten keine signifikanten Unterschiede zwischen den Geschlechtern festgestellt werden.

Die paarweisen Differenzen der Radienbeträge wie auch die der Winkel (proximal – distal) sind beim zweiseitigen t-Test hochsignifikant von Null verschieden

	Mean	Std Dev	t Value	Pr > t
DRAA	2.36 mm	1.37 mm	9.13	< 0.0001
DRFE	-0.82 mm	1.12 mm	-3.87	0.0006
DW	-3.5°	2.7°	-6.72	< 0.0001

daher liegt eine deutliche Inkongruenz vor, welche in AA-Richtung besonders ausgeprägt ist. Diese erlaubt eine Verdrehung der Gelenkflächen um deren gemeinsame Normale im zentralen Kontaktpunkt mit einem Ausmaß von ca. 7° . Eine Verschiebung des Kontaktpunktes hat natürlich andere Beschränkungen des Winkels zur Folge.

3D-Plots der Gelenkflächen und des Zwischenraumes finden sich in Abb. 7.6.

Die beiden Methoden „Radienmessung“ und „Winkelmessung“ liefern jedoch unterschiedliche Mittelwerte. Für die beiden Testgrößen aus den Formeln (7.10,7.11) ergibt sich (p: proximal, d: distal)

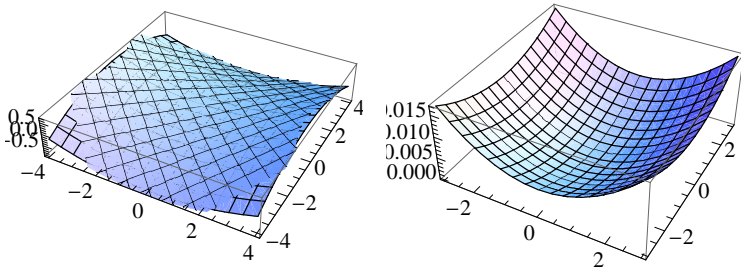


Abbildung 7.6: Der Daumensattel bestimmt aus den mittleren Radien. Links: proximale und distale Gelenkfläche (unterschiedlich parametrisiert). Rechts: Die Fläche der Differenzen in z -Richtung, ein elliptisches Paraboloid.

	Mean	Std Dev	t Value	Pr > t
DWp	13.9°	5.8°	12.62	< 0.0001
DWd	8.7°	3.4°	13.64	< 0.0001
DVp	0.34	0.15	12.15	< 0.0001
DVd	0.26	0.10	13.79	< 0.0001

also liefert der Vergleich beider Messmethoden sowohl proximal wie auch distal inkonsistente Sattelflächen, die Messwerte passen nicht zum Modell eines hyperbolischen Paraboloides. Das kann an einer unzulässigen Mittelung der Radien über einen gewissen Bereich der kleinen Flächen liegen, es ist aber auch ein Hinweis darauf, dass die Flächen möglicherweise keine hyperbolischen Paraboloides mehr sind.

7.6 Näheres zum Linienkontakt

Nun soll der rotatorische Freiheitsgrad um die Kontaktnormale als Drehachse näher beleuchtet werden. Es liegt nahe zu vermuten, dass in der Grenze der maximalen Drehung bei gleich bleibendem Kontaktpunkt die Erzeugenden beider Flächen aufeinander zu liegen kommen. Dreht man also versuchsweise die Flächen so, dass eine Erzeugende jeweils auf einer Koordinatenachse liegt, so sollte wieder die Differenz der derart gedrehten Flächen Auskunft über das Vorliegen eines Linienkontaktes geben.

In der Tat erhält man durch die Drehung

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

um den Winkel $\alpha = \arctan \sqrt{R_x/R_y}$ die Gleichung

$$z' = \frac{x'}{2R_x} - \frac{y'}{2R_y} = x \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_x} - \frac{1}{R_y} \right) x - \frac{1}{\sqrt{R_x R_y}} y \right) \quad , \quad (7.12)$$

welche auf der y -Achse mit $x = 0$ immer die Erzeugende $z' = 0$ hat. Bild 7.7 zeigt an unserem laufenden Beispiel die so entstandenen Höhenlinien.

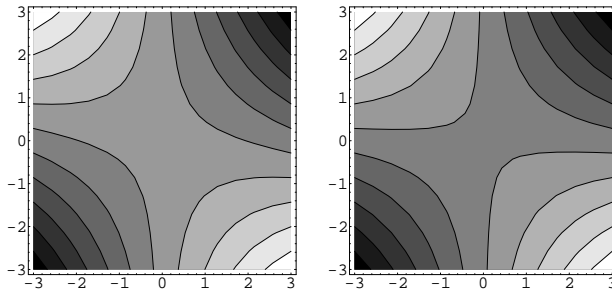


Abbildung 7.7: Die Höhenlinien des Daumensattelgelenkes bei Kontakt im Ursprung und jeweils einer Erzeugenden in y -Richtung, links proximal, rechts distal.

Es kann nun die Differenzfläche berechnet werden: Es handelt sich um ein langgezogenes hyperbolisches Paraboloid, wiederum in der Gestalt $z' = x(ax - by)$. Bild und Höhenlinien sind in Bild 7.8 zu sehen.

Da der Zwischenraum keine negativen Werte verträgt, ist es im Allgemeinen nicht möglich, einen Linienkontakt im Ursprung durch Drehen der Erzeugenden aufeinander zu realisieren. Das kann man auch dadurch begründen, dass beide Flächen entlang ihrer Erzeugenden unterschiedliche Flächennormalen haben. Dann muss entweder der Kontaktpunkt in der Sattelmittle aufgegeben werden, oder es handelt sich um eine Berührung höherer Ordnung und der Sattel ist keine Fläche zweiter Ordnung mehr.

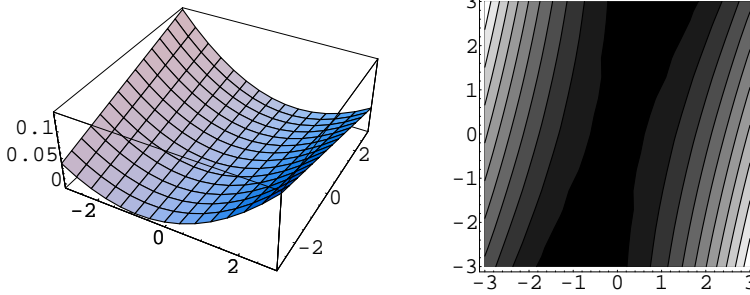


Abbildung 7.8: Der hypothetische Gelenkspalt des Daumensattelgelenkes bei Kontakt im Ursprung und jeweils einer Erzeugenden in y -Richtung. Die Differenz der beiden Drehwinkel beträgt 2.8° .

Nun war der ursprünglich angenommene Gelenkspalt ja ein elliptisches Paraboloid (eine quadratische Form mit Determinante > 0) und der gedrehte ein hyperbolisches (mit Determinante < 0). Dazwischen muss es demnach eine Richtung mit Determinante $= 0$ geben, so dass der Gelenkspalt ein parabolischer Zylinder ist. Das wäre dann der gesuchte Linienkontakt.

Der Ansatz ist also, die Gleichung für den Gelenkspalt $z_d - z'_p(\alpha)$ symbolisch aufzustellen, diese als quadratische Form in x und y zu schreiben, deren Determinante als Funktion des Drehwinkels auszurechnen und schließlich einen Winkel zu bestimmen, der diese Determinante zu Null macht. Nach einiger Rechnung, vorzugsweise mit Hilfe von Computeralgebra, erhält man zu den Flächen

$$z_1 = \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2r_1} \quad \text{und} \quad z'_2 = \frac{(x \cos(\alpha))^2}{2R_2} - \frac{(y \sin(\alpha))^2}{2r_2}$$

und deren Differenz $z'_2 - z_1$ zunächst die Determinante der quadratischen Form

$$\frac{1}{8R_1r_1R_2r_2} \left((R_1r_2 + r_1R_2) - 2(R_1r_1 + R_2r_2) - (R_1R_2 + r_1r_2) + (R_1 + r_1)(R_2 + r_2) \cos(2\alpha) \right)$$

und endlich die Drehwinkel zur verschwindenden Determinante

$$\alpha = \pm \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{2(R_1 r_1 + R_2 r_2) + (R_1 R_2 + r_1 r_2) - (R_1 r_2 + r_1 R_2)}{(R_1 + r_1)(R_2 + r_2)} \right) . \quad (7.13)$$

Dieser ist gleichzeitig die Hälfte des Bereiches der axialen Beweglichkeit.

Die Abbildung 7.9 zeigt diese Situation an unserem Beispiel: Es liegt nun tatsächlich ein Linienkontakt vor. Das Ausmaß der axialen Beweglichkeit des Daumensattelgelenkes beträgt 4.8° .

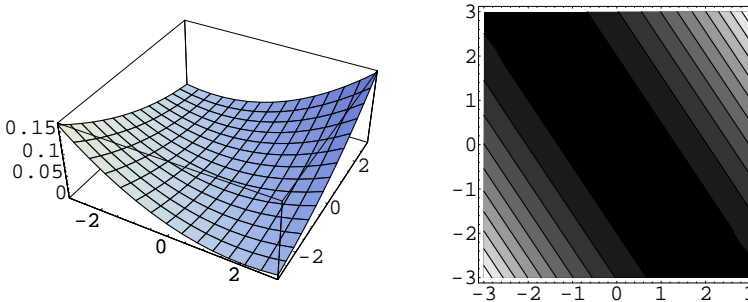


Abbildung 7.9: Der Gelenkspalt des menschlichen Daumensattelgelenkes bei Linienkontakt durch den Ursprung. Der Drehwinkel zwischen den hyperbolischen Paraboloiden beträgt nun nur noch 2.4° .

Es bleibt noch genauer zu klären, warum der Versuch misslang, einfach beide Erzeugenden übereinander zu legen. Dazu betrachtet man die Differenzfläche mit beiden Gleichungen in der allgemeinen Form 7.12. Es ergibt sich für das Verschwinden des gemischten Termes die Gleichung

$$r_1 R_1 - r_2 R_2 = 0 \quad . \quad (7.14)$$

Diese besagt, dass ein Linienkontakt nur dann durch Drehung der Erzeugenden aufeinander zustande kommen kann, wenn beide Flächen dieselbe Gaußsche Krümmung haben. Darüber hinaus liefert sie eine gegen Null testbare Größe, die Differenz des Produktes der Radien $DPR := r_1 R_1 - r_2 R_2$. Es ergibt sich für den t-Test (proximal minus distal)

	Mean	Std Dev	t Value	Pr > t
DPR	8.82	20.23	2.31	0.0289

Index	p_{Shapiro}	p_{Wilcoxon}
I_{FE}	0.02199	0.0006785
I_{AA}	0.4595	9.145e-06
I_G	0.567	0.07017

Tabelle 7.1: p -Werte für den Shapiro-Test der Inkongruenzindizes auf Normalität und den Wilcoxon-Test gegen Null. Nur I_{FE} ist schwach signifikant nicht normalverteilt. Zu I_G vgl. Abb. 7.10.

Das ist schwach signifikant von Null verschieden und demnach stellt sich kein Linienkontakt ein. Angesichts der Häufigkeit von Arthrose im Daumensattelgelenk scheint mir der Versuch lohnend, diesen neuen Parameter quantitativ mit dem Auftreten von degenerativen Knorpelveränderungen in Verbindung zu bringen.

Diese Ableitung setzte als Modell für die kontaktierenden Flächen hyperbolische Paraboloid voraus. Diese Arbeitshypothese gründet sich teils in der mathematischen Einfachheit der Sättel, teils in dem gewollten vielfachen Auftreten von Erzeugenden als Regelflächen.

7.7 Die Indizes der Inkongruenz

In Abschnitt 5.4 wurden zwei Indizes der Inkongruenz definiert, einer für die Radiendifferenz (5.1) und einer für den Linienkontakt (5.2). Beide waren von der Bauart „Differenz durch Mittelwert“. Diese sollen nun statt, wie bisher, der einfachen Differenzen, anhand der vorliegenden Daten gegen Null getestet werden. Ferner soll, um auch letzte Zweifel auszuräumen, der Shapiro-Test auf Normalität und der nichtparametrische Wilcoxon-Test gegen Null verwandt werden. Es ergeben sich die p -Werte der Tabelle 7.1

Die zugehörigen Boxplots sind in Abb. 7.10 dargestellt. Die Interpretation ist, dass die Radien des Daumensattelgelenkes mit hoher Signifikanz inkongruent sind, und dass mit schwacher Signifikanz kein Linienkontakt vorliegt. Diese schwache Signifikanz fordert geradezu eine Untersuchung mit erhöhter Fallzahl heraus.

Die nächsten drei Abschnitte sind der geometrischen Modellbildung gewidmet. Neben dem hyperbolischen Paraboloid sollen der Torus und

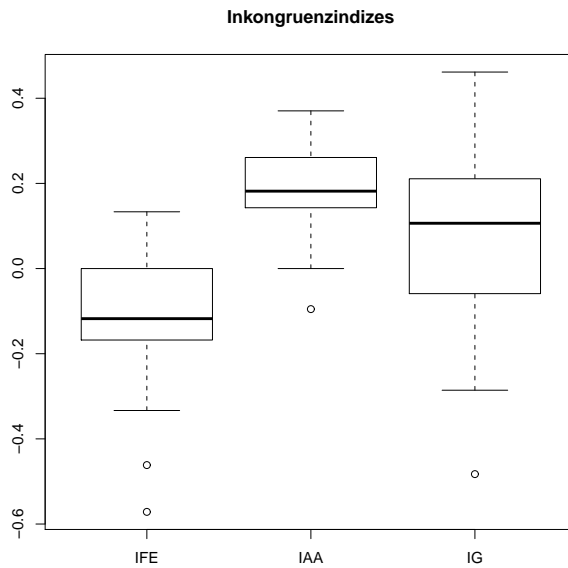


Abbildung 7.10: Boxplots zu den Inkongruenzindizes des Daumensat-
tels. Bemerkenswert ist, dass die fehlende Signifikanz
beim Wilcoxon-Test für I_G durch Weglassen des kleinsten Wertes (ein Ausreißer) verschwindet, es ist dann $p=0.02464$.

eine empirisch festgelegte Fläche als Beispiele einer erweiterten Modellbildung dienen.

7.8 Der Daumensattel als hyperbolisches Paraboloid?

Zunächst arbeiten wir aber mit der Arbeitshypothese des hyperbolischen Paraboloides weiter. Die für jedes Gelenk individuell durchgeführte eingangs hergeleitete Mittelung (3.5,3.6) beider Methoden liefert schließlich die Parameter

	proximal	distal
\bar{R}_{AA}	-11.7 mm \pm 1.6 mm	10.1 mm \pm 1.0 mm
\bar{R}_{FE}	8.5 mm \pm 1.4 mm	-8.9 mm \pm 1.2 mm

des geometrischen Modells des Daumensattelgelenkes. Vom optischen Erscheinungsbild unterscheiden sich die Flächen kaum von denen in Abb. 7.6

Da der Arcustangens (besonders bei Werten um 90° herum) eine nichtlineare Funktion ist, macht es einen Unterschied, ob die Winkel individuell berechnet und dann gemittelt werden, oder umgekehrt. Es ergibt sich zur Veranschaulichung dieser Diskrepanz

	proximal	distal
WE individuell	71.4° \pm 5.1°	82.2° \pm 4.9°
WE gemittelt	80.7°	86.2°

Da die letzten Werte zu den gemittelten Radien passen, entsprechen sie den gemittelten Flächen. Die Radien liegen nun näher beieinander als bei den ursprünglichen Daten, ihre Streuungen bleiben aber vergleichbar. Für die Maße der Inkongruenz 5.1 ergeben sich die Werte

	Mean	Std Dev	t Value	Pr > t
I_{FE}	-0.026	0.059	-2.29	0.0303
I_{AA}	0.071	0.054	6.93	< 0.0001
I_W	-0.070	0.027	-13.84	< 0.0001

also liegt sogar für die gemittelten Flächen immer noch eine, wenn auch nicht mehr so ausgeprägte, Inkongruenz vor.

Der Zwischenraum beider Flächen bei einem Punktkontakt im Ursprung gibt einen Eindruck über die räumliche Verteilung der Inkongruenz. Man erhält ihn durch Subtraktion der z -Werte der proximalen von der distalen Gleichung. Es ergibt sich wieder ein elliptisches Paraboloid.

Für unseren Datensatz der geometrisch gemittelten Flächen ergibt sich mit 5.2

	Mean	Std Dev	t Value	Pr > t
I_G	0.045	0.107	2.23	0.0340

Die Werte sind schwach signifikant von Null verschieden, ein Linienkontakt stellt sich demnach nicht automatisch ein.

7.9 Vergleich mit dem Torus

Die empirische Diskrepanz der Werte zu Winkel- und Radienmessungen erlaubt noch eine weitere geometrische Deutung. Falls man sich auf Tori anstatt eines hyperbolischen Paraboloides als Modellflächen festlegt, dann sind die asymptotischen Linien keine Geraden mehr. Insbesondere sind zwei Interpretationen einer sattelförmigen Fläche in Form einer Zuordnung zu einem Torus möglich. Dazu vergleiche man das Bild 1.3 mit den zwei gekreuzten Tori.

Im oberen Fall, vergleiche Bild 7.11, befindet sich die innere Achse des Torus (also seine Rotationsachse) unterhalb der Fläche, im unteren Fall des Bildes 7.12 liegt sie oberhalb dieser.

Die asymptotischen Linien sind nun keine Geraden mehr. Im einen Fall führen zu weit ausgedehnte gemittelte Asymptoten zu einem scheinbar größeren Schnittwinkel (hier jeweils 90°), und im anderen Fall zu einem scheinbar kleineren. Eine exakte quantitative Aussage war mir leider nicht möglich.

Bei unseren Daten war der die AA-Richtung (eigentlich eine Schnittebene) einschließende gemessene Winkel immer größer als der aus dem Radienverhältnis berechnete. Die Rotationsachse des Torus weist daher genau in diese Richtung und liegt proximal der Gelenkflächen. Die inkongruenten Tori sind demnach nicht gekreuzt, sondern liegen ineinander. Das Bild 7.13 zeigt die Situation.

Im nächsten Kapitel soll die geometrische Mittelung hinterfragt werden, da sie möglicherweise eine zu stark vereinfachende Modellbildung nach sich zieht.

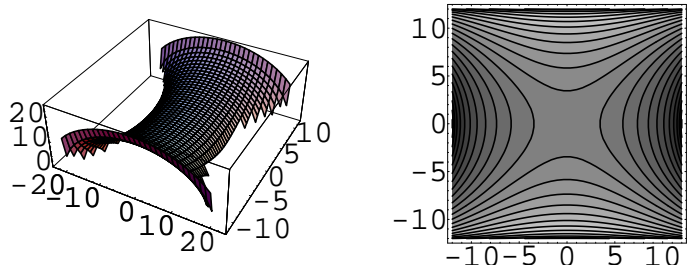


Abbildung 7.11: Der sattelförmige Bereich eines Kreistorus mit gleichen Schnittkrümmungen. Rechts seine Höhenlinien. Die asymptotischen Richtungen schneiden sich rechtwinklig.

7.10 Das nichtlineare Sattelmodell

Wir gehen zurück auf die nicht zusammen passenden Daten zu den Radien und den Zwischenwinkeln der Asymptoten bei den Einzelflächen. Im Gegensatz zu den Formeln (3.5) und (3.6) interpretieren wir sie nicht mehr als zu behebende Inkonsistenzen, sondern erheben sie zum Konstruktionsprinzip. Diese Messwerte sind, wie in Kapitel 3 beschreiben, nicht mit dem Satz von EULER verträglich. Es handelt sich also vermutlich sowohl um Flächen als auch um Berührungen höherer Ordnung.

Um diese näherungsweise zu modellieren kann die EULERSche Formel in modifizierter Form als Ausgangspunkt eines Flächenmodells dienen. Zunächst formen wir das Original um zu

$$\begin{aligned}
 \kappa(\varphi) &= \kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi \\
 &= \kappa_1 \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi) + \kappa_2 \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) \\
 &= \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) + \frac{1}{2}(\kappa_1 - \kappa_2) \cos 2\varphi \quad . \quad (7.15)
 \end{aligned}$$

Die Krümmung schwingt also mit dem doppelten Schnittwinkel, wodurch $\kappa(\varphi + \pi) = \kappa(\varphi)$ gewährleistet ist. Diese Formel fassen wir als abgebrochene FOURIERreihe in 2φ auf. Mit einer zusätzlichen Konstante A erweitern wir diese Reihe zu

$$\kappa(\varphi) = \frac{1}{2}\kappa_{sum} + \frac{1}{2}\kappa_{diff}((1 - A) \cos 2\varphi + A \cos 4\varphi) \quad . \quad (7.16)$$

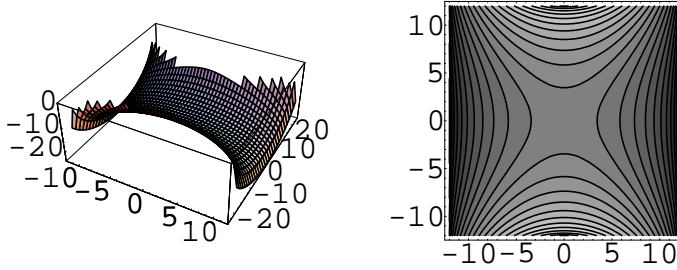


Abbildung 7.12: Der sattelförmige Bereich eines zweiten Kreistorus mit gleichen Schnittkrümmungen. Rechts seine Höhenlinien. Die asymptotischen Richtungen schneiden sich wieder rechtwinklig.

Die Konstante A ist aus der Messung zu bestimmen; für $A = 0$ erhalten wir die Formel von EULER zurück. Die Größen κ_{sum} und κ_{diff} sind aus den Extremwerten von $\kappa(\varphi)$ zu bestimmen, welche nach wie vor κ_1 und κ_2 sind. Diese liegen bei $\varphi = \{0, \pm\pi, \pm\pi/2\}$ und lauten

$$\kappa_1 = \frac{1}{2}\kappa_{sum} + \frac{1}{2}\kappa_{diff} \quad (7.17)$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{2}\kappa_{sum} + \frac{1}{2}\kappa_{diff}(2A - 1) \quad . \quad (7.18)$$

Die Konstante A ist nun der Wert für den Winkel der Asymptoten φ_{\pm} also für $\kappa = 0$. Als eindeutige Lösung dieser Gleichung ergibt sich

$$A = \frac{\kappa_{sum} + \kappa_{diff} \cos(2\varphi_{\pm})}{\kappa_{diff} (\cos(2\varphi_{\pm}) - \cos(4\varphi_{\pm}))} = \frac{\kappa_{sum} + \kappa_{diff} \cos(\alpha)}{\kappa_{diff} (\cos(\alpha) - \cos(2\alpha))} \quad , \quad (7.19)$$

wobei sowohl das positive als auch das negative Vorzeichen des Winkels denselben Wert für A ergeben und $\alpha = \varphi_+ - \varphi_-$ der Zwischenwinkel der Asymptoten ist. Dies setzt man nun in die Gleichung (7.18) ein, und löst das zusammen mit (7.17) entstehende Gleichungssystem nach κ_{sum} und κ_{diff} auf. Diese Lösung setzt man schließlich in den Ansatz (7.16) ein und erhält nach Vereinfachung durch Computeralgebra schließlich die gesuchte Gleichung der Fläche

$$\kappa(\varphi) = \frac{1}{2} \left(\kappa_1 + \kappa_2 + (\kappa_1 - \kappa_2) \cos(2\varphi) - \frac{\sin(2\varphi)^2}{2} \left(\frac{\kappa_1}{\sin(\alpha)^2} + \frac{\kappa_2}{\cos(\alpha)^2} \right) \right) \quad . \quad (7.20)$$

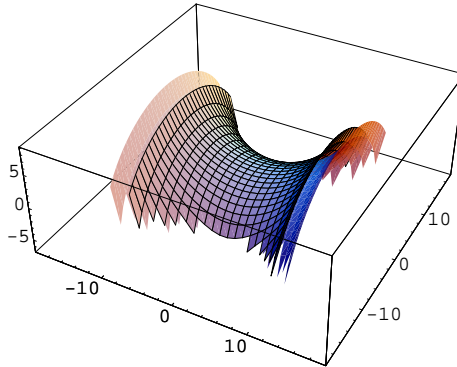


Abbildung 7.13: Die Gelenkflächen des Daumensattelgelenkes als Tori. Die proximale Gelenkfläche ist ohne Netz, dafür die distale nur als durchsichtiges Netzliniengitter dargestellt.

Die proximalen Werte waren $\kappa_1 = 1/7.3 \text{ mm}$, $\kappa_2 = -1/13.3 \text{ mm}$, $\alpha = 86.6^\circ$, woraus sich die Gleichung

$$\kappa_{prox} = 0.0122381 + 0.106087 \cos(2\varphi) + 0.018661 \cos(4\varphi)$$

ergibt. Analog erhält man distal mit $\kappa_1 = -1/8.1 \text{ mm}$, $\kappa_2 = 1/11 \text{ mm}$, $\alpha = 90.1^\circ$

$$\kappa_{dist} = -0.00823044 - 0.107183 \cos(2\varphi) - 0.00804341 \cos(4\varphi) \quad .$$

Der Verlauf beider Funktionen ist in der Abb. 7.14 dargestellt. An der Form der symbolisch vereinfachten Gleichungen erkennt man deutlich die ursprüngliche Idee der abgebrochenen Fourierreihe.

Als nächstes gilt es, aus der Schnittkrümmung $\kappa(\varphi)$ die Sattelfläche zurück zu gewinnen. Dazu benötigen wir eine Arbeitshypothese, mit der zur Schnittkrümmung eine passende Funktion zugeordnet wird. Die zugehörige Fläche wird beschrieben in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) , welche mit den kartesischen Koordinaten zusammenhängen über

$$x = \rho \cos(\varphi) \tag{7.21}$$

$$y = \rho \sin(\varphi) \quad . \tag{7.22}$$

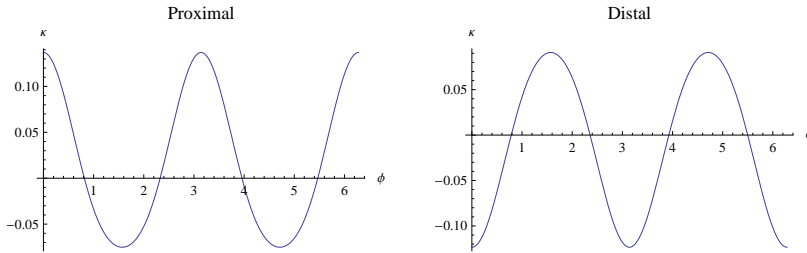


Abbildung 7.14: Die Krümmungen der Flächen des Daumensattels als nichtlineare Paraboloiden in Übereinstimmung mit den Mittelwerten.

Für eine aus Ursprungsparabeln zusammengesetzte Fläche gilt

$$z = \pm \frac{1}{2} \kappa \rho^2 \quad , \quad (7.23)$$

und für eine aus Kreisen zusammengesetzte Fläche gilt mit $r(\varphi) = 1/\kappa(\varphi)$ die Kreisgleichung

$$(z - z_0)^2 + \rho^2 = r^2(\varphi) \quad , \quad (7.24)$$

also aufgelöst nach z die Gleichung

$$z = z_0 \pm \sqrt{r^2(\varphi) - \rho^2} \quad . \quad (7.25)$$

Damit der Ursprung Element der Fläche ist, muss gelten $z(\rho = 0) = 0$. Also ist $z_0 = \mp |r|$ für positive/ negative r . Das positive Vorzeichen der Wurzel in (7.25) ist für positive r und das negative für negative r zu wählen. Zusammengefasst für beide Vorzeichen erhält man für die aus Kreisen zusammengesetzte Fläche

$$z = r(\varphi) \left(\sqrt{1 - \rho^2/r^2} - 1 \right) \quad (7.26)$$

oder ausgedrückt durch die Krümmung

$$z = \frac{1}{\kappa(\varphi)} \left(\sqrt{1 - \rho^2 \kappa(\varphi)^2} - 1 \right) \approx \frac{1}{\kappa} \left(1 - \frac{1}{2} \rho^2 \kappa^2 - 1 \right) = -\frac{1}{2} \kappa \rho^2 \quad . \quad (7.27)$$

Für positive Krümmungen κ ist die Kurve also nach unten geöffnet und für negative nach oben. Die sich ergebenden Flächen sind in Abb. 7.15 gezeigt.

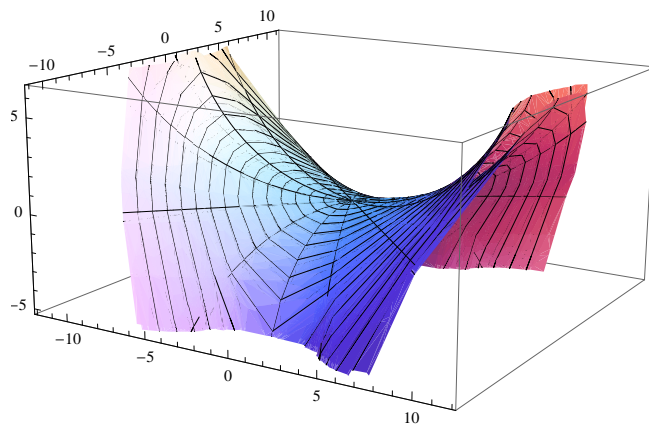


Abbildung 7.15: Die aus Parabeln zusammengesetzten nichtlinearen Flächen des Daumensattelgelenkes und ihre Berührung.

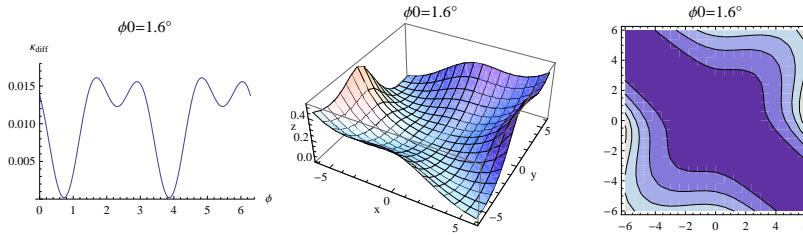


Abbildung 7.16: Krümmung, Differenzfläche und Höhenlinien des Linienkontaktes zu $\varphi_0 = 1.6^\circ$.

Es bleibt noch das Vorhandensein eines Linienkontaktes zu klären. Dazu betrachtet man die Differenz der Krümmungen, hier wegen der unterschiedlichen Flächennormalen die Summe

$$\kappa_{\text{diff}}(\varphi, \varphi_0) = \kappa_{\text{dist}}(\varphi - \varphi_0) + \kappa_{\text{prox}}(\varphi) \quad .$$

Für nur empirisch bestimmbare $\varphi_0 = 1.6^\circ$ ergibt sich die in Abb. 7.16 gezeigte Situation, das ist der praktische Nachweis eines Linienkontaktes.

8 Das einschalige Hyperboloid

Die Normalform des einschaligen Hyperboloides ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \quad (8.1)$$

handelt es sich um eine Rotationsfläche, so gilt $a = b$. Ein Beispiel findet sich in Abb. 8.1.

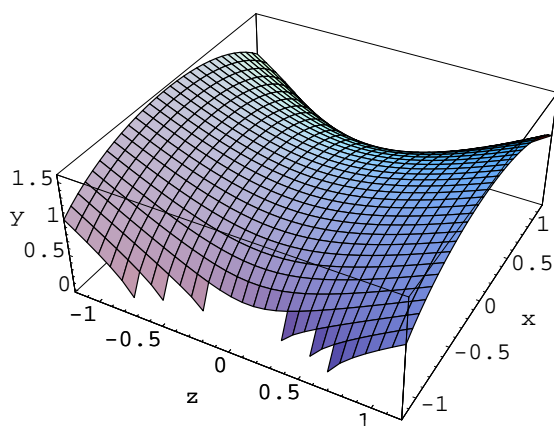


Abbildung 8.1: Der sattelförmige Teil des Hyperboloides mit $a = b = c = 1$. Nach der y -Richtung aufgelöst ergibt sich die Gleichung $y = \sqrt{1 - x^2 + z^2}$. In der Umgebung von $(x, z) = (0, 0)$ stimmt das wegen der binomischen Reihe näherungsweise mit der Sattelfläche $y - 1 \approx (z^2 - x^2)/2$ überein.

8.1 Die Parameterdarstellung für einen Rotationskörper

Als Erstes soll eine Darstellung des Rotationshyperboloides als Regelfläche aufgrund geometrischer Überlegungen hergeleitet werden.

Der Kehlkreis, also die Taille des Hyperboloides, liege in der xy -Ebene und habe den Radius r . Seine Parameterdarstellung ist demzufolge

$$\mathbf{a}(\varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die Richtung der Erzeugenden wird nun aus dem Tangenteneinheitsvektor an den Kehlkreis

$$\mathbf{t}(\varphi) = \frac{\mathbf{a}_{,\varphi}}{|\mathbf{a}_{,\varphi}|} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

und einer passenden z -Komponente zusammengesetzt. Diese ergibt sich aus der Steigung der senkrecht zum Gemeinlot mit der z -Achse projizierten Erzeugenden. Der Winkel zwischen den beiden Erzeugenden sei α , dann ist der Winkel zwischen der projizierten Erzeugenden und der Mittelachse des Hyperboloides gleich $\alpha/2$.

Da der Tangentenvektor auf $|\mathbf{t}| = 1$ normiert ist, ist der zur Länge 1 gehörende z -Abschnitt gefragt. Dieser ist nach Abb. 8.2 gleich $\cot \frac{\alpha}{2}$. Damit lautet also insgesamt der Richtungsvektor

$$\mathbf{r}(\varphi) = \mathbf{t}(\varphi) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cot \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ \cot \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} .$$

Durch Nachrechnen überprüft man, dass die Parameterdarstellung

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ \cot \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

tatsächlich der Gleichung

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} - \frac{z^2}{r^2 \cot^2 \frac{\alpha}{2}} = 1 \quad (8.2)$$

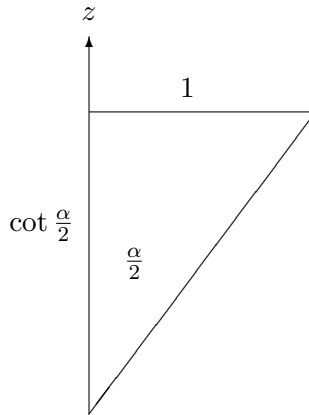


Abbildung 8.2: Eine Erzeugende des einschaligen Hyperboloides in Draufsicht.

genügt. Diese ist die durch r und α allein festgelegte Normalform des Rotationshyperboloides. Der im ersten Teil formal eingeführte Zwischenwinkel der Erzeugenden erhält nun als Steigung eine zusätzliche geometrische Bedeutung. Ferner ist durch sein quadratisches Auftreten in der Gleichung (8.2) klar, dass man durch Substitution $\alpha \mapsto -\alpha$ die andere Schar von Erzeugenden erhält, vgl. Abb. 8.3.

8.2 Die allgemeine Parameterdarstellung

Ausgehend von der letzten Gleichung und einer Ellipse als Grundlinie, also

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \cos \varphi \\ b \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

soll nun eine allgemeine Parameterdarstellung gefunden werden. Der Tangentenvektor ist

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} -a \sin \varphi \\ b \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

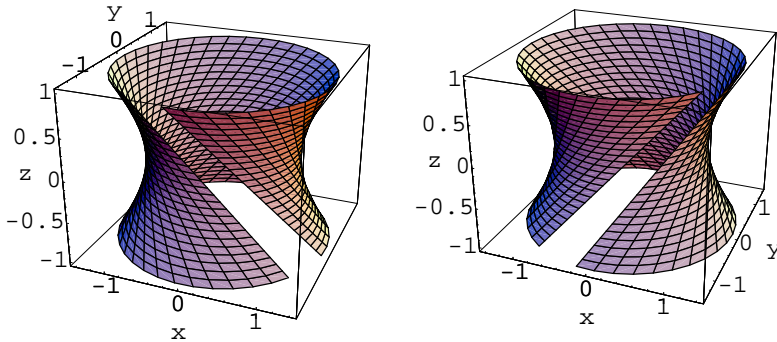


Abbildung 8.3: Beide Scharen von Erzeugenden des Rotationshyperboloides mit $a^2 = b^2 = c^2 = 1$ also $\alpha = \pm 90^\circ$.

und durch Nachrechnen überprüft man, dass mit den beiden Erzeugenden

$$\mathbf{r}_\pm = \begin{pmatrix} -a \sin \varphi \\ b \cos \varphi \\ \pm c \end{pmatrix}$$

die Gleichung der Fläche erfüllt ist. Ein Beispiel ist in Abb. 8.4 gegeben.

Der Winkel zwischen den beiden Erzeugenden hängt nun von dem Winkel φ ab. Es ergibt sich nämlich der Ausdruck

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{r}_+ \cdot \mathbf{r}_-}{|\mathbf{r}_+| |\mathbf{r}_-|} = \frac{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi - c^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi + c^2} = \frac{(a^2 - b^2) \sin^2 \varphi + b^2 - c^2}{(a^2 - b^2) \sin^2 \varphi + b^2 + c^2} .$$

Für $|\sin \varphi| = 1$ erhält man daraus

$$\cos \alpha_1 = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} ,$$

und für $\sin \varphi = 0$

$$\cos \alpha_0 = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} .$$

Da wegen $a > b$ auch $\cos \alpha_1 > \cos \alpha_0$ gilt, schwingt der Zwischenwinkel zwischen diesen beiden Werten mit der doppelten Frequenz hin und her. Umrechnen auf den Tangens ergibt genauer

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{a^2 + b^2 + (b^2 - a^2) \cos 2\varphi}{2c^2} ,$$

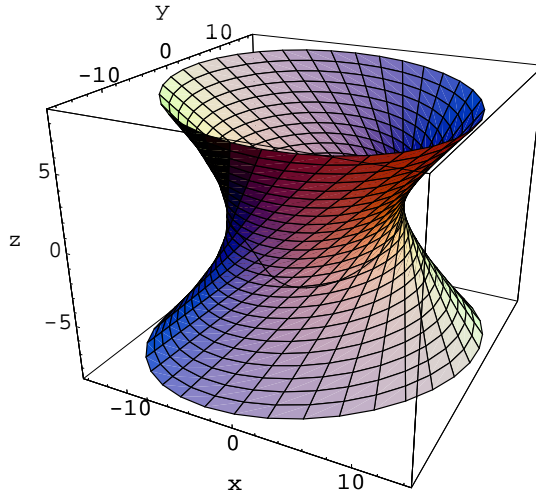


Abbildung 8.4: Ein elliptisches Hyperboloid. Seine mit eingezeichnete Striktionslinie ist keine ebene Kurve mehr.

also sollte eine Auftragung von $\tan^2 \frac{\alpha}{2}$ gegen 2φ eine harmonische Schwingung darstellen. Das könnte auch experimentell an einer geeigneten Gelenkfläche geschehen. Die Maxima und Minima liegen bei $\cos 2\varphi = \pm 1$ mit den Werten

$$\tan \frac{\alpha_+}{2} = \frac{b}{c} \quad \text{und} \quad \tan \frac{\alpha_-}{2} = \frac{a}{c} \quad ,$$

demnach lässt sich bei Kenntnis der extremalen Winkel und der Halbachsen der Ellipse der fehlende Parameter c auf zwei Weisen bestimmen.

8.3 Die Halbachsen

Der Krümmungsradius einer implizit gegebenen Funktion der Gleichung $F(x, y) = 0$ lautet allgemein

$$r = \frac{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}{2F_x F_y F_{xy} - F_y^2 F_{xx} - F_x^2 F_{yy}} \quad , \quad (8.3)$$

wobei die partiellen Ableitungen (mit Subskripten bezeichnet) am Kurvenpunkt auszuwerten sind. Der Krümmungsradius einer Ellipse $x^2/a^2 +$

$y^2/b^2 = 1$ im Punkt (x_0, y_0) lautet damit

$$r_0 = r(x_0, y_0) = a^2 b^2 \left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} \right)^{3/2},$$

und in den Scheiteln bei $(\pm a, 0)$ und $(0, \pm b)$ ergeben sich die extremalen Radien

$$r = \frac{b^2}{a} \quad \text{und} \quad R = \frac{a^2}{b}, \quad (8.4)$$

mit dem Verhältnis

$$\frac{R}{r} = \frac{a^2/b}{b^2/a} = \frac{a}{b}.$$

Aufgelöst nach den Halbachsen erhält man

$$a = \sqrt[3]{R^2 r} \quad \text{und} \quad b = \sqrt[3]{r^2 R}, \quad (8.5)$$

wodurch die Messung des maximalen Radius R und des minimalen r für die Bestimmung der Halbachsen ausreicht.

Zusammen mit den Verhältnissen a/c und b/c aus dem letzten Abschnitt können aus den Messdaten wieder Größen abgeleitet werden, die für ein elliptisches Hyperboloid verschwinden, etwa

$$\frac{\tan \frac{\alpha_-}{2}}{\tan \frac{\alpha_+}{2}} - \frac{R}{r} \approx 0.$$

Eine solche Größe kann für eine Stichprobe der interessierenden Gelenkflächen als Grundlage eines Testes auf das Vorliegen eines solchen Hyperboloides oder als Test auf die Konsistenz der Daten dienen.

8.4 Die Schnitthyperbeln

Von Interesse sind die Schnitthyperbeln zu den Punkten mit minimaler und maximaler Krümmung der Kehlellipse. Ihre Gleichungen lauten

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Mit Formel 8.3 berechnet man die Krümmungsradien allgemein

$$r(x_0, z_0) = \frac{a^4 c^4}{(c^4 x_0^2 + a^4 z_0^2)^{3/2}}$$

und in der yz -Ebene entsprechend mit b statt a . Im Nullpunkt ergibt sich

$$r_{y0} = \frac{c^2}{a} \quad \text{und} \quad r_{x0} = \frac{c^2}{b} \quad (8.6)$$

für Schnitte in x - und y -Richtung. Die Formeln entsprechen denen der Ellipse.

Die Asymptoten der Schnitthyperbeln sind gegeben durch

$$z_{y0} = \pm \frac{c}{a}x \quad \text{und} \quad z_{x0} = \pm \frac{c}{b}y \quad .$$

Kennt man also zusätzlich den etwa durch Fluchten am Modell bestimm-
baren Zwischenwinkel β der Asymptoten, so kann man mittels

$$\tan \frac{\beta_{y0}}{2} = \frac{c}{a} \quad \text{bzw.} \quad \tan \frac{\beta_{x0}}{2} = \frac{c}{b}$$

wieder einen messbaren Parameter finden, der die Gleichung der Hyperbel festlegt: Wegen

$$\frac{r_{y0}}{\tan \frac{\beta_{y0}}{2}} = \frac{c^2/a}{c/a} = a \quad \text{und} \quad \frac{\tan \frac{\beta_{y0}}{2}}{a} = c$$

und ebenso für b und c ist, zusammen mit den Ergebnissen der vorange-
gangenen Abschnitte, die Gleichung des Hyperboloides festgelegt. Hier
braucht man tatsächlich drei Parameter, da die Gleichung 8.1 bei Multi-
plikation mit einem Wert nicht ihre rechte Seite behält.

8.5 Beispiel: Das Humeroulnargelenk

Insbesondere am Ellenbogengelenk ist es interessant, dass die Existenz
zweier Scharen von Erzeugenden zusammen mit dem Kehlkreis (oder der
Kehlellipse) die Gelenkfläche als einschaliges Hyperboloid festlegt, also
dass die gegenüber dem Röhrenknochen „schiefe“ Anordnung der Kehllini-
e nicht auf eine Schraubenfläche hindeuten muss, sondern möglicherwei-
se eine Fehlinterpretation der nicht ebenen Striktionslinie darstellt. Die
Daten wurden von INA SCHELPER [33] in ihrer Dissertation erhoben.

An 15 Abformungen menschlicher Ellenbogengelenke wurden die Gelenk-
flächen des Humeroulnargelenkes als einschalige Rotationshyperbo-
loide zu beschreiben versucht. Dabei wäre die zum Oberarm gehörende

Trochlea humeri ein Voll-Hyperboloid und das zur Ulna gehörende proximale Ende der Ulna (=Elle) ein die Trochlea umschließender Hohl-Hyperboloid. Gemessen wurden die Radien der Kehlkreise und die Zwischenwinkel der Erzeugenden, welche den Kehlkreis einschließen. Die Messungen am Hohlkörper waren nur durch abformendes Überführen in eine Voll-Form zu bewerkstelligen. Es ergaben sich die Mittelwerte und Standardabweichungen

	Trochlea	Ulna
Radius	$9.0 \pm 0.9\text{mm}$	$9.3 \pm 0.9\text{mm}$
Winkel	$88.9 \pm 6.8^\circ$	$68.3 \pm 8.9^\circ$

Der Radius R der Schnittkrümmung senkrecht zum Kehlkreis wurde nicht gemessen. Bei einem Voll-Hyperboloid ist dieser Flächenschnitt konkav. Er kann mit (8.6) über

$$R = -\frac{c^2}{r} = -\frac{r^2 \cot^2 \frac{\alpha}{2}}{r} = -r \cot^2 \frac{\alpha}{2}$$

berechnet werden. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die gemessenen Winkel genau die Supplementwinkel $180^\circ - \alpha$ der in der Formel verwandten α 's sind.

Die Differenz der Radien von $0.27 \pm 0.58\text{mm}$ war ebenso wenig wie der Index (5.1) signifikant von Null verschieden. Die Differenz der Winkel von $20.6 \pm 6.4^\circ$ ist augenfällig und daher auch hoch signifikant von Null verschieden. Damit sind die Gelenkflächen insgesamt inkongruent, wesentlich verursacht durch die Winkel.

Es liegt nahe, diese mittelwertige Form zu visualisieren. Dabei wurde wieder versucht, die beiden Erzeugenden in Form eines Linienkontaktes im Übereinstimmung zu bringen. Die entstehenden Flächen durchdringen sich aber, vgl. Bild 8.5. Bei zwei Dritteln der Erwachsenen ist die Gelenkfläche der Incisura trochlearis der Ulna und mit ihr der Kehlkreis in proximale und distale knorpelige Bereiche geteilt.

Statistisch wurde die Möglichkeit des Zustandekommens eines Linienkontaktes mit dem zweiten Inkongruenzindex (5.2) überprüft. Er war mit $0.33 \pm 0.13 \text{ mm}^2$ hoch signifikant von Null verschieden. Im menschlichen Humeroulnargelenk ist demnach von der Natur kein Linienkontakt realisiert. Der Kontakt findet also abhängig von der Lastsituation, in zwei Kontaktpunkten statt. Diese mathematischen Punkte, die im Gelenkknorpel unter Last zu Bereichen werden, finden ihre Entsprechung

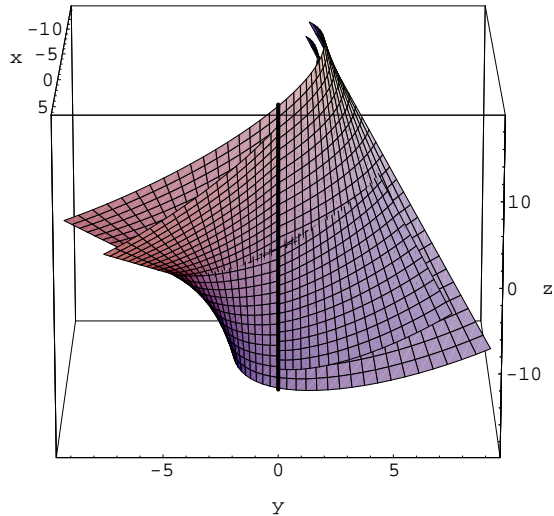


Abbildung 8.5: Das menschliche Humeroulnargelenk als Paar von Rotationshyperboloiden im Linienkontakt. Mit den gefundenen Abmessungen ist ein Linienkontakt materieller Körper nicht möglich, die Flächen durchdringen sich.

in der proximal-distal geteilten Gelenkfläche der Incisura trochlearis der Ulna.

Ferner ist die Übereinstimmung der Gelenkflächen mit einschaligen Hyperboloiden auf den inneren Bereich beschränkt. Die Abweichung ist am deutlichsten an ihren medialen und lateralen Begrenzungen. Diese nähern sich nämlich nicht, wie zu erwarten wäre, Kegeln mit geraden Schnitten an, sondern ballen sich zu kondylenartigen Enden mit innen konvexen und außen konkaven transversalen Schnitten. Es steht daher zu erwarten, dass die die Rotationsachse einschließenden Asymptotenwinkel im Gegensatz zu einem Torus unter- statt überschätzt werden. Für die obigen gemessenen Supplementwinkel gilt natürlich genau das Gegenteil.

8.6 Mehr zum Linienkontakt

In diesem Abschnitt soll die Möglichkeit des Zustandekommens eines Linienkontaktes zweier einschaliger Hyperboloide doch noch näher untersucht werden. Ferner soll der Beweis nachgetragen werden, dass der Inkongruenzindex (5.2) tatsächlich auch auf diese Flächenpaarung anwendbar ist. Naheliegend ist das schon, da er an dem hyperbolischen Paraboloid, der sattelförmigen Schmiegefläche zweiter Ordnung, in Abschnitt 7.6 abgeleitet wurde.

An Bild 8.5 sieht man, dass die Probleme beim Kontaktieren der Flächen schon in der Nähe der sehr eng beieinander liegenden Kehlkreise auftauchen. Die Drehung einer Fläche um die Kontaktlinie verbessert die Situation in einem Flächenteil, verschlechtert sie aber im anderen, vgl. Bild 8.6. Ein Drehung um die Flächennormale, wie sie in Abschnitt 7.6 noch zur Realisation eines Linienkontaktes führte, bringt hier lediglich die Erzeugenden auseinander. Diese früher erfolgreiche Operation versagt deshalb, weil die Differenzfläche (bezogen auf die Flächennormale im Kontaktpunkt) keine Fläche zweiter Ordnung mehr ist.

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass ein Linienkontakt zweier einschaliger Hyperboloide nur für ganz bestimmte Abmessungen der Flächenpaare stattfinden kann. Die gesuchte Bedingung wird wieder die Übereinstimmung der Gaußschen Krümmungen sein. Am Beispiel des Humeroulnargelenkes läuft das auf eine Veränderung mindestens einer der vier bestimmten Mittelwerte außerhalb der Streuungen hinaus. Damit sind die modifizierten Flächenpaarungen zwar im Hinblick auf das menschliche Ellenbogengelenk uninteressant, für einen künstlichen Gelenkersatz oder ein anderes Gelenk im Tierreich mag das wieder interessant sein. Die nur teilweise Belegung der Incisura trochlearis mit Knorpel könnte ferner eine Antwort der Natur auf dieses Problem sein.

Die Schnittkrümmungen im Kehlkreis und die senkrecht dazu sind genau die beiden Hauptkrümmungen. Setzt man also $\kappa_1 = -1/(r \cot^2 \frac{\alpha}{2})$ und $\kappa_2 = 1/r$ in den Satz von EULER ein, so erhält man

$$\kappa(\varphi) = -\frac{1}{r \cot^2 \frac{\alpha}{2}} \cos^2 \varphi + \frac{1}{r} \sin^2 \varphi \quad .$$

Für $\varphi = \frac{\alpha}{2}$ erhält man erwartungsgemäß

$$\kappa\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{1}{r} \tan^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{r} \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 0 \quad ,$$

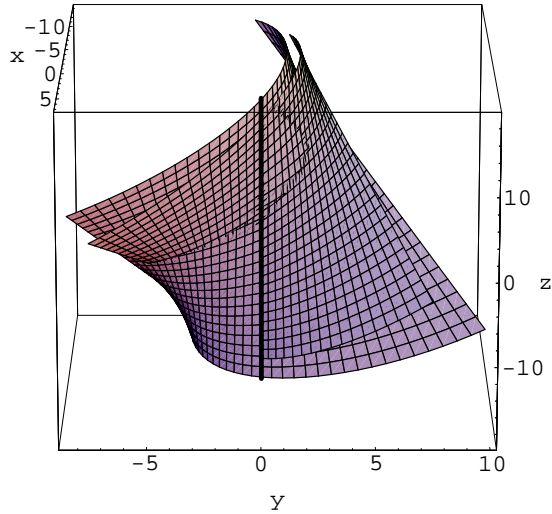


Abbildung 8.6: Ein um die Kontaktlinie gedrehtes Paar von einschaligen Rotationshyperboloiden. Die Drehung löst das Problem der Durchdringung beim Kontakt nicht.

und für $\varphi = \frac{\alpha}{2} + \psi$ erhält man nach einiger Rechnung

$$\kappa\left(\frac{\alpha}{2} + \psi\right) = \frac{\sin \psi \sin(\alpha + \psi)}{r \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \quad .$$

Dies gilt mit entsprechenden Krümmungen für beide Flächen.

Die Idee besteht nun darin, den selben Ausdruck für die innere und die äußere Fläche hinzuschreiben um die beiden Schnittkrümmungen in Abhängigkeit von ψ zu untersuchen. Um den Linienkontakt $\psi = 0$ herum entsteht eine Schmiegeberührung genau dann, wenn die ersten Ableitungen übereinstimmen, also wenn

$$\left. \frac{\partial \kappa_1}{\partial \psi} \right|_{\psi=0} = \left. \frac{\partial \kappa_2}{\partial \psi} \right|_{\psi=0} \quad .$$

Man erhält

$$\left. \frac{\partial \kappa_1}{\partial \psi} \right|_{\psi=0} = \frac{\sin(\alpha_1)}{r_1 \cos^2 \frac{\alpha_1}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_1}{2}}{r_1 \cos^2 \frac{\alpha_1}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha_1}{2}}{r_1 \cos \frac{\alpha_1}{2}} = \frac{2}{r_1 \cot \frac{\alpha_1}{2}} \quad .$$

Die Bedingung für einen Linienkontakt lautet demnach

$$r_1 \cot \frac{\alpha_1}{2} = r_2 \cot \frac{\alpha_2}{2} \quad . \quad (8.7)$$

Das ist genau die Wurzel des Produktes der Hauptradien

$$r \cdot R = r \cdot r \cot^2 \frac{\alpha}{2} \quad ;$$

die Bedingung fordert also das Übereinstimmen der Gaußschen Krümmungen der Flächen. Eine Berührung in noch höherer Ordnung benötigt mit $\alpha_1 = \alpha_2$ gleich das komplette Zusammenfallen beider Flächen.

Durch Modifikation genau einer der vier Größen erhält man je ein Paar von Hyperboloiden im Linienkontakt. Diese vier Modifikationen sind $r_1 = 6.4\text{mm}$ oder $\beta_1 = 70.1^\circ$ für die Trochlea sowie $r_2 = 13.0\text{mm}$ oder $\beta_2 = 87.0^\circ$ für die Ulna. Die Radien hätten also weiter auseinander und die Winkel näher beieinander liegen müssen. Da hier die Supplementwinkel angegeben sind, muss in (8.7) der Tangens verwandt werden. In Bild 8.7 ist ein solcher Linienkontakt dargestellt.

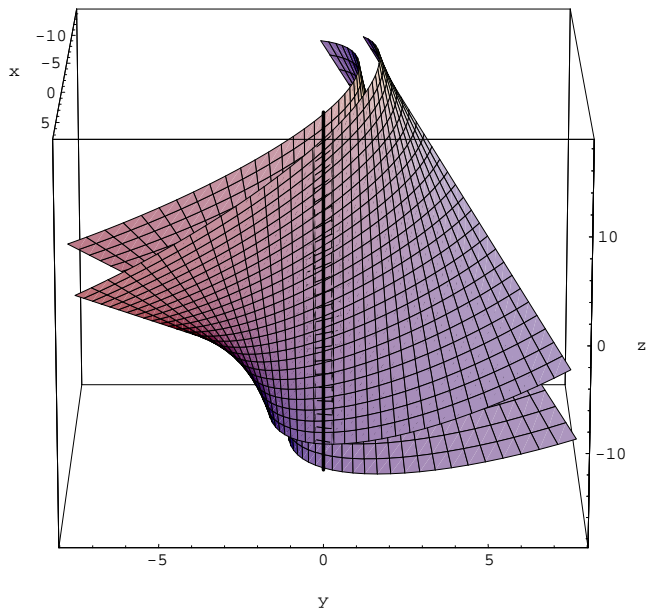


Abbildung 8.7: Ein Paar von einschaligen Rotationshyperboloiden im Linienkontakt. Die Kontaktbedingung wurde hier gegenüber den Mittelwerten für das menschliche Humeroulnargelenk durch Verkleinern des inneren Radius realisiert.

9 Ellipsoid und Torus

In der Anatomie werden Gelenke mit annähernd ellipsoidalen Gelenkflächen auch als Eigelente bezeichnet. Während der Torus durch zwei Radien beschrieben werden kann, braucht das Ellipsoid drei, entsprechend der Zahl der unabhängigen Halbachsen.

9.1 Das Ellipsoid

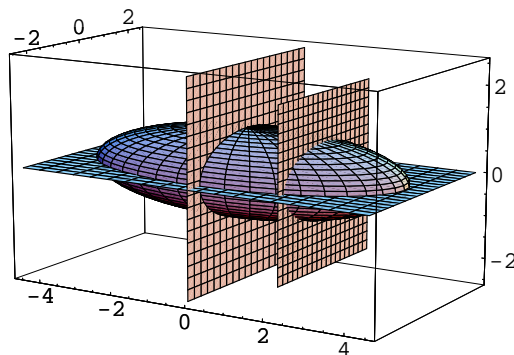


Abbildung 9.1: Ein Ellipsoid mit drei Schnittebenen. Zwei dieser Ebenen ergeben die beiden Schnittkrümmungen zu einem Punkt, die dritte liegt parallel zu einer der beiden.

Das Ellipsoid hat in Normalform die implizite Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

und die dazu gehörige Parameterdarstellung

$$\begin{aligned}x &= a \cos \varphi \sin \theta \\y &= b \sin \varphi \sin \theta \\z &= c \cos \theta \quad .\end{aligned}$$

Die Schnitte eines Ellipsoids mit Ebenen sind Ellipsen. Die drei hier interessierenden Schnitte sollen auf einer Hälfte des Ellipsoids sein, also etwa auf dem vorderen Teil aus Abb. 9.1, damit sie einer Messung zugänglich sind. Die drei Schnittebenen lauten hier $z = 0$, $x = 0$ und $x = d$. Damit sind die Gleichungen der Schnittellipsen

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 &= 1 \\ \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 &= 1 \\ \left(\frac{d}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 &= 1 \quad .\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung lässt sich umformen zu

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 - \left(\frac{d}{a}\right)^2 ,$$

was mit

$$\frac{y^2}{b^2 \left(1 - \left(\frac{d}{a}\right)^2\right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \left(\frac{d}{a}\right)^2\right)} = 1$$

auf die Form einer Ellipsengleichung gebracht werden kann. Bei der Formel (8.4) für die Krümmungen im Scheitel einer Ellipse entscheiden Zähler und Nenner über die Schnittebene und der Nenner über die Koordinate des Scheitels. Es ergeben sich also die Schnittkrümmungen

$$\begin{aligned}r_1 &= \frac{a^2}{b} \\ r_2 &= \frac{c^2}{b} \quad \text{und} \\ r_3 &= \frac{c^2 \left(1 - \left(\frac{d}{a}\right)^2\right)}{b \sqrt{1 - \left(\frac{d}{a}\right)^2}} = \frac{c^2}{b} \sqrt{1 - \left(\frac{d}{a}\right)^2} \quad .\end{aligned}$$

Bei Kenntnis von d kann so aus r_2 und r_3 der Parameter a zu

$$a = \frac{d}{\sqrt{1 - \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2}}$$

bestimmt werden und mit ihm aus r_1 weiter b und aus r_2 oder r_3 schließlich c . Es ist also zur Bestimmung der Halbachsen eines Ellipsoiden nicht die Kenntnis aller Schnitte an den Ecken eines Oktanten nötig. Es genügen, in anatomischer Ausdrucksweise, ein Sagittal- und Transversalzusammen mit einem Parasagittalschnitt.

9.1.1 Beispiel: Das Fingergrundgelenk

An fünf weiblichen menschlichen Präparaten im Alter von 70 bis 85 Jahren wurden von CLAUDIA ZIEHN [38] an den Grundgelenken der Finger II bis V der rechten und linken Hände die Schnittkrümmungen gemessen.

Für die auf den Mittelhandknochen befindlichen Gelenkköpfchen ergab sich im sagittalen Schnitt im Mittel eine Kontur mit Radius $R_s = 6.9 \pm 0.9\text{mm}$ in distaler, und $R_v = 5.8 \pm 0.9\text{mm}$ in volarer Richtung. Ein einfaches und in den Krümmungen stetiges Modell für eine solche Kontur ist eine Ellipse. Ein dritter Radius, dorsal gelegen, spielt für die Gelenkfunktion keine direkte Rolle und wird daher nicht berücksichtigt. Transversal ergab sich ein Radius von $R_t = 7.3 \pm 1.1\text{mm}$. Hier ist ein Ellipsoid das angemessene Modell.

Für die an der proximalen Phalanx befindliche Gelenkpfanne ergaben sich Radien von sagittal $10.3 \pm 3.3\text{mm}$ und transversal $8.9 \pm 1.1\text{mm}$. Hier ist der dritte Radius noch frei. Es kann beispielsweise Rotationssymmetrie in der Funktionsebene angenommen werden.

Aus den beiden Radien des Sagittalschnittes des Gelenkkopfes ergeben sich bei zu Grunde Legung des Ellipsoiden als einfachstes Modell mit der Gleichung (8.5) die Halbachsen $c = \sqrt[3]{R_s^2 R_v} = 6.5\text{mm}$ in volarer Richtung und $b = \sqrt[3]{R_v^2 R_s} = 6.1\text{mm}$ in distaler Richtung. Der in Richtung der Hauptfunktionsnormale gelegene Abschnitt ergibt sich mittels $R_t = b^2/a$ zu $b = \sqrt{R_t a} = 6.7\text{mm}$. Insgesamt ist der Gelenkkopf doch sehr kugelnah. Für die Pfanne ergeben sich wegen der Annahme der Rotationssymmetrie in x - und z -Richtung die gleichen Halbachsen von 10.3mm . Der medial gerichtete Abschnitt ergibt sich wie eben zu 9.6mm . Kopf und Pfanne sind in Abb. 9.2 abgebildet.

Je nach Beugezustand ergeben sich sagittal zwei Inkongruenzindizes, nämlich $\frac{10.3-6.9}{10.3+6.9} = 0.198$ in distaler Kontaktposition und $\frac{10.3-5.8}{10.3+5.8} = 0.280$ in volarer Position. Transversal ergibt sich der insgesamt geringste Inkongruenzindex von $\frac{8.9-7.3}{8.9+7.3} = 0.099$.

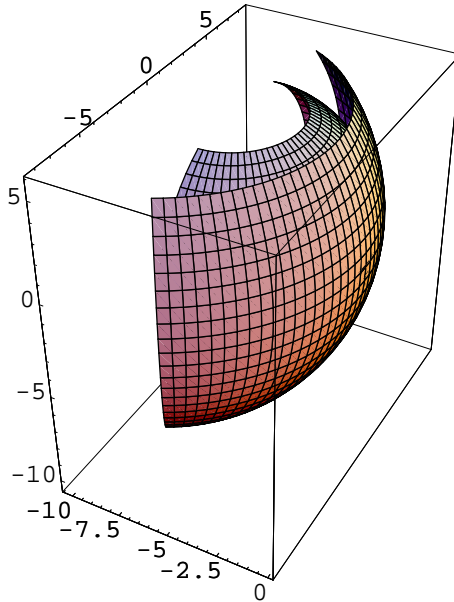


Abbildung 9.2: Das gemittelte Fingergrundgelenk in Ansicht von distal(=x)-dorsal(=z). Die Inkongruenz fällt deutlich ins Auge.

9.2 Der Torus

Der Kreistorus ist ein Rotationskörper, dessen Abmessungen durch nur zwei Radien beschrieben werden.

Es werde das Dreieck $\triangle OMP$ der Abbildung 9.3 betrachtet. Sei φ der Winkel mit Scheitel in M . Dann gilt nach dem Kosinussatz

$$|OP|^2 = |OM|^2 + |MP|^2 - 2|OM||MP| \cos \varphi$$

also ausgedrückt mit den bekannten Längen

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi = r^2 + 2R(R - r \cos \varphi) - R^2 \quad .$$

Für die Radialkomponente $|OQ|$ des Punktes P gilt $|OQ| = \sqrt{x^2 + y^2} = R - r \cos \varphi$. Damit folgt also zunächst

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + 2R\sqrt{x^2 + y^2} - R^2 \quad ,$$

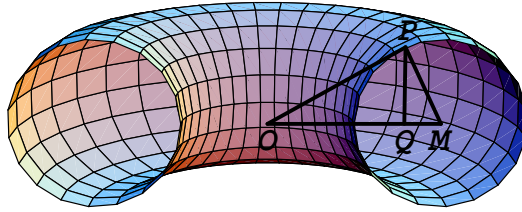


Abbildung 9.3: Der radial geschnittene Kreistorus. $O = (0, 0, 0)$ ist der Gesamtmittelpunkt des Torus und $P = (x, y, z)$ ein allgemeiner Punkt auf dem Torus, durch welchen die Schnitt Ebene verläuft. M ist ein Mittelpunkt des erzeugenden Kreises und Q der Fußpunkt des Lotes von P auf die Strecke OM . Die Senkrechte sei die z -Achse. Die bekannten Längen sind $|OM| = R$ und $|MP| = r$.

und nach Isolieren und Quadrieren der Wurzel folgt schließlich die algebraische Gleichung des Torus in den Koordinatenachsen

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2) \quad . \quad (9.1)$$

Die Parameterdarstellung des Torus ist einfach, da er ein Rotationskörper ist. Sie lautet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta (R - r \cos \varphi) \\ \sin \vartheta (R - r \cos \varphi) \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \quad ,$$

wobei ϑ der Winkel der erzeugenden Drehung ist. Diese Parameterdarstellung kann durch Einsetzen in die Gleichung (9.1) verifiziert werden.

Nun soll noch die Gleichung für die allgemeine Lage des Torus beschrieben werden. Sei \mathbf{m} der Ortsvektor des Mittelpunktes O des Torus, \mathbf{x} der des Punktes P und \mathbf{e} der Richtungseinheitsvektor der Torusachse. Unter Benutzung der Projektoren

$$\mathbf{P}_e^{\parallel} = \mathbf{e}\mathbf{e}^T \quad \text{und} \quad \mathbf{P}_e^{\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{e}\mathbf{e}^T$$

erhält man für das Dreieck $\triangle PQM$

$$|PQ| = |\mathbf{P}_e^{\perp}(\mathbf{x} - \mathbf{m})| \quad \text{und} \quad |QM| = R - |\mathbf{P}_e^{\parallel}(\mathbf{x} - \mathbf{m})| \quad .$$

Setzt man das ein in $r^2 = |MP|^2 = |PQ|^2 + |QM|^2$, so erhält man nach Ausmultiplizieren wegen $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$

$$r = (\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \mathbf{P}^{\parallel} (\mathbf{x} - \mathbf{m}) + R^2 - 2R|\mathbf{P}^{\perp}(\mathbf{x} - \mathbf{m})| + (\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \mathbf{P}^{\perp} (\mathbf{x} - \mathbf{m})$$

und mit $\mathbf{P}^{\parallel} + \mathbf{P}^{\perp} = \mathbf{I}$ nach Umsortieren

$$R^2 - r^2 + (\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 = 2R|\mathbf{P}^{\perp}(\mathbf{x} - \mathbf{m})| \quad .$$

Durch Quadrieren erhält man schließlich die gewünschte vektoriell geschriebene algebraische Gleichung vierten Grades

$$\begin{aligned} (R^2 - r^2 + (\mathbf{x} - \mathbf{m})^2)^2 &= 4R^2(\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \mathbf{P}^{\perp} (\mathbf{x} - \mathbf{m}) \\ &= 4R^2 \left((\mathbf{x} - \mathbf{m})^2 - \left[\mathbf{e}^T (\mathbf{x} - \mathbf{m}) \right]^2 \right) \quad . \end{aligned}$$

9.2.1 Beispiel: Das Femorotibialgelenk

Hier soll exemplarisch die räumliche Anordnung zweier walzenförmiger Gelenkflächen anhand der beiden Femurkondylen vorgeführt werden. Es gäbe andere Beispiele für bikondyläre Gelenke wie z.B. die beiden distalen Fingergelenke [1]. Die Form der Femurkondylen ist kompliziert. So stellen etwa HISS und SCHWERBROCK [14] für den sagittalen Schnitt (von durch andere Kriterien als die Funktion festgelegten Flächen) mehrere historisch begründete Modelle wertungsfrei gegenüber: Kreis, zwei Kreise, Ellipse, Archimedische Spirale, Logarithmische Spirale, Kardioide. Dabei werden sowohl die räumliche Anordnung der Walzen als auch der Übergang zum Femoropatellargelenk außer Acht gelassen. Ich möchte mich den komplexeren Varianten zur geometrischen Modellbildung nicht anschließen, sondern mich auf den posterioren Teil der Gelenkfläche konzentrieren, dessen Sagittalschnitt in guter Näherung als kreisförmig angesehen werden kann. Funktionell korrespondiert dieser Kondylenabschnitt zur Kniebeuge. Der sagittale Radius der Femurkondylen kann nach HISS und SCHWERBROCK zu 19.8mm angenommen werden, die der frontalen Radien zu 22.0mm medial und 17.5 mm lateral. Die räumlichen geometrischen Modelle sind damit Kreistori, welche allerdings recht kugelnah sind.

Es wurden ferner an 19 Femora die Winkel der Höhenkreise der Tori (senkrecht zur Achse der vermuteten Rotationssymmetrie) gegenüber der Längsrichtung des Femurs sowohl in der Horizontalebene als auch in der Frontalebene durch visuelle Peilung bestimmt. Die Daten basieren

auf unveröffentlichten Untersuchungen von MATHIAS POPPE. Aus diesen Winkeln ist nun die Rotationsachse der Tori bzw. deren Äquator zu bestimmen. Die Koordinatenrichtungen seien x : anterior, y : proximal und z : medial (für ein rechtes Knie). Der Lösungsansatz besteht darin, dass der Tangens eines solchen Winkels gleich dem Verhältnis zweier Achsenabschnitte der Normalenebene (=Äquator) in Achsenabschnittform $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ ist. Der Winkel α etwa schneidet die anteriore und laterale Koordinatenachsen (x und $-z$); er legt daher das Verhältnis c/a fest. Die Überlegung für die anderen Winkel verläuft analog, vgl. Abb. 9.4.

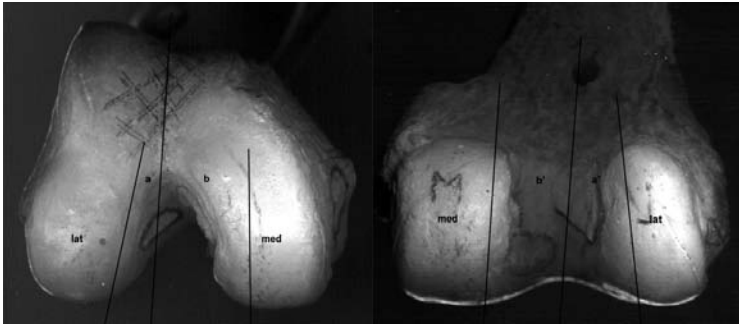


Abbildung 9.4: Der Versuch, am realen Knie Winkel für die Kondylen festzulegen. Im Bild ersetzen a und b die Bezeichnungen für die Winkel α und β .

Die Gleichung der Äquatorebene ergibt sich nach Multiplikation mit c :

$$0 = \frac{c}{a}x + \frac{c}{b}y + z - c = \tan \alpha x + \tan \alpha' y + z - c = (\tan \alpha, \tan \alpha', 1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - c$$

und analog für die mediale Seite. Der Normalenvektor folgt anschließend durch Normierung des Vektors $(\tan \alpha, \tan \alpha', 1)$.

Die Messung ergab die folgenden vier Winkel mit den Zuordnungen:

Seite	Projektion	Winkel	Name	Tangens
lateral	horizontal	$9.6 \pm 9.4^\circ$	α	c/a
lateral	frontal	$15.3 \pm 8.2^\circ$	α'	c/b
medial	horizontal	$9.0 \pm 9.1^\circ$	β	c'/a'
medial	frontal	$-0.8 \pm 5.1^\circ$	β'	c'/b'

Die entsprechenden Bilder finden sich in Abb. 9.5. Wegen den vergleichbaren Sagittal- und Frontalradien sind beide Tori nur wenig von Kugelausschnitten verschieden. Ferner wurden die Mittelpunkte der Tori anhand weniger Modelle geschätzt.

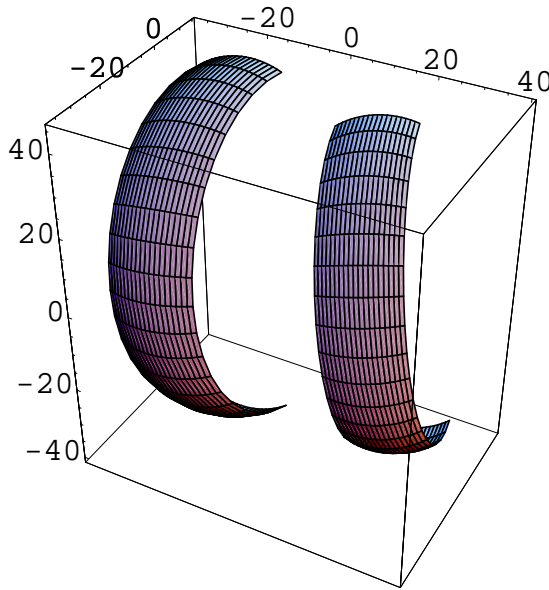


Abbildung 9.5: Zwei gegeneinander verschobene und gedrehte Rotations-tori als Modell der Femurkondylen. Die Ansicht ist von posterior, oben ist proximal.

Um bei so komplizierten Gelenken saubere Aussagen über deren Flächen zu erlangen ist wohl der Weg über eine mittels eines 3D-Scanners erstellte Punktwolke, vgl. etwa Abb. 9.6 der sinnvollere. An Ausschnitte dieser Punktemenge können dann beliebige Gleichungen angepasst werden, vorzugsweise in der lageunabhängigen impliziten Form ihrer Gleichungen. Der Vorteil ist dann das gemeinsame Koordinatensystem aller Flächenstücke. Dieses Vorgehen ist aber nicht mehr Gegenstand dieser Abhandlung.

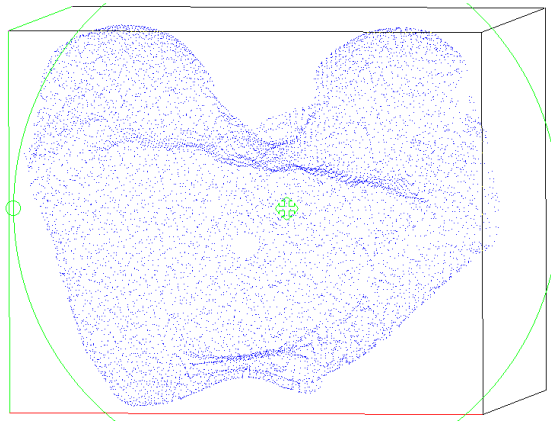


Abbildung 9.6: Eine Punktwolke eines Femurs. Die Ansicht ist von distal, oben ist posterior. Das verwendete Programm ist POMOS.

10 Anhang

10.1 Ein Vorschlag zur Benennung morphometrischer Variablen

Der folgende Versuch Variablennamen zu standardisieren, entstand aus der Notwendigkeit, Eigenschaften von Gelenkflächen über E-Mail mitzuteilen und auszutauschen. Es werden jeweils die fett hervorgehobenen Großbuchstaben der verwendeten Begriffe zu Kürzeln zusammengesetzt. Die Listen können bei Bedarf ergänzt werden, die Buchstaben sollten dabei aber eindeutig bleiben. Das Ganze ist weniger dogmatisch gemeint als es aussieht; vielmehr soll es als Anregung dienen, sich gründlich über die Benennung von Variablen Gedanken zu machen.

1. Erster Buchstabe: Art der Größe / des Wertes
 - **A**bstand, **D**istanz, **L**änge
 - **R**adius, **K**rümmung
 - **W**inkel
 - **X**-Koordinate, ebenso **Y** und **Z**
 - **F**läche
 - **B**ogenlänge
2. Zweite(r) Buchstabe(ngruppe): Hinweis(e) auf die geometrische Konstruktion der Größe
 - **G**erade
 - **D**reieck
 - **P**olygon
 - **K**reis, **M**ittelpunkt
 - **U**mriss

- Ske**L**ett¹
 - **S**chnittpunkt, **M**ittelpunkt, **F**ußpunkt
 - **W**endepunkt, **E**xtrernalpunkt (Krümmungen)
 - **T**angente, **N**ormale
3. Dritter Buchstabe: zur Gelenkfläche gehörender Knochen
Femur, Tibia, **P**atella, Fi**B**ula, T**A**lus, ...
 4. Vierter Buchstabe: zur Gegengelenkfläche gehörender Knochen
F, T, P, ...
 5. Fünfter Buchstabe: Spezifizierung des Flächenteils
 - **Z**entral
 - **L**ateral, **M**edial
 - **A**nterior, **P**osterior
 - **D**istal, pro**X**imal
 - **K**ranial, ca**U**dal

Da sich für bestimmte Gelenke spezielle Bezeichnungen durchgesetzt haben (wie pal**M**ar, plan**T**ar, dor**S**al, **V**entral,...), kann man diese bei Bedarf und unter Berücksichtigung der jeweiligen Gegensatzpaare hinzunehmen.

6. Sechster Buchstabe: Orientierung der Schnittebene im aufrechten Stand bzw. gelenkbezüglich (oder Achse normal dazu)
 - **M**edial
 - **S**agittal (auch paramedial genannt)
 - **F**rontal (auch koronal genannt)
 - **T**ransversal (auch horizontal genannt)

Vorsicht: Die Bezeichnungen der Achsen normal zu diesen Ebenen dazu lauten ähnlich und sollten nicht verwechselt werden. Zur medialen Ebene gehört die transversale Achse, zur frontalen Ebene die sagittale Normale und zur transversalen Ebene die longitudinale Achse.

¹Das *Skelett* eines Umrisses ist die Menge aller Punkte, welche keinen eindeutigen nächsten Nachbarn besitzen. Es kann mittels größter eingeschriebener Kreise oder Kugeln bestimmt werden. Üblicherweise ist es eine Linie mit Verzweigungen.

7. Siebter Buchstabe: Mathematische Transformation

- **S**umme, **D**ifferenz
- **V**erhältnis
- **L**ogarithmus
- **M**ittelwert, **S**tandard**A**bweichung
- **B**ox-Cox

Falls ein Großbuchstabe bei bestem Willen nicht mehr ausreicht, nehme man einfach noch Kleinbuchstaben hinzu. Die Großbuchstaben werden dann zu Feldseparatoren. Wurden mehrere aufeinander folgende parallele Schnitte durchgeführt, so können Nummern mit hinzugenommen werden, etwa (M2, M1, Z, L1, L2). Mit Klammern und dem Unterstrich als weiteren Separatoren sollte sich dann der Rest beschreiben lassen.

Das Verfahren fordert Vereinfachungen geradezu heraus: Sind das Gelenk und seine Bewegungs- bzw. Schnittebene klar, so können die Buchstaben 4 (Gegengelenk) und 6 (Schnittebene) weggelassen werden. Ist bereits ein Viergelenk konstruiert, so genügt ein Buchstabe zur Abgabe seiner Längen. Unter Verabredung einer Konvention, wo die Schnitte beginnen und enden, reicht eine einfache Durchnummerierung der Schnitte aus. Ist etwa ein Radius als Wert spezifiziert, so kann es sich nur um einen Kreis handeln.

Beispiele:

- Bei den Größen F, T, L und M handelt es sich um die Viergelenkparameter der Radienkonstruktion des Kniegelenks. Genauer:

$$F = D(MFTLS, MFTMS)$$

$$T = D(MTFLS, MTFMS)$$

$$L = D(MFTLS, MTFLS)$$

$$M = D(MFTMS, MTFMS)$$

Oder kürzer $F = DMFT(LM)S = DMFT_S$ mit weniger als 8 Zeichen.

- Mit RFM und RFL sind die Sagittalradien der Femurkondylen gemeint, also RKFTMS und RKFTLS.

In der Schreibweise als Funktionen mit Argumenten in Klammern sollte der siebte Buchstabe mit der angewandten Transformation an erster Stelle auftauchen, zum Lesen ist er hinten angenehmer.

- In quasi genormten Anwendungen wie der Fernröntgenanalyse in der Kephalmetrie sollten die üblichen Bezeichnungen wie

$S = \text{Sella}, N = \text{Nasion}, A = \text{A-Punkt}, B = \text{B-Punkt}, \dots$

beibehalten werden. Aus programmiertechnischen Gründen und zum Kommunizieren mit fachfremdem Personal ist es hilfreich, die Konstruktion explizit anzugeben. Also etwa ob ein Winkel durch drei Punkte (mit dem Scheitel in der Mitte) definiert ist, oder durch zwei Geraden, die ihrerseits wieder durch je zwei Punkte definiert sind. Am Beispiel:

$$SNA = W(S,N,A) = W(G(N,S),G(N,A))$$

Es genügt, eine Konvention über den Scheitel des Winkels und den Umlaufsinn festzulegen. Diese kann aber mit den gängigen Konventionen kollidieren. So haben die Winkel SNA , SNB , BSN und ASN mathematisch positiven Umlaufsinn (gegen den Uhrzeiger), hingegen der $ANB := SNA - SNB$ einen umgekehrten.

Literaturverzeichnis

- [1] ALBUS G: *Die Krümmungsmorphologie der Interphalangealgelenke und ihre Bedeutung für die Biomechanik*, Göttingen, Univ., Diss., 2004
- [2] BOOKSTEIN FL: *Morphometric tools for landmark data: geometry and biology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997
- [3] BOUSSINESQ J: *Application des potentials a l'étude de l'équilibre et due mouvement des solides elastique*, Gauthier-Villars, Paris, 1885
- [4] DOWSON D, HIGGINSON GR: *Elasto-hydrodynamic lubrication* , International series on materials science and technology 23, Pergamon Press, Oxford u.a. 1977
- [5] FICK A: *Die Gelenke mit sattelförmigen Flächen*, Z. rat. Med. N.F. 4, 314-321, 1854
- [6] FICK R: *Anatomie der Gelenke*, Handbuch der Anatomie des Menschen (hrsg. von Karl von Bardeleben), Bd. 2: Bänder, Gelenke und Muskeln, Abt. 1: Handbuch Anatomie und Mechanik der Gelenke unter Berücksichtigung der bewegenden Muskeln, Teil 1; Fischer, Jena 1904
- [7] FISCHER O: *Kinematik organischer Gelenke*, Friedrich Vieweg und Sohn; Braunschweig 1907
- [8] FLÜGEL B, GREIL H, SOMMER K: *Anthropologischer Atlas*, Edition Wötzel; Frankfurt/Main 1986
- [9] HARTUNG J: *Statistik*, R. Oldenbourg Verlag; München Wien
- [10] HARTUNG J, ELPELT B: *Multivariate Statistik*, R. Oldenbourg Verlag; München Wien

- [11] HERTZ H: *Über die Berührung fester elastischer Körper*. Journal für die reine und angewandte Mechanik (Crelles Journal), 92, S. 156-171, 1881
- [12] HULTCRANTZ JW: *Über die Spaltrichtungen der Gelenkknorpel*, Verh. Anat. Ges 12, 248-256, 1898
- [13] GRAY A: *Differentialgeometrie*, Spektrum Akademischer Verlag; Heidelberg, Berlin, Oxford 1994
- [14] HISS E, SCHWERBROCK B: *Untersuchungen zur räumlichen Form der Femurkondylen*, Z. Orthop. 118, 369-404, 1980
- [15] HOSCHEK J: *Zur Ermittlung von Hüllflächen in der räumlichen Kinematik*, Monatsh. Math. 69, 393-406 (1965)
- [16] HOSCHEK J, LASSER D: *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*, B. G. Teubner; Stuttgart 1992
- [17] HOSCHEK J, WEBER U: *Mathematisch-kinematische Methoden in der Gelenkendoprothetik*, Z. Orthop. 122 (1984) 341-348
- [18] HOSCHEK J, WEBER U: *Geometrische Modellbildung der menschlichen Kniebewegung*, in: Stephanidis, N K (Hrsg.): Proc. Congr. Geometry, Thessaloniki, 67-75 (1987)
- [19] KIRSCH S: *Messungen am menschlichen Femoropatellargelenk*, Schriftliche Mitteilung (1997)
- [20] LAUGWITZ D: *Differentialgeometrie*, B. G. Teubner, Stuttgart 1968, 2. Auflage
- [21] LUCK K, MODLER KH: *Getriebetechnik: Analyse, Synthese, Optimierung*. Springer-Verlag; Wien, New York 1990
- [22] MEYER P: *Hüllflächen und assoziierte Kurven in der räumlichen Kinematik*, Abh. Braunsch. Wiss. Ges 42, 43-47 (1990)
- [23] MACCONAILL MA: *The Movements of Bones and Joints 5: The Significance of Shape*, The Journal of Bone and Joint Surgery, Vol 35, No 2, May 1953
- [24] MOW VC, LAI WM: *Recent Developments in Synovial Joint Mechanics*, SIAM Review, Vol 22, No 3, 275-317, 1980

- [25] MÜLLER, HR: *Zur Ermittlung der Hüllflächen in der räumlichen Kinematik*, Monatsh. Math. 63, 231-240 (1959)
- [26] MÜLLER I: *Thermodynamik*, Bertelsmann Universitätsverlag, Düsseldorf 1973
- [27] NÄGERL H: *Biomechanische Prinzipien in Diarthrosen und Synarthrosen*, Göttingen, Univ., Habil.-Schr. 1990
- [28] NÄGERL H, KUBEIN-MEESENBURG D, COTTA H, FANGHÄNEL J: *Biomechanische Prinzipien in Diarthrosen und Synarthrosen. Teil III: Mechanik des Tibiofemoralgelenkes und die Rolle der Kreuzbänder*, Z. Orthop. 131 (1993) 385-396
- [29] PALACIOS J: *Dimensional Analysis*; MacMillan & Co Ltd, London; St Martin's Press, New York (1964)
- [30] PERPLIES R: *Die Krümmungsmorphologie der drei Gelenke des Daumens*, Göttingen, Univ., Diss., 2007
- [31] REULEAUX F: *Lehrbuch der Kinematik Bd. 1 - Theoretische Kinematik* Vieweg und Sohn; Braunschweig 1875
- [32] REULEAUX F: *Lehrbuch der Kinematik Bd. 2 - Die praktischen Beziehungen der Kinematik zu Geometrie und Mechanik*, Vieweg und Sohn; Braunschweig 1900
- [33] SCHELPER I: *Über die Morphologie und Funktion der Articulationes humeroradialis und humeroulnaris*, Göttingen, Univ., Diss., 1998
- [34] SOMMERFELD A: *Zur hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung.*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 50, S. 97-155, 1904
- [35] STRASSER H: *Lehrbuch der Muskel- und Gelenkmechanik*, (4 Bde.) Berlin, Springer, 1908-1917
- [36] WALMSLEY T: *The Articular Mechanism of the Diarthroses*, Journal of Bone and Joint Surgery, **10** pp40, 1928
- [37] WÜNSCH V: *Differentialgeometrie: Kurven und Flächen*, Stuttgart u.a., Teubner, 1997

- [38] ZIEHN C: *Die Gelenkflächenmorphologie der Articulationes metacarpophalangeae II-V unter Berücksichtigung funktioneller Aspekte*, Göttingen, Univ., Diss., 1996

Die Beschreibung von Gelenkflächen als Flächen mit hoher Symmetrie hat Tradition in der Anatomie. Der vorliegende Forschungsbericht stellt Untersuchungen zur Morphometrie menschlicher Gelenke vor. Zunächst werden Messmethoden betrachtet. Diese sind betont einfach gehalten, was zur Nachahmung auffordern soll. Die wichtigste Messgröße ist die Schnittkrümmung der Gelenkoberfläche. Dabei ist die geschickte Wahl mehrerer Schnittebenen von großer Wichtigkeit. Zusammen mit einer geometrischen Modellbildung kann dann aus diesen Krümmungen eine Gelenkfläche mathematisch beschrieben werden.

Aus den betrachteten Beispielen ergibt sich, dass Fläche und Gegenfläche praktisch aller Gelenke unterschiedliche Krümmungen haben. Die Gelenkflächen sind also inkongruent. Die mathematische Beschreibung der kinematischen Funktion solcher Gelenke muss daher über die eines Scharnieres mit nur einem Freiheitsgrad hinausgehen. Die Konsequenzen sind aber auch praktischer Natur. Um eine Endoprothese zu entwickeln, die mit dem möglichst zu erhaltenden Bandapparat in gewohnter Weise zusammenwirkt, sind die beobachteten Freiheitsgrade und damit die Inkongruenz der Gelenkflächen einzuarbeiten.