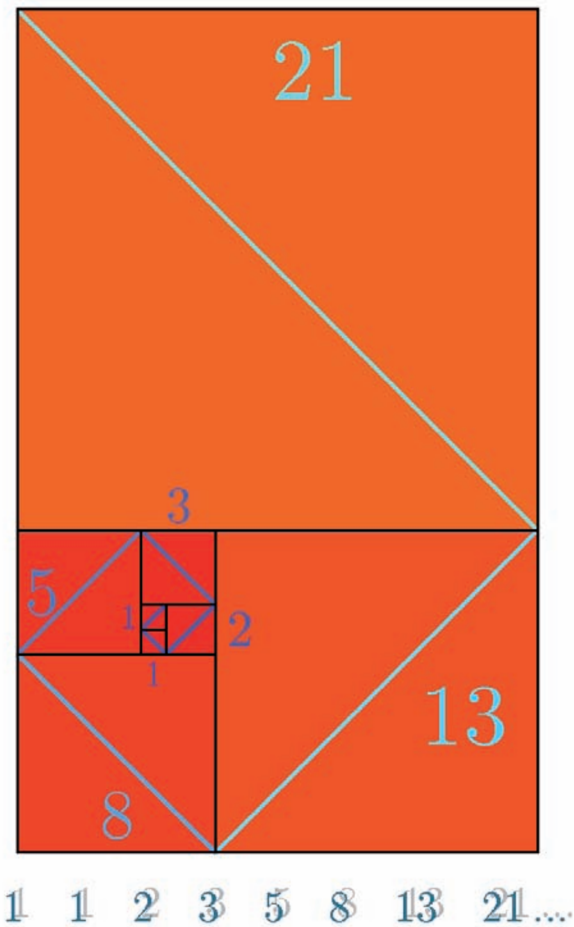
Ina Kersten

Mathematische Grundlagen in Biologie und Geowissenschaften Kurs 2014/2015

mit Anwendungsaufgaben von Carolin Wagner
und Wiederholungsaufgaben von Rasmus Bentmann



Universitätsdrucke Göttingen

Ina Kersten

Mathematische Grundlagen in Biologie und Geowissenschaften
Kurs 2014/2015

erschienen in der Reihe der Universitätsdrucke
im Universitätsverlag Göttingen 2015

Ina Kersten

Mathematische Grundlagen in Biologie und Geowissenschaften Kurs 2014/2015

mit Anwendungsaufgaben
von Carolin Wagner
und Wiederholungsaufgaben
von Rasmus Bentmann

Universitätsverlag Göttingen
2015

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

Anschrift der Autorin
Ina Kersten
Mathematisches Institut
der Georg-August-Universität Göttingen
Bunsenstraße 3-5
37073 Göttingen
kersten@uni-math.gwdg.de

Satz und Layout: Ina Kersten auf Basis der TeX-Bearbeitung 2004 von Ben Müller und Christian Kierdorf
Umschlaggestaltung: Petra Lepschy
Titelabbildung: Julia Bienert
Grafiken und die Bilder auf S. 96: Ben Müller, Christian Kierdorf aus Universitätsdruck und Vorlesungspräsentation 2004
Farbige Grafiken und Bilder: Julia Bienert

http://univerlag.uni-goettingen.de
ISBN: 978-3-86395-227-3

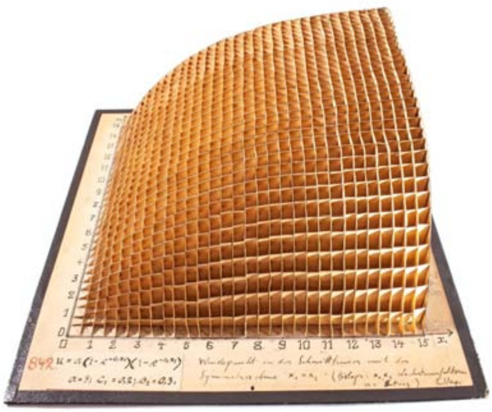
Vorwort

Dieser Universitätsdruck richtet sich an Studierende der Biologie und Geowissenschaften des 1. Semesters. Er ist eine neue überarbeitete Auflage des gleichnamigen Kurses 2004/05, dessen druckfertige Version damals von Ben Müller und Christian Kierdorf erstellt worden war. Die Neuauflage ist vorlesungsbegleitend im Wintersemester 2014/15 entstanden. Da es sich nunmehr nur noch um einen einsemestrigen Kurs mit 2 Stunden Vorlesung und 2 Stunden Übungen handelt, sind die dadurch jetzt nicht mehr behandelten Teile mit dem Zusatz „ergänzend“ versehen worden.

Der vorliegende Band hat einen größeren Umfang, weil etliche Abbildungen und noch 50 Übungsaufgaben hinzugekommen sind. Die Ergebnisse aller Aufgaben werden am Schluss angegeben.

Ein großer Dank geht an Ben Müller und Christian Kierdorf, auf deren TEX-Vorlage der Druck weiterhin basiert, an Carolin Wagner und Rasmus Bentmann für die neuen Anwendungs- und Wiederholungsaufgaben, Julia Bienert, die die schönen bunten Bilder und etliche TikZ-Grafiken erstellt hat, Thorsten Groth für Korrekturlesen, an das Geowissenschaftliche Zentrum der Universität Göttingen für das Foto des Nautilusgehäuses, an Sven Wiese für die Fotos der Modelle 215 und 842 aus der Göttinger Sammlung mathematischer Modelle und Instrumente und an Martin Liebetruth vom Göttinger Digitalisierungszentrum für die Überarbeitung der digitalen Fassung der Cramerschen Regel von 1750.

Juli 2015 *Ina Kersten*



Papiermodell der Funktion $u = \alpha(1 - e^{-c_1 x_1})(1 - e^{-c_2 x_2})$,
$\alpha = 8, c_1 = 0{,}2,\ c_2 = 0{,}3$ (Modell 842, Foto: Sven Wiese)

Inhaltsverzeichnis

Vorkurs

Die Mathematik zeichnet sich durch ihre *Genauigkeit* aus. Man muss stets ganz genau hinsehen, ob es sich zum Beispiel gerade um eine Zahl oder eine Funktion, um eine Konstante oder eine Variable, um eine Potenz wie a^n oder ein Vielfaches wie na handelt. Auch muss man erkennen können, ob sich ein Ausdruck ändert, wenn darin einzelne Buchstaben durch andere ersetzt sind. Zum Beispiel gilt:

$$\int f(x)\,dx = \int f(t)\,dt \quad \text{aber} \quad \int f(x)\,dx \neq \int f(x)\,dt\,.$$

In diesem Vorkurs geht es hauptsächlich um Kalkülfertigkeiten, die in der Schule erworben wurden. Diese werden hier getestet und aufgefrischt.

0 Anknüpfung an Schulstoff

Jeweils stufenweise werden in den nächsten Abschnitten Aufgaben gestellt, von ganz leichten Übungen bis hin zu schwierigen Übungen, so dass selbst herausgefunden werden kann, wo man steht und wo es ggf. Nachholbedarf gibt. Damit ein Übungseffekt erreicht wird, sind die Aufgaben ohne Taschenrechner zu lösen.

0.1 Rechnen mit Brüchen

1. Die Ergebnisse sind als gekürzter Bruch zu schreiben, also als Bruch $\frac{a}{b}$, wobei $b \neq 0$ ist und a und b teilerfremd sind, z. B. $\frac{3}{20} + \frac{7}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

$\dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8} =$	$\dfrac{5}{8} - \dfrac{3}{8} =$	$\dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{4} =$
$\dfrac{5}{8} + \dfrac{2}{3} =$	$\dfrac{2}{9} - \dfrac{5}{4} =$	$\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{4} =$

2. Seien $b, d \neq 0$ und $b+d \neq 0$. Welche der folgenden Regeln sind richtig und welche falsch? Die richtigen sind zu begründen, die falschen durch Einsetzen von Zahlen zu widerlegen. $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} \stackrel{?}{=} \frac{a+c}{b}$ und $\frac{a+d}{b+d} \stackrel{?}{=} \frac{a}{b}$ und $\frac{a}{b+d} \stackrel{?}{=} \frac{a}{b} + \frac{a}{d}$ sowie $a + \frac{c}{b} \stackrel{?}{=} \frac{ab+c}{b}$ und $-\frac{a}{b} \stackrel{?}{=} \frac{-a}{b}$.

3. Wie kann man durch Hauptnennerbildung die folgende Summe leicht berechnen? $\dfrac{7}{32} + \dfrac{19}{12} =$

4. Man verifiziere folgende Gleichung: $\dfrac{-1 + (\frac{1}{3})^2 + \frac{1}{9}}{(\frac{1}{3})^2 + \frac{1}{9}} = -\dfrac{7}{2}$

Regeln für das Rechnen mit Brüchen Für reelle Zahlen a, b, c, d mit $b \neq 0$ und $d \neq 0$ gelten die folgenden Regeln:

Addition und Subtraktion: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$

Multiplikation: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ mit Kürzungsregel: $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$

Division: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$, falls auch $c \neq 0$ ist.

In Kapitel 1 werden wir uns mit dem Aufbau des Zahlensystems beschäftigen und auch das Rechnen mit Brüchen noch einmal üben. In dem Kapitel geht es auch um das Lösen einiger Gleichungen.

0.2 Gleichungen lösen

Die folgenden Gleichungen sind nach x aufzulösen. Das Ergebnis ist jeweils durch Einsetzen zu bestätigen.

$x + b = 0$	$2x + \dfrac{1}{2} = 0$	$-1x = 0$
$-2x = 1$	$e^x = 1$	$x^2 + 1 = 0$

0.3 Terme umformen

Ein *Term* ist ein Ausdruck, in dem Zahlen und Variablen miteinander verknüpft sind, z. B. $a^2 + 2ab + b^2$ oder $(x - y)(x + y)$ oder $a(b + c)$.
Es geht nun darum, wenn möglich einen Term so umzuformen, dass er zu einer Formel wird, z. B. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ oder $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$ oder $a(b + c) = ab + ac$.

1. Man forme die folgenden Terme um: $(a + b)c =$
sowie $(a - b)^2 =$ und $a^2 - b^2 =$

2. Man forme die folgenden Terme so um, dass die bekannten Potenzregeln dabei herauskommen, wie z.B. $(ab)^2 = a^2\, b^2$. Es gilt

$(ab)^n =$	$(a^n)^m =$	$a^{n+m} =$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n =$ $\quad , b \neq 0$	$\frac{a^n}{a^m} =$ $\quad , a \neq 0$	$\sqrt{ab} =$

0.4 Differenzieren und Integrieren

Differenzieren Man bilde die Ableitung der folgenden Funktionen.

$f(x) = c$ konstant	$\Longrightarrow$	$f'(x) =$
$f(x) = x$	$\Longrightarrow$	$f'(x) =$
$f(x) = x^2$	$\Longrightarrow$	$f'(x) =$
$f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$	$\Longrightarrow$	$f'(x) =$
$f(x) = e^x$	$\Longrightarrow$	$f'(x) =$
$f(x) = \sin(x)$	$\Longrightarrow$	$f'(x) =$
$f(x) = \cos(x)$	$\Longrightarrow$	$f'(x) =$
$f(x) = \tan(x)$ für $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$	$\Longrightarrow$	$f'(x) =$
$f(x) = \ln(x)$ für $x > 0$,	$\Longrightarrow$	$f'(x) =$

Mit dem Differenzieren beschäftigen wir uns in Kapitel 5. Die obigen und andere Ableitungen werden in den Abschnitten 5.2 - 5.4 hergeleitet.

Integrieren Um das *unbestimmte Integral* $\int f(x)\, dx$ zu berechnen, hat man eine differenzierbare Funktion $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$ zu finden, z. B. $\int dx = \int 1\, dx = F(x)$ mit $F(x) = x$, und es ist $F'(x) = 1$.

$\boldsymbol{\int f(x)\, dx = F(x)}$		*Probe:* $\boldsymbol{F'(x) \stackrel{?}{=} f(x)}$
$\int c\, dx = cx$, wobei c konstant		$F'(x) = c$
$\int x\, dx = \frac{x^2}{2}$		$F'(x) = 2\frac{x}{2} = x$
$\int x^2\, dx =$		$F'(x) =$
$\int x^n\, dx =$	für $n \in \mathbb{N}$	$F'(x) =$
$\int x^{-1}\, dx =$	für $x > 0$	$F'(x) =$
$\int e^x\, dx =$		$F'(x) =$
$\int e^{3x}\, dx =$		$F'(x) =$
$\int \sin(x)\, dx =$		$F'(x) =$
$\int \cos(x)\, dx =$		$F'(x) =$

Mit dem Integrieren beschäftigen wir uns in Kapitel 6. Die obigen Integrale sind in der Tabelle in Abschnitt 6.2 zu finden.

0.5 Addition und Multiplikation unterscheiden

In der folgenden Tabelle soll analog wie für das Wurzelziehen schon geschehen, angegeben werden, ob die jeweilige Operation additiv ist und ob sie multiplikativ ist. Das Zeichen $\circ$ steht für $\cdot$ oder $+$.

Operation	*Ist sie additiv? Ist sie multiplikativ?*
Wurzelziehen, wobei $a, b \geqslant 0$, $\sqrt{a \circ b} = \sqrt{a} \circ \sqrt{b}$	Multiplikativ: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ Nicht additiv: $\sqrt{9+9} \neq \sqrt{9} + \sqrt{9} = 6$
Quadrieren $(a \circ b)^2 = a^2 \circ b^2$	
Differenzieren $(f \circ g)'(x) = f'(x) \circ g'(x)$	
Integrieren $\int \big(f(x) \circ g(x)\big)\, dx = \int f(x)\, dx \ \circ \int g(x)\, dx$	

0.6 Wie schreibt man Lösungen auf?

Keinesfalls darf man Umformungen einfach aneinanderreihen, ohne einen logischen Zusammenhang zwischen den einzelnen Aussagen herzustellen.

Man schreibt zum Beispiel: *Aus* $3x = 2$ *folgt* $x = \frac{2}{3}$ statt $\begin{array}{c} 3x = 2 \\ x = \frac{2}{3}\,. \end{array}$

Man kann aber unter Benutzung eines *Folgepfeils* „$\Longrightarrow$“ auch schreiben: $3x = 2 \implies x = \frac{2}{3}$. Diesen Pfeil werden wir später bei den *Proben* verwenden, wenn wir die Richtigkeit eines Ergebnisses überprüfen.

Beispiele. 1) Die Gleichung $(3y+5)x = 3$ ist für $x \neq 0$ nach y aufzulösen.

Aus $(3y+5)x = 3$ folgt $3y + 5 = \frac{3}{x}$ und also $3y = \frac{3}{x} - 5$. Dies ergibt $y = \frac{1}{x} - \frac{5}{3}$. Man kann auch schreiben:

$(3y+5)x = 3 \implies 3y + 5 = \frac{3}{x} \implies 3y = \frac{3}{x} - 5 \implies y = \frac{1}{x} - \frac{5}{3}$.

2) Zu lösen ist die Gleichung $e^x = 1$.

Die durch $\exp(x) = e^x$ gegebene *Exponentialfunktion* exp hat als *Umkehrfunktion* den *natürlichen Logarithmus* ln. Es gilt daher $\ln(e^x) = x$ für alle reellen Zahlen x.

Wende auf beiden Seiten der Gleichung $e^x = 1$ die Funktion ln an. Dann folgt $\ln(e^x) = \ln(1)$ und also $x = 0$, da $\ln(e^x) = x$ und $\ln(1) = 0$ gilt.

Die letzten beiden Zeilen kann man auch so schreiben: $e^x = 1 \implies \ln(e^x) = \ln(1) \implies x = 0$, da $\ln(e^x) = x$ und $\ln(1) = 0$ gilt.

3) Die Gleichung $(3y+5)x = 3$ ist für $y \neq -\frac{5}{3}$ nach x aufzulösen:
$(3y+5)x = 3 \implies x = \frac{3}{3y+5}$. Weiter lässt sich dies nicht vereinfachen.

Zahlen und Abbildungen

Unter einer Menge *verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.*
Die wohlunterschiedenen Objekte heißen Elemente *der Menge.*
GEORG CANTOR (1845-1918): *Beiträge zur Begründung der Mengenlehre, 1895*

1 Aufbau des Zahlsystems

1.1 Natürliche Zahlen

Der Aufbau des Zahlsystems beginnt mit den *natürlichen Zahlen.* Das sind die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ... mit denen man zählt. Die Menge dieser Zahlen wird mit dem Symbol $\mathbb{N}$ bezeichnet. Man schreibt dafür

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\},$$

das bedeutet, das Symbol $\mathbb{N}$ wird definiert als die Menge der Zahlen, die zwischen den geschweiften Klammern aufgelistet sind.
Ist n eine natürliche Zahl, so schreibt man $n \in \mathbb{N}$. Das heißt, n ist *Element* von $\mathbb{N}$. Zum Beispiel ist $10 \in \mathbb{N}$ und $37 \in \mathbb{N}$, aber nicht -10, also $-10 \notin \mathbb{N}$.
Man kann in $\mathbb{N}$ addieren und multiplizieren: Sind $n, m \in \mathbb{N}$, so gilt auch

$$n + m \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad n \cdot m \in \mathbb{N}.$$

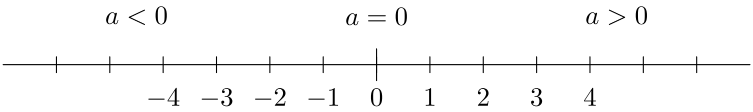
Die Subtraktion ist in $\mathbb{N}$ allerdings nicht immer möglich, d. h. die Gleichung $n+x = m$ hat nicht immer eine Lösung in $\mathbb{N}$. Zum Beispiel hat die Gleichung $7 + x = 5$ die Lösung $x = -2 \notin \mathbb{N}$. Man vergrößert daher den Zahlbereich um Null und die negativen Zahlen.

1.2 Ganze Zahlen

Die Menge der *ganzen Zahlen* wird mit dem Symbol $\mathbb{Z}$ bezeichnet. Es ist

$$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}.$$

Man veranschaulicht sich die ganzen Zahlen als Punkte auf einer Geraden.



Die Zahlen links der 0 sind *kleiner* Null, geschrieben $a < 0$. Die rechts der 0 sind *größer* Null, geschrieben $a > 0$. Es ist $1 < 4$, aber $-4 < -1$.
Sind $a, b \in \mathbb{Z}$, so gelten

$$a + b \in \mathbb{Z}, \qquad a - b := a + (-b) \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad a \cdot b \in \mathbb{Z}.$$

Aber die Division ist in $\mathbb{Z}$ nicht immer möglich, die Gleichung $a \cdot x = b$ mit $a \neq 0$ hat also nicht immer eine Lösung in $\mathbb{Z}$. Beispielsweise hat die Gleichung $5x = 2$ die Lösung $x = \frac{2}{5} \notin \mathbb{Z}$.
Man vergrößert den Zahlbereich $\mathbb{Z}$ durch Hinzunahme der Brüche $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \neq 0$. Es ist dann $\frac{a}{1} \in \mathbb{Z}$.

1.3 Rationale Zahlen

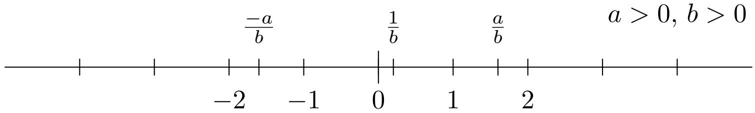
Rationale Zahlen lassen sich als Bruch $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \neq 0$ darstellen. Die Menge der rationalen Zahlen wird mit dem Symbol $\mathbb{Q}$ bezeichnet, ($\mathbb{Q}$ wie Quotient). Die Schreibweise einer rationalen Zahl als Bruch ist nicht eindeutig. Es gilt die *Kürzungsregel*

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}, \qquad \text{wobei auch } c \neq 0 \text{ sein muss.}$$

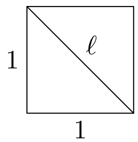
Zum Beispiel ist $\frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{6}{21}$. In $\mathbb{Q}$ kann man addieren, subtrahieren, multiplizieren und durch jede Zahl $\neq 0$ dividieren.

Beispiele. $\frac{3}{4} + \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 7 + 4 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{41}{28}$ und $\frac{3}{4} - \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 7 - 4 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{1}{28}$ sowie $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}$ und $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{21}{20}$.

Die Gleichungen $a + x = b$ und $cx = d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ und $c \neq 0$ sind in $\mathbb{Q}$ durch $x = b - a$ bzw. $x = \frac{d}{c}$ lösbar.
Man veranschaulicht sich die Elemente aus $\mathbb{Q}$ auf der Zahlengeraden als Punkte zwischen den ganzen Zahlen. Ist $b > 0$, so ist $\frac{1}{b}$ der b-te Teil der Einheitsstrecke zwischen 0 und 1. Ist auch $a > 0$, so erhält man den Punkt $\frac{a}{b}$, indem man diesen b-ten Teil a-mal von 0 nach rechts abträgt.



Man kann sich nun fragen, ob der Zahlbereich $\mathbb{Q}$ vielleicht schon groß genug ist, oder ob es noch Zahlen gibt, die nicht Element von $\mathbb{Q}$ sind. Dazu betrachtet man ein Quadrat der Seitenlänge 1. Die Länge der Diagonale sei mit ℓ bezeichnet. Dann gilt nach dem Satz von PYTHAGORAS $\ell^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, also $\ell = \sqrt{2}$, und man kann zeigen, dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ gilt.



Solche Maßzahlen sind im Allgemeinen nicht rational, aber sie sind „reell“, wie zum Beispiel auch der Umfang 2π eines Kreises mit Radius 1. Es ist $2\pi \notin \mathbb{Q}$.
Wir müssen also den Zahlbereich $\mathbb{Q}$ noch wesentlich vergrößern. Das führt zu den reellen Zahlen.

1.4 Reelle Zahlen

Die Menge der *reellen Zahlen* wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet. Wir haben dann folgende Zahlbereiche

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Das Zeichen „$\subset$“ bedeutet dabei, dass die linke Menge *Teilmenge* der rechten Menge ist. Beispiele: $5 = \frac{5}{1} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ und $2\pi \in \mathbb{R}$. In $\mathbb{R}$ gibt es zwei *Strukturen*:

1. Die *Addition*, bei der zu jedem Paar a, b die *Summe* $a + b \in \mathbb{R}$ gehört.

2. Die *Multiplikation*, bei der zu jedem Paar a, b das *Produkt* $a \cdot b \in \mathbb{R}$ gehört. Meist schreibt man ab statt $a \cdot b$.

Verbunden sind diese Strukturen durch die *Distributivgesetze*

$$(a + b)c = ac + bc \quad \text{und} \quad a(b + c) = ab + ac\,.$$

Die beiden Strukturen sind strikt zu unterscheiden, um Fehler zu vermeiden wie $\sqrt{13}$ in $\sqrt{9} + \sqrt{4} = 5$ zu zerlegen, aber auch schwierig wie z.B. die Addition von Brüchen.

Die Axiome in $\mathbb{R}$

Gesetze der Addition	*Gesetze der Multiplikation*
Assoziativgesetz: $(a+b)+c = a+(b+c)$	Assoziativgesetz: $(ab)c = a(bc)$
Kommutativgesetz: $a+b = b+a$	Kommutativgesetz: $ab = ba$
Neutrales Element ist 0, also $a+0=a$ für alle $a \in \mathbb{R}$	Neutrales Element ist 1, also $a \cdot 1 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$
Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein Inverses $-a$ mit $a+(-a)=0$	Zu jedem $a \neq 0$ in $\mathbb{R}$ gibt es ein Inverses a^{-1} mit $a \cdot a^{-1} = 1$

Setze $b - a = b + (-a)$. Falls $a \neq 0$, setze $\frac{b}{a} = ba^{-1}$.

Anordnung von $\mathbb{R}$ Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist *angeordnet*, das heißt für je zwei Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$ besteht stets genau eine der folgenden Beziehungen:

(1) $r = s$,

(2) $r > s$ (r ist „größer“ als s),

(3) $r < s$ (r ist „kleiner“ als s).

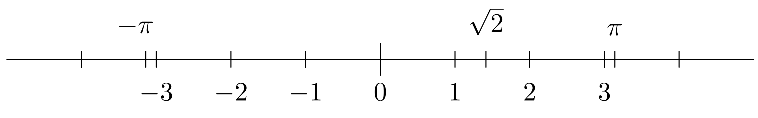
Für die Anordnung von $r, s, t \in \mathbb{R}$ gelten folgende *Monotoniegesetze*:

$$\begin{aligned} r < s &\implies r + t < s + t, \\ r < s \text{ und } t > 0 &\implies rt < st, \\ r < s \text{ und } t < 0 &\implies rt > st. \end{aligned}$$

Dabei gilt zum Beispiel $3{,}141592653 < \pi < 3{,}141592654$.

Das Quadrat einer reellen Zahl $\neq 0$ ist also stets > 0, denn ist $r < 0$, so ist $-r = (-1)r > 0$ und $r^2 = (-1)^2 r^2 = (-r)^2 > 0$.

Veranschaulichung von $\mathbb{R}$



$\mathbb{R}$ besteht genau aus allen Punkten der Zahlengeraden.

Man kann aus jeder reellen Zahl $r \geqslant 0$ (r ist „größer oder gleich“ 0) die *Quadratwurzel* ziehen, das heißt die Gleichung $x^2 = r$ mit $r \geqslant 0$ ist durch $x = \pm\sqrt{r} \in \mathbb{R}$ lösbar.
(Für $r > 0$ ist die *Wurzel* $\sqrt{r}$ die positive Lösung der Gleichung $x^2 - r = 0$.)

Für welche $p, q \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ in $\mathbb{R}$ lösbar?
Es ist $x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$, also gilt:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q = 0 \quad &\iff \quad x^2 + px = -q \\ &\iff \quad x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q \\ &\iff \quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q \\ &\iff \quad x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \end{aligned}$$

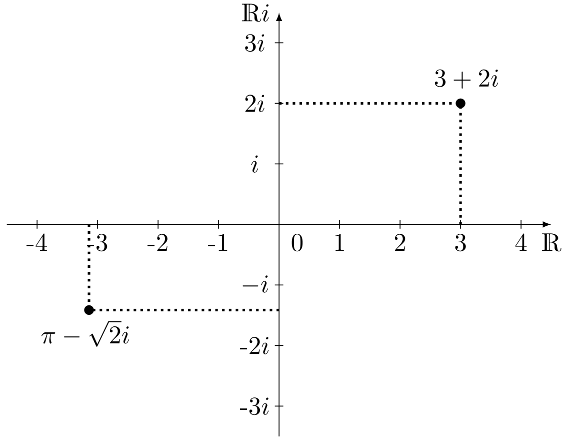
Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ ist also genau dann in $\mathbb{R}$ lösbar, wenn $\frac{p^2}{4} - q \geqslant 0$ gilt. Sie hat dann die Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Insbesondere ist die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ nicht in $\mathbb{R}$ lösbar. Um auch aus negativen Zahlen die Quadratwurzel ziehen zu können, muss der Zahlbereich also immer noch vergrößert werden. Wir führen nun ein neues Symbol $i \notin \mathbb{R}$ ein, dass durch $i^2 = -1$ definiert ist und also die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ erfüllt. Dies führt zu den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

1.5 Komplexe Zahlen

Da die Zahlengerade durch $\mathbb{R}$ besetzt ist, weicht man in die Ebene aus und stellt sich die *komplexen Zahlen* als die Punkte der „Gaussschen Zahlenebene“ vor



Die Zahl i auf der senkrechten Achse heißt *imaginäre Einheit*. Sie erfüllt die Gleichung $i^2 = -1$. Jede komplexe Zahl lässt sich eindeutig darstellen als $z = r + si$ mit $r, s \in \mathbb{R}$. Man definiert $\boxed{\mathbb{C} := \{r + si \mid r, s \in \mathbb{R}\}}$ als die Menge der komplexen Zahlen.
Im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{C}$ nicht angeordnet. Wie erklärt sich, dass der Begriff „positve reelle Zahl“ für eine reelle Zahl $a > 0$ nicht mehr sinnvoll für eine nichtreelle komplexe Zahl ist? Insbesondere ist das Wurzelziehen in $\mathbb{C}$ problematisch. Für $r \in \mathbb{R}_{<0}$ setzt man $\sqrt{r} = i\sqrt{-r}$, z. B. $\sqrt{-5} = i\sqrt{5}$.

Rechenregeln in $\mathbb{C}$ Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gelten:

$$\begin{aligned}(a + bi) \pm (c + di) &= (a + c) \pm (b + d)i \\ (a + bi) \cdot (c + di) &= ac + adi + bci + bd\, i^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \qquad \text{da } i^2 = -1\,.\end{aligned}$$

Die obigen Axiome in $\mathbb{R}$ sind auch noch in $\mathbb{C}$ gültig. Insbesondere kann man jede Zahl $\neq 0$ dividieren. Wie stellt man also einen Bruch

$$\frac{a + bi}{c + di}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, wobei c und d nicht beide 0 sind, in der Form $r + si$ mit $r, s \in \mathbb{R}$ dar? Dazu benutzt man die „dritte binomische Formel“

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

und erweitert Zähler und Nenner mit $c - di$. Der Nenner wird dann reell.

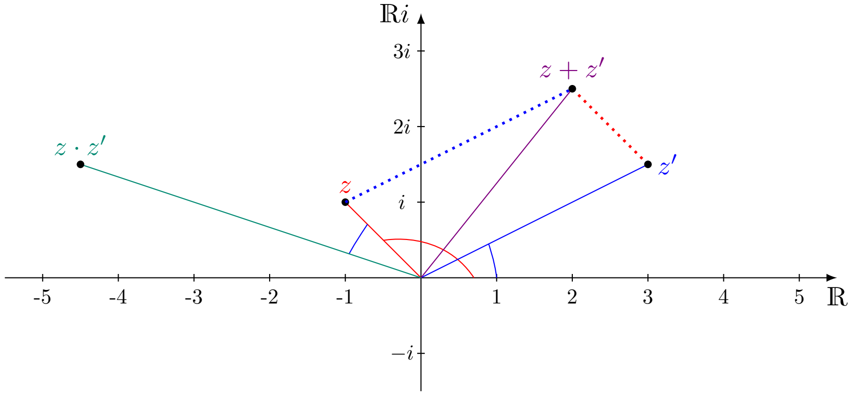
Beispiele. 1) Was ist $\frac{2}{(3-i)}$? Es ist

$$\begin{aligned}\frac{2}{3 - i} &= \frac{2 \cdot (3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{6 + 2i}{9 + 1} \qquad \text{da } i^2 = -1 \\ &= \frac{6}{10} + \frac{2}{10}\, i \\ &= \frac{3}{5} + \frac{1}{5}\, i = r + si \qquad \text{mit } r = \frac{3}{5} \text{ und } s = \frac{1}{5}\,.\end{aligned}$$

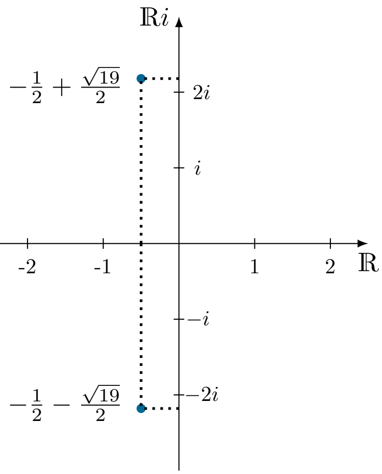
2) Was ist $\frac{5+7i}{3+\sqrt{2}i}$? Es ist

$$\begin{aligned}\frac{5 + 7i}{3 + \sqrt{2}i} &= \frac{(5 + 7i)(3 - \sqrt{2}i)}{(3 + \sqrt{2}i)(3 - \sqrt{2}i)} \\ &= \frac{(15 + 7\sqrt{2}) + (21 - 5\sqrt{2})i}{9 - 2i^2} \\ &= \frac{15 + 7\sqrt{2}}{11} + \frac{21 - 5\sqrt{2}}{11}\, i\,.\end{aligned}$$

Veranschaulichung von Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$



Komplexe Konjugation Zu jeder Zahl $z = c + di$ mit $c, d \in \mathbb{R}$ gehört die *konjugiert komplexe Zahl* $\bar{z} := c - di$. Damit wurde in obigen Beispielen Zähler und Nenner erweitert. Die Zahl $\bar{z}$ geht durch *Spiegelung* an der reellen Achse aus z hervor, zum Beispiel



Bemerkung. Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ ist in $\mathbb{C}$ stets lösbar. Zum Beispiel hat die Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$ in $\mathbb{C}$ die Lösungen $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\,.$

Nach dem „Fundamentalsatz der Algebra“ ist sogar jede Gleichung der Form $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ mit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ lösbar.

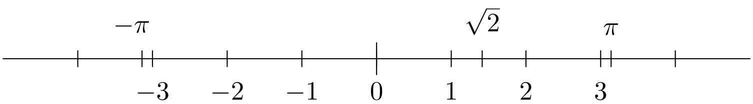
Das deutet darauf hin, dass die Konstruktion des Zahlsystems mit der Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ einen befriedigenden Abschluss gefunden hat. Wir haben also die Zahlbereiche $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

1.6 Der n-dimensionale Raum

René Descartes (1596–1650)

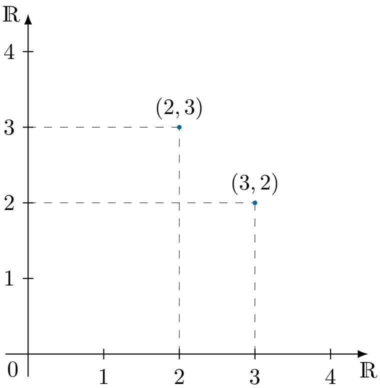
Durch Descartes wurde die Benutzung rechtwinkliger Koordinaten zu einer allgemein anerkannten mathematischen Methode. Nach ihm ist das *cartesische Koordinatensystem* benannt.

Dimension 1 Der 1-dimensionale Raum $\mathbb{R}^1$ besteht genau aus den Punkten der Zahlengeraden.



Das sind die reellen Zahlen, vergleiche Abschnitt 1.4.

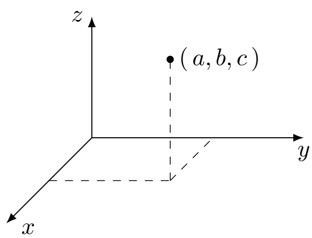
Dimension 2 Der 2-dimensionale Raum $\mathbb{R}^2$ besteht genau aus allen geordneten Paaren (a, b) mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$.



Das ist die Gaußsche Zahlenebene, wenn man $a + bi$ statt (a, b) schreibt, vergleiche Abschnitt 1.5. Die Zahl i entspricht dem Punkt $(0, 1)$.

Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ übertragen sich auf $\mathbb{R}^2$ durch:
$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ und $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Dimension 3 Der 3-dimensionale Raum $\mathbb{R}^3$ besteht genau aus allen geordneten Tripeln (a, b, c) mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, also $\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.



Dimension n Die Konstruktion kann man auf n Koordinaten mit $n \in \mathbb{N}$ verallgemeinern. Man definiert

$$\mathbb{R}^n := \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

als den *n-dimensionalen Raum* und versieht $\mathbb{R}^n$ mit komponentenweiser Addition

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n).$$

Die Elemente des n-dimensionalen Raums sind sogenannte *geordnete n-Tupel* $(a_1, \dots, a_n)$ mit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Man nennt sie auch *Punkte* des $\mathbb{R}^n$.

Aber in Dimension $n \geqslant 3$ gibt es keine Multiplikation mehr, für die die obigen Axiome alle gültig sind. Zum Beispiel gibt es in Dimension 4 die sog. *Quaternionen*, die mit einer nicht-kommutativen Multiplikation versehen sind. Dann gibt es noch in Dimension 8 die sog. *Oktonionen*, deren Multiplikation weder kommunikativ noch assoziativ ist.

Es ist $i^2 = -1$. Wo liegt der Fehler in der folgenden Gleichungskette ?

$$1 = \sqrt{1} \stackrel{?}{=} \sqrt{(-1) \cdot (-1)} \stackrel{?}{=} (\sqrt{-1}\,) \cdot (\sqrt{-1}\,) \stackrel{?}{=} i \cdot i \stackrel{?}{=} i^2 = -1\,.$$

1.7 Aufgaben 1 – 16

Blatt 1 mit vier Aufgaben zu Kapitel 1

Aufgabe 1. (a) Berechnen Sie die Summe $\frac{6}{11} + \frac{2}{9}$ und das Produkt $\frac{6}{11} \cdot \frac{2}{9}$. Die Ergebnisse sind jeweils als gekürzter Bruch zu schreiben.

(b) Stellen Sie die Ausdrücke $\frac{7}{\frac{-8}{3}}$ und $\frac{\frac{-7}{8}}{-3}$ als Brüche mit nur einem Bruchstrich dar.

Aufgabe 2. Setzen Sie je nachdem, was zutrifft, das Zeichen $<$ oder das Zeichen $>$ ein:

(a) $0,37 \qquad 0,39$

(b) $1,05 \qquad 1,005$

(c) $\frac{1}{3} \qquad \frac{1}{5}$

(d) $-7 \qquad -6$

Aufgabe 3. Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach y auf:

(a) $(3y+2)x = 0$ und $(3y+2)x = 2$ für $x \neq 0$

(b) $\frac{1}{1+y^2} = x^2 + 2$ und $\frac{1}{1+y^2} = \frac{x^2}{2} + 1$

Aufgabe 4. (Anwendung)
Einer der Umweltfaktoren in der Tier- und Pflanzenökologie ist der Faktor Druck. Vor allem in der Tiefe verändert er sich stark. Dies bemerken wir, wenn wir tauchen. In der Luft gibt es kaum Luftdruckunterschiede, und auf Meereshöhe beträgt der mittlere Druck etwa 100 kPa. Im Meer hingegen steigt der hydrostatische Druck um 100 kPa pro 10 m.

- Der Marianengraben ist etwa 11 km tief. Welcher Druck in atm (Physikalischer Druck, 100 kPa $\approx$ 1 atm) herrscht in dieser Tiefe?

Blatt 2 mit vier Aufgaben zu Kapitel 1

Aufgabe 5. Zeichnen Sie die folgenden komplexen Zahlen z_1, z_2, z_3, z_4 als Punkte der Gaussschen Zahlenebene:

$$z_1 = 1 + 2i\,, \quad z_2 = -2 - \frac{3}{4}\,i\,, \quad z_3 = -2i\,, \quad z_4 = 1 + i + i^2 + i^3\,.$$

Aufgabe 6. Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $r+si$ mit $r,s \in \mathbb{R}$ dar:

$$\frac{2+3i}{4-5i}, \qquad \frac{i-1}{i+1}, \qquad \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2, \qquad \frac{1}{i}.$$

Aufgabe 7. (a) Bestimmen Sie die beiden Lösungen x_1 und x_2 der Gleichung $x^2-2x+6=0$.

(b) Überprüfen Sie, ob die Summen $x_1^2-2x_1+6$ und $x_2^2-2x_2+6$ jeweils 0 ergeben.

Aufgabe 8. (Anwendung)
Ein Umweltfaktor, der auf Individuen einwirkt, ist der Salzgehalt des Lebensraumes (Salinität). Die Salinität von Süßwasser liegt unter 0,5 ‰ und setzt sich hauptsächlich aus den Ionen Ca^{2+} und HCO_3^- zusammen, aber auch Na^+ und Cl^- sind vertreten.
Salzwasser hingegen besteht zu 35 ‰ bis 40 ‰ aus Salz. In diesem Fall sind die Ionen Na^+ und Cl^- dominierend. Das sogenannte Brackwasser liegt mit seiner Salinität genau zwischen denen des Süß- und Salzwassers, d. h. zwischen 0,6 ‰ bis 34 ‰.

(a) Wie viel Salz ist in einer Wassermenge von 1.370.000.000 km^3 in den jeweiligen Wasserarten enthalten?

(b) Auf 1 kg Meerwasser kommen etwa 20 g Cl^- und 15 g Na^+. Berechnen Sie den Masseanteil beider Salze in Prozent.

(c) Bei einer Krabbe beträgt das Verhältnis des Masseanteils im Körper zum Masseanteil im Meerwasser für Cl^- etwa 115% und für Na^+ etwa 90%. Das Meerestier wiegt etwa 300 g und wir nehmen an, dass es nur aus Wasser und den Ionen Cl^- und Na^+ besteht. Wie viel Gramm Natrium und Chlorid sind in dem Tier gelöst?

(d) Berechnen Sie das Verhältnis vom Gesamtsalzgehalt im Tier zum Gesamtsalzgehalt im Meerwasser.

Zwei weitere Aufgaben zu Dreisatz und Bruchrechnung von A. Pack:

Aufgabe 9. Ein Gestein enthält 1,3 ppmw (ppmw= $1/10^6$) Zr (Zirkon, $M_{Zr} = 91{,}22\ \mathrm{g\,mol^{-1}}$). 600 mg des Gesteins muss für einen Schmelzaufschluss mit 3,6 g Flussmittel versetzt werden. Das Analysegerät hat eine Nachweisgrenze von 8×10^{-6} Gew.% ZrO_2 ($M_O = 16\ \mathrm{g\,mol^{-1}}$). Kann man mit diesem Gerät die Zr-Konzentration zuverlässig bestimmen?

Aufgabe 10. Bei Sauerstoffisotopenanalysen (99,8% ^{16}O; 0,2% ^{18}O) gibt man das Isotopenverhältnis $^{18}\mathrm{O}/^{16}\mathrm{O}$ typischerweise als δ^{18}O-Wert in ‰ an. Es gilt:

$$\delta^{18}\mathrm{O}_{\mathrm{Probe}} = \big((^{18}\mathrm{O}/^{16}\mathrm{O})_{\mathrm{Probe}} \,/\, (^{18}\mathrm{O}/^{16}\mathrm{O})_{\mathrm{Referenz}} - 1\big) \times 10^3.$$

Nun hat man zwei Proben (A, B) analysiert, welche mit der gleichen Referenz verglichen werden. Es gilt

$$\alpha_{A,B} = (^{18}\mathrm{O}/^{16}\mathrm{O})_{\mathrm{Probe\,A}}/(^{18}\mathrm{O}/^{16}\mathrm{O})_{\mathrm{Probe\,B}}.$$

Drücken Sie $\alpha_{A,B}$ als Funktion von $\delta^{18}\mathrm{O}_{\mathrm{Probe\,B}}$ und $\delta^{18}\mathrm{O}_{\mathrm{Probe\,A}}$ aus.

Aufgaben aus dem Kurs 2004/05

Aufgabe 11. Seien $a \neq 0$ und $b \neq 0$ ganze Zahlen. Stellen Sie die beiden rationalen Zahlen

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \text{und} \quad \frac{5}{3a^2b} + \frac{2}{ab^2}$$

jeweils als (gekürzten) Bruch mit nur einem Bruchstrich in $\mathbb{Q}$ dar.

Aufgabe 12. Welche der folgenden Ungleichungen sind richtig und welche falsch? Die falschen sind zu korrigieren.

a) $\frac{3}{4} \overset{?}{<} 0{,}75$ b) $-5 \overset{?}{<} 3$

c) $\sqrt{2} \overset{?}{>} 1{,}42$ d) $-5 \overset{?}{>} -1$

Aufgabe 13. Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

und überprüfen Sie das Ergebnis durch Einsetzen der gefundenen Werte in die Gleichung.

Aufgabe 14. Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung

$$4x^2 - 5x = -1$$

und überprüfen Sie das Ergebnis durch Einsetzen der gefundenen Werte in die Gleichung.

Aufgabe 15. Zeichnen Sie die folgenden komplexen Zahlen z_1, z_2, z_3, z_4 als Punkte der Gaussschen Zahlenebene:

$$z_1 = 1 - \sqrt{3}i\,, \quad z_2 = -2 - \frac{3}{4}\,i\,, \quad z_3 = \frac{3 + \sqrt{7}i}{4}\,, \quad z_4 = i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5\,.$$

Aufgabe 16. Erläutern Sie, warum die Gleichung $x^2 = r$ für $r < 0$ nicht in $\mathbb{R}$ lösbar ist.

2 Abbildungen (ergänzend)

Seien X und Y nicht-leere Mengen. Eine *Abbildung von X nach Y* ist eine Vorschrift f, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet. Man schreibt dafür

$$f\colon X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$$

und nennt X den *Definitionsbereich* sowie $f(X) := \{f(x) \mid x \in X\} \subset Y$ die *Bildmenge* oder *Wertemenge* von f.

Beispiele. 1) Die Zuordnung

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] & Y \\
 & y_1 \\
x_1 \arrow[dr, mapsto] & \\
 & y_2 \\
x_2 \arrow[ur, mapsto] & \\
 & y_3
\end{tikzcd}$$

ist eine Abbildung.

2) Dagegen ist

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] & Y \\
 & y_1 \\
x_1 \arrow[ur, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \\
 & y_2 \\
x_2 \arrow[r, mapsto] & y_3
\end{tikzcd}$$

keine Abbildung, da dem Element x_1 zwei Werte zugeordnet werden.

3) Zu einer Vorlesung gebe es 5 Übungsgruppen. Dann erhält man eine Abbildung $f\colon X \to Y$, $x \mapsto f(x)$, indem man jedem Hörer und jeder Hörerin der Vorlesung eine dieser Übungsgruppen zuteilt. Dabei ist X die Hörermenge und Y die Menge der 5 Übungsgruppen.

Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *injektiv,* falls es zu jedem $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt, *surjektiv,* wenn es zu jedem $y \in Y$ mindestens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt und *bijektiv,* wenn es zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.

Beispiele. 1) Die Abbildung

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] & Y \\
 & y_1 \\
x_1 \arrow[dr, mapsto] & \\
 & y_2 \\
x_2 \arrow[ur, mapsto] & \\
 & y_3
\end{tikzcd}$$

ist weder injektiv, noch surjektiv.

2) Die Abbildung

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] & Y \\
 & y_1 \\
x_1 \arrow[ur, mapsto] & \\
 & y_2 \\
x_2 \arrow[r, mapsto] & y_3
\end{tikzcd}$$

ist injektiv, aber nicht surjektiv.

3) Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ x_1 & \longmapsto & y_1 \\ x_2 & \longmapsto & y_2 \\ x_3 & \longmapsto & y_2 \end{array}$$

ist surjektiv (d. h. $f(X) = Y$), aber nicht injektiv.

4) Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ x_1 & \longmapsto & y_2 \\ x_2 & \longmapsto & y_1 \\ x_3 & \longmapsto & y_3 \end{array}$$

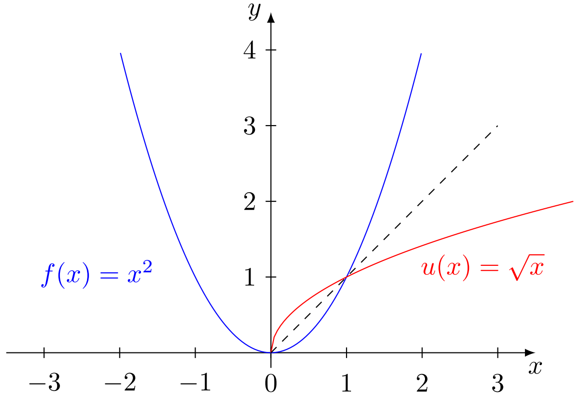
ist bijektiv. Es gilt:

$$\boxed{f \text{ bijektiv}} \iff \boxed{f \text{ injektiv und surjektiv}}.$$

Wir ordnen nun jeder reellen Zahl ihr Quadrat zu, also zum Beispiel $2 \mapsto 4,\ 3 \mapsto 9,\ 4 \mapsto 16,\ -4 \mapsto 16,\ \dots$. Dafür schreiben wir

$$(*) \qquad f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}\,, \quad x \mapsto x^2$$

und untersuchen, ob die Abbildung f injektiv und ob sie surjektiv ist. (Mit der Schreibweise in $(*)$ wird gleichzeitig ausgesagt, dass das Quadrat einer reellen Zahl stets $\geqslant 0$ ist.)



Die Abbildung $(*)$ ist surjektiv, da man aus jeder reellen Zahl $y \geqslant 0$ die Quadratwurzel ziehen kann.
Die Abbildung $(*)$ ist nicht injektiv, da es z. B. zu $y = 4$ zwei verschiedene Elemente $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = y$ gibt, nämlich $x = \pm 2$.
Aber für $x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ ist Quadrieren injektiv und wird durch die rechte Hälfte der Parabel dargestellt.

2.1 Umkehrabbildung

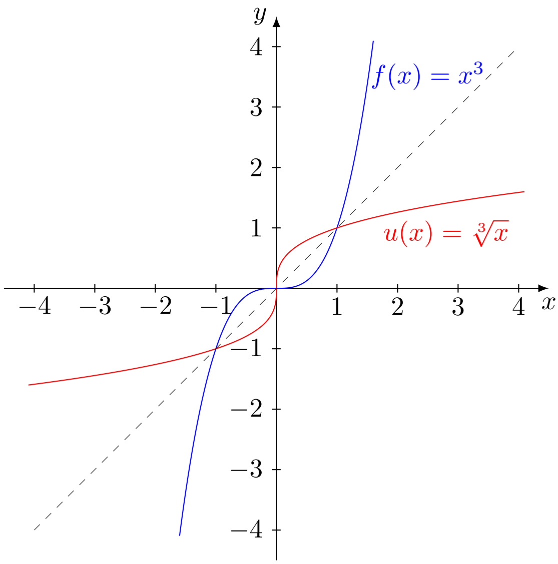
Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *umkehrbar*, wenn es eine Abbildung $u\colon Y \to X$ gibt, für die die Beziehungen

$$u(f(x)) = x \quad \text{für alle } x \in X \qquad \text{und} \qquad f(u(y)) = y \quad \text{für alle } y \in Y$$

erfüllt sind. Man nennt u die *Umkehrabbildung von f*. Es gilt:

$$\boxed{f \text{ umkehrbar}} \iff \boxed{f \text{ bijektiv}}\,.$$

Beispiel 1. Die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$ ist umkehrbar mit Umkehrabbildung $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y \mapsto \sqrt[3]{y}$. Man schreibt dann auch x statt y.



Beispiel 2. Bestimme die Umkehrabbildung von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x+1$. Man findet die Umkehrabbildung u, indem man die Gleichung $f(x) = y$ nach x auflöst. Es ist $f(x) = 2x + 1$, und aus $2x + 1 = y$ folgt $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$. Das ergibt bereits die gesuchte Umkehrfunktion

$$u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ y \mapsto \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\,.$$

Probe: $u(f(x)) = u(2x + 1) = \frac{1}{2}(2x + 1) - \frac{1}{2} = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(u(y)) = f(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}) + 1 = y$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

2.2 Kompositum von Abbildungen

Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen. Dann ist das *Kompositum* $g \circ f\colon X \to Z$ definiert durch die Bedingung

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Beispiel 1. Gegeben seien die beiden Abbildungen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto y+1$. Dann gilt $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2+1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(y+1) = (y+1)^2$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Wir erhalten die Komposita

$$g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2+1, \qquad \text{und} \qquad f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto (y+1)^2.$$

Es kann also vorkommen, dass $g \circ f \neq f \circ g$ gilt.

Beispiel 2. Es ist $\sin(2x) = (f \circ g)(x)$ mit $g(x) = 2x$ und $f(y) = \sin(y)$. Die Ableitung wird in diesem Fall nach der *Kettenregel* der Differenziation gebildet: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos(2x) \cdot 2$.

2.3 Aufgaben 17 – 20

Aufgabe 17. Bei welchen der folgenden Zuordnungen f_1, f_2, f_3, f_4 handelt es sich um Abbildungen und bei welchen nicht?

a) $f_1\colon \{2,-2,3,-3\} \longrightarrow \{4,9\}\,, \quad 2 \mapsto 4, \quad -2 \mapsto 4, \quad 3 \mapsto 9, \quad -3 \mapsto 9,$

b) $f_2\colon \{4,9\} \longrightarrow \{2,-2,3,-3\}\,, \quad 4 \mapsto 2, \quad 4 \mapsto -2, \quad 9 \mapsto 3, \quad 9 \mapsto -3,$

c) $f_3\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}\,, \quad m \mapsto m^2+1,$

d) $f_4\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}\,, \quad m \mapsto m^3.$

Aufgabe 18. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität:

a) $f\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto 4x^2+2,$

b) $f\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto x^2-x.$

Aufgabe 19. Bestimmen Sie die Umkehrabbildung von

a) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto 3x-2,$

b) $f\colon \mathbb{R}_{\neq 1} \longrightarrow \mathbb{R}_{\neq 1}\,, \quad x \mapsto \frac{x+1}{x-1}, \qquad$ wobei $\mathbb{R}_{\neq 1} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$.

Aufgabe 20. Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und $g\colon \mathbb{R}_{\neq -1} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{1}{x+1}$ zwei Abbildungen, wobei $\mathbb{R}_{\neq -1} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \,\}$. Bestimmen Sie die Komposita $f \circ g$ und $g \circ f$ und geben Sie jeweils Definitionsbereich und Wertemenge an.

Analysis

B. Riemann, 1826–1866

Auf der Genauigkeit, mit welcher wir die Erscheinungen ins Unendlichkleine verfolgen, beruht wesentlich die Erkenntnis ihres Causalzusammenhangs.

Zum Beispiel gilt

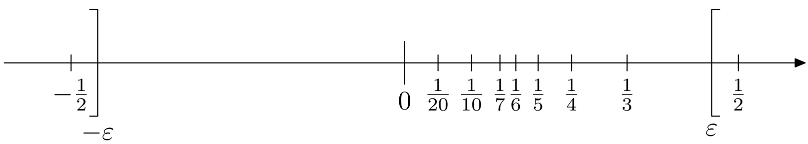
$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6} > \frac{1}{7} > \cdots > \frac{1}{100} > \ldots$$

Die Brüche werden kleiner und kommen immer dichter an 0 heran. Dies werden wir nun präzisieren.

3 Folgen und Grenzwerte

Betrachte die Zahlenfolge $\left(1\,, \frac{1}{2}\,, \frac{1}{3}\,, \frac{1}{4}\,, \frac{1}{5}\,, \frac{1}{6}\,, \frac{1}{7}\,, \ldots\right)$. Für diese *Folge* schreibt man auch $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Mit Ausnahme von endlich vielen Folgengliedern $\frac{1}{n}$ liegen alle in einer sogenannten ε-Umgebung von 0, egal wie klein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gewählt wird. Das heißt: Bis auf endlich viele Folgenglieder gilt: $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$.



„ε-Umgebung von 0“

In unserem Bild liegen außer dem Folgenglied $\frac{1}{2}$ alle Folgenglieder innerhalb der gewählten ε-Umgebung von 0.

Der *Grenzwert* (auch *Limes* genannt) der Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist 0, und man schreibt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Das Zeichen „∞“ steht dabei für „unendlich”. Man spricht dann davon, dass die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 *konvergiert*. Dies verallgemeinern wir nun.

3.1 Konvergenz und Divergenz

Wir ordnen jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ genau eine reelle Zahl a_n zu und erhalten dadurch eine reelle *Folge*. Diese wird geschrieben als

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{oder} \quad (a_1\,,\ a_2\,,\, a_3\,,\, a_4\,,\, a_5\,,\, a_6\,,\, a_7\,,\, a_8\,,\, \ldots).$$

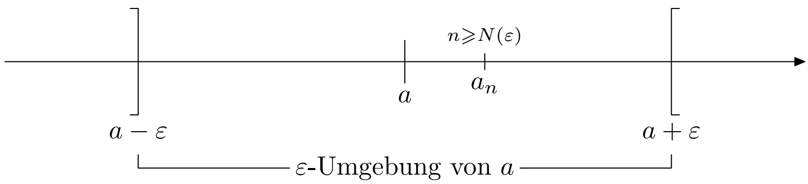
Eine Folge heißt konvergent, wenn sie einen Grenzwert besitzt. Genauer definiert man: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen eine Zahl* $a \in \mathbb{R}$, wenn in jeder ε-Umgebung von a alle bis auf endlich viele Folgenglieder liegen. Man schreibt dann:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,.$$

Dabei ist eine ε-Umgebung von a für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben als *offenes Intervall*

$$]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\; := \{x \in \mathbb{R} \mid a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\},$$

das sind alle $x \in \mathbb{R}$, deren Abstand von a kleiner als ε ist.



Etwas anders gesagt: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen a, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so gibt, dass $a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$ für alle $n \geqslant N(\varepsilon)$ gilt.

Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$, so heißt a *Grenzwert der Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Der Grenzwert ist dadurch eindeutig bestimmt. Besitzt eine Folge keinen Grenzwert, so sagt man „die Folge divergiert“ oder „die Folge ist divergent“.

Beispiele. 1) Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1\,,\,1\,,\,-1\,,\,1,\ldots)$ divergiert.

2) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ konvergiert die konstante Folge $(c\,,\,c\,,\,c,\ldots)$. Sie hat den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$, (denn es liegen in jeder ε-Umgebung von c alle Folgenglieder).

Rechenregeln für konvergente Folgen

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen. Dann sind auch die Folgen $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n\cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c\cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c\in\mathbb{R}$ konvergent, und es gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n\\ \lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n\\ \lim_{n\to\infty} c\cdot a_n &= c\lim_{n\to\infty} a_n\,.\end{aligned}$$

Beispiel. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1+2\cdot 0 = 1\,.$

Ferner gilt: Sind alle b_n und $\lim_{n\to\infty} b_n$ ungleich 0, so ist auch die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, und es gilt $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}\,.$

Fazit. *Sofern existent, verhalten sich Grenzwerte additiv und multiplikativ.*

Nullfolgen

Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ heißt *Nullfolge*. Wir kennen schon die Nullfolge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Schachtelungssatz für Nullfolgen. *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge, und sei* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge mit*

$$0\leqslant b_n\leqslant a_n \quad \textit{für alle } n\in\mathbb{N}.$$

Dann ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge.*

Beispiel. Es ist $0\leqslant \dfrac{1}{n^2+1}\leqslant \dfrac{1}{n}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Also ist die Folge $\left(\dfrac{1}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Kann man den Schachtelungssatz mit $a_n=\frac{1}{n}$ anwenden, um zu zeigen, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ eine Nullfolge ist? Die Antwort ist „nein“, da $\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{n}$ für $n>1$ gilt.

Dass die Folge $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, zeigt man so:
Man wählt zu jedem vorgegebenen $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$ ein $N\in\mathbb{N}$ mit $\frac{1}{\sqrt{N}}<\varepsilon$. Dann liegen in jeder ε-Umgebung von 0 alle bis auf höchstens N Folgenglieder, denn für alle $n\geqslant N$ gilt $\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{N}}<\varepsilon$.

Beispiele für das Rechnen mit konvergenten Folgen

1) Besitzt die Folge $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert? Ja, denn es gilt

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1 \cdot n}{(1+\frac{1}{n}) \cdot n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

und also $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \dfrac{1}{1+0} = 1.$

2) Untersuche die Folge $\left(\frac{3n^2+5n}{n^2-2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz. Wegen

$$\frac{3n^2+5n}{n^2-2} = \frac{\left(3+\frac{5}{n}\right) \cdot n^2}{\left(1-\frac{2}{n^2}\right) \cdot n^2} = \frac{3+\frac{5}{n}}{1-\frac{2}{n^2}}$$

folgt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n}{n^2-2} &= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n^2}\right)} \\ &= \frac{3+5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1-2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{3+5\cdot 0}{1-2\cdot 0} = 3.\end{aligned}$$

Konvergenzkriterien

Jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist *beschränkt* (das heißt, es gibt eine *Schranke* $M \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ mit $-M \leqslant a_n \leqslant M$ für alle $n \in \mathbb{N}$).

Umgekehrt ist aber nicht jede beschränkte Folge konvergent. Zum Beispiel ist die Folge $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$ durch $M = 1$ beschränkt und divergent. Es gilt aber:

- Ist eine beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton wachsend* (das heißt, für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_{n+1} \geqslant a_n$), dann ist sie konvergent.
- Ist eine beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton fallend* (das heißt, für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_{n+1} \leqslant a_n$), dann ist sie konvergent.

Beispiele. 1) Die Folge $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist durch $M = \frac{1}{2}$ beschränkt und monoton fallend. Da $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist die Folge nach dem Schachtelungssatz eine Nullfolge.

2) Allgemeiner ist die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $-1 < q < 1$ eine Nullfolge.

3) Die Folge $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt und also divergent, (denn wäre sie konvergent, so wäre sie beschränkt).

4) Ist allgemeiner $q > 1$ oder $q < -1$, so ist die Folge $(cq^n)_{n\in\mathbb{N}}$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ unbeschränkt und also divergent.

5) **Zinseszinsberechnung**
Sei $K_0 > 0$ das Anfangskapital, und sei p der Zinssatz in Prozent. Für das Kapital K_n nach n Jahren gilt dann

$$K_{n+1} = K_n + \frac{p}{100}K_n = K_n\left(1+\frac{p}{100}\right),$$

also $K_2 = K_1\left(1+\frac{p}{100}\right) = \underbrace{K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)}_{K_1}\left(1+\frac{p}{100}\right) = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2.$

So fortfahrend erhält man $K_n = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$.

Ist $K_0 = 1000$ und $p = 4\,\%$, so folgt $K_n = 1000\cdot(1{,}04)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie für $n = 0$. Die Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt keinen Grenzwert, denn sie ist nach oben unbeschränkt.

Bestimmte Divergenz gegen $\pm\infty$

Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *bestimmt divergent* gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$), wenn es zu jedem $c \in \mathbb{R}$ ein $N(c) \in \mathbb{N}$ so gibt, dass $a_n > c$ (bzw. $a_n < c$) für alle $n \geqslant N(c)$ gilt. Man schreibt dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$).

Beispiele. 1) Für die Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus 5) oben gilt $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = \infty$.

2) Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$.

3) Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, sie ist jedoch nicht bestimmt divergent.

Wie im Abschnitt über Nullfolgen hergeleitet, ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Da $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n}$ gilt, ist also auch $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0.}$

Was ist falsch an folgender Überlegung? Da $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$ gilt, folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}}{\lim_{n\to\infty} n} = \frac{\infty}{\infty} = 1$, im Widerspruch zu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$.

(Die Rechenregeln gelten nur für konvergente Folgen, und mit Symbolen wie ∞ kann man nicht rechnen wie mit Zahlen.)

3.2 Geometrische Reihe

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $q \in \mathbb{R}_{\neq 1}$ ist die *geometrische Reihe* definiert als Summe $s_n := 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$. Wie kann man diese berechnen? Es ist $s_0 = 1$.

Trick: Berechne sukzessive
$(1 + q)(1 - q) = 1 - q + q - q^2 = 1 - q^2$
$(1 + q + q^2)(1 - q) = 1 - q + q - q^2 + q^2 - q^3 = 1 - q^3$
...
$(1 + q + q^2 + \cdots + q^n)(1 - q) = 1 - q^{n+1}$.

Hieraus folgt $\boxed{s_n := 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$ für $n \geqslant 0$.

Beispiel. Ratenzahlungen Sei K_n das Kapital nach n Jahren, und sei p der Zinssatz in Prozent. Sei $R > 0$ die feste Rate, die am Anfang eines Jahres auf ein Konto eingezahlt wird. Setzt man $q := 1 + \frac{p}{100}$ (vgl. auch Beispiel 5) oben zur Zinseszinsrechnung), so erhält man

$$\begin{aligned} K_1 &= Rq, \\ K_2 &= Rq + Rq^2, \\ K_3 &= Rq + Rq^2 + Rq^3, \\ &\vdots \\ K_n &= Rq + Rq^2 + \cdots + Rq^n. \end{aligned}$$

Der Kontostand am Anfang des $(n + 1)$-ten Jahres lautet damit:

$$\begin{aligned} R + K_n &= R + Rq + Rq^2 + \cdots + Rq^n \\ &= R(1 + q + q^2 + \cdots + q^n) \\ &= R\,\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \end{aligned}$$

Summenschreibweise

Für eine Summe $a_1 + \cdots + a_n$ schreiben wir als Abkürzung auch

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{oder} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Beispiele. 1) $s_n := 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$.

2) $\sum_{k=2}^{5} k^2 = 4 + 9 + 16 + 25$.

3) $\sum_{k=1}^{30} 2k = 2 + 4 + 6 + \cdots + 60$.

4) $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$.

5) *Im Alter von neun Jahren verblüffte* Johann Carl Friedrich Gauss *seinen Lehrer, als er die Zahlen von* 1 *bis* 100 *aufsummierte, indem er* 50 *mal den Summand* 101 *zusammenfasste.*

Gauss, 1777–1855

Analog gilt für die Summe der ersten 10 Zahlen:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} k &= 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 \\ &= \underbrace{(1+10)}_{11} + \underbrace{(2+9)}_{11} + \underbrace{(3+8)}_{11} + \underbrace{(4+7)}_{11} + \underbrace{(5+6)}_{11} \\ &= 5 \cdot 11 = 55\end{aligned}$$

3.3 Unendliche Reihen

Unendliche Reihen sind Beispiele für Folgen. Man geht von einer reellen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus und nennt die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der *„Partialsummen"*

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

eine *unendliche Reihe*. Man verwendet die Bezeichnung $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sowohl für die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, als auch für den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, falls er existiert.

Unendliche geometrische Reihe

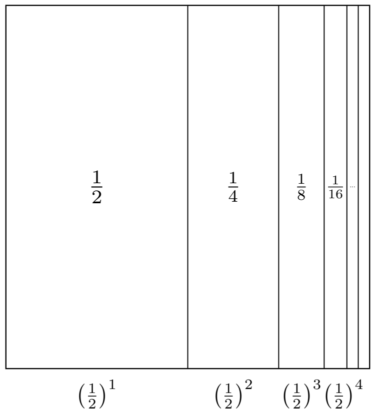
In 3.2 hatten wir $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für die geometrische Reihe ausgerechnet. Nach obigen Konvergenzkriterien gilt:

(1) Ist $-1 < q < 1$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$.

(2) Ist $q > 1$ oder $q < -1$, so divergiert die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Konvergiert die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so nennt man sie *unendliche geometrische Reihe*. Man schreibt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ oder $1 + q + q^2 + \ldots$.

Beispiele. 1) Für $q = \frac{1}{2}$ ist $1+q+q^2+\cdots = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$. Hieraus folgt: $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots = 2 - 1 = 1$, und das ist der Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seitenlänge 1:



Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge 1, also auch mit dem Flächeninhalt 1.
Halbiere die Fläche, halbiere die zweite Hälfte und halbiere dann stets das zuletzt entstandene Rechteck. Aufsummieren ergibt

$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots = 1$

2) Für $q = -\frac{1}{2}$ ist $1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

3) Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)}$? Berechne die Partialsummen:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{1\cdot(1+1)} = \frac{1}{2},\\
s_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot(2+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3+1}{6} = \frac{2}{3},\\
s_3 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3\cdot(3+1)} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{8+1}{12} = \frac{3}{4},\\
s_4 &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4\cdot(4+1)} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{15+1}{20} = \frac{4}{5},\\
&\vdots\\
s_n &= \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}$$

Es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$ nach Beispiel 1) für das Rechnen mit konvergenten Folgen in Abschnitt 3.1 und also $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1$.

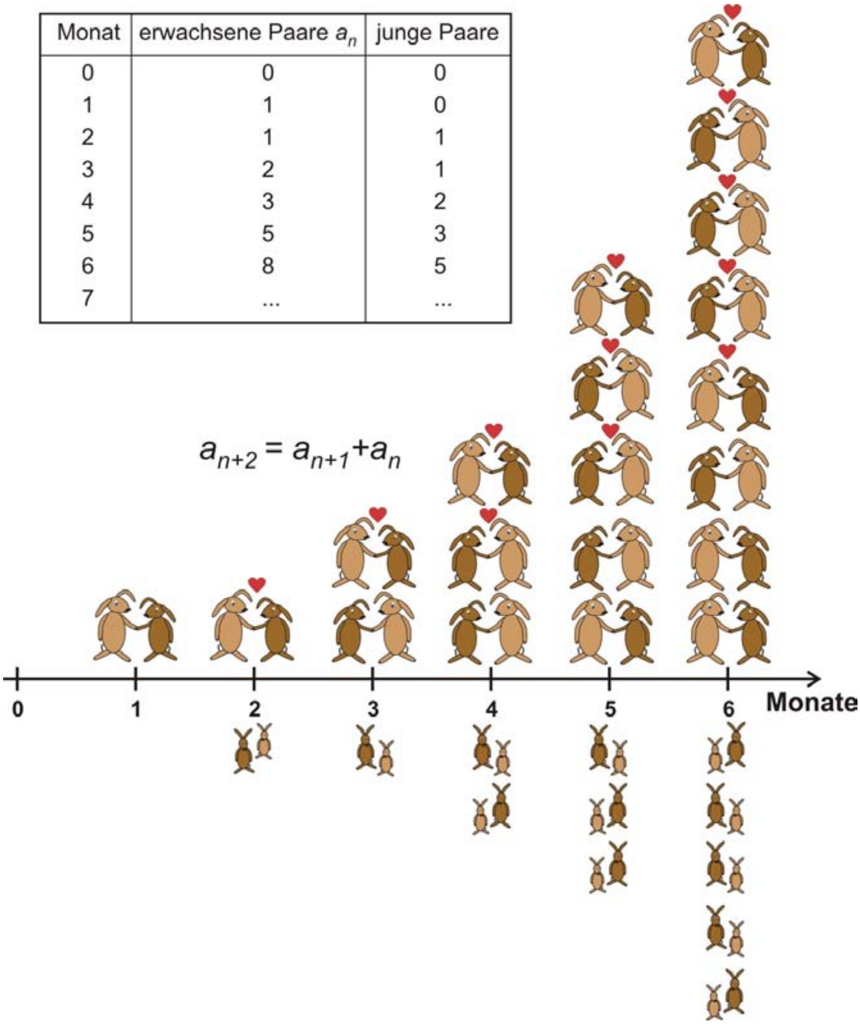
Wir schließen dieses Kapitel mit einem Anwendungsbeispiel für Folgen, in dem es um das *Fibonacci-Problem* mit einer Kaninchenpopulation geht.

3.4 Fibonacci-Folge

Modell. Kaninchen werden im Alter von einem Monat erwachsen und sind unsterblich. Jedes Kaninchenpaar hat zwei Monate nach der Geburt, sowie nach jedem weiteren Monat jeweils ein junges Kaninchenpaar als Nachwuchs.

Problem. Wie groß ist nach n Monaten die Anzahl a_n der erwachsenen Paare, wenn zur Zeit $t = 0$ kein Kaninchen in der Gegend ist und nach einem Monat ein Paar einwandert, das 1 Monat alt ist?

Monat	erwachsene Paare a_n	junge Paare
0	0	0
1	1	0
2	1	1
3	2	1
4	3	2
5	5	3
6	8	5
7	...	...



Leonardo Pisano
genannt Fibonacci
ca. 1180-1250

Die *Fibonacci-Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist durch $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ und rekursiv durch

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

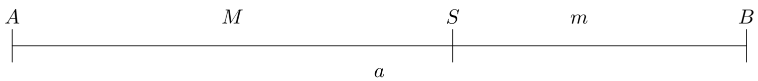
definiert. Es ist also $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$, $a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$, $a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$ und so weiter. Man erhält die Folge $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots)$. Sie ist unbeschränkt und also divergent. Die Folgenglieder werden auch *Fibonacci-Zahlen* genannt.

Teilt man jeweils eine Fibonacci-Zahl durch die vorangehende,

$$\begin{array}{lll}
\frac{1}{1} = 1 & \frac{2}{1} = 2 & \frac{3}{2} = 1{,}5 \\
\frac{5}{3} = 1{,}666\dots & \frac{8}{5} = 1{,}6 & \frac{13}{8} = 1{,}625 \\
\frac{21}{13} = 1{,}61538\dots & \frac{34}{21} = 1{,}61904\dots & \frac{55}{34} = 1{,}61764\dots \\
\frac{89}{55} = 1{,}61818\dots & \frac{144}{89} = 1{,}61797\dots & \frac{233}{144} = 1{,}6180556\dots \\
\dots & &
\end{array}$$

so konvergiert die Folge dieser Brüche gegen die Zahl des *Goldenen Schnitts*, d. h. es ist $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887$. Das ist die positive Lösung der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$. Diesen Zusammenhang führen wir nun noch etwas aus.

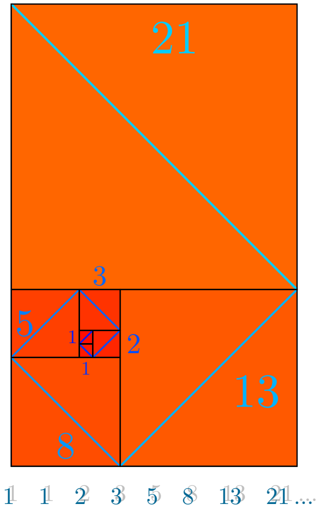
Sei d_n die Länge der Diagonalen eines Quadrats mit der Seitenlänge a_n. Dann ist $d_n = \sqrt{a_n^2 + a_n^2} = \sqrt{2}\,a_n$. Es folgt $\frac{d_{n+2}}{d_{n+1}} = \frac{\sqrt{2}\,a_{n+2}}{\sqrt{2}\,a_{n+1}} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$ und also $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{d_{n+2}}{d_{n+1}}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Das Verhältnis der Diagonalen zweier aufeinander folgender Quadrate nähert sich der Zahl des *Goldenen Schnitts* an. Sei a die Länge der Strecke $\overline{AB}$.



Ein Punkt S teilt diese im *Goldenen Schnitt*, wenn sich die größere Teilstrecke M zur kleineren Teilstrecke m verhält wie die Gesamtstrecke $a = M + m$ zu M, also wenn gilt:

$$\frac{M}{m} = \frac{a}{M} = \frac{M+m}{M} = 1 + \frac{m}{M}\ .$$

Sei $x := \frac{M}{m}$ und also $\frac{1}{x} = \frac{m}{M}$. Dann folgt $x = 1 + \frac{1}{x}$ und nach Multiplikation mit x die Gleichung $\boxed{x^2 - x - 1 = 0}$. Es ist also $\frac{M}{m} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ die Verhältniszahl des Goldenen Schnitts.



Betrachtet man das Gehäuse der *Nautilus-Schnecke*, so kann man die Fibonacci-Zahlen wiedererkennen.

(Foto aus dem Geowissenschaftlichen Zentrum der Universität Göttingen.)

3.5 Weiterführendes über Reihen (ergänzend)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Wir stellen hier drei Kriterien zusammen, mit Hilfe derer man erkennen kann, ob die zugehörige unendliche Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Es gibt aber noch mehr solcher Kriterien, vgl. [6].

1. Wenn die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann ist die Folge $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Zum Beispiel divergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, da die Folge $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}} = -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ divergiert und insbesondere keine Nullfolge ist.

2. Es gelte $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ beschränkt ist. Dies folgt aus den Konvergenzkriterien in 3.1.

   Hiermit lässt sich zeigen, dass die *harmonische Reihe* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist (siehe Aufgabe 27).

3. **Majorantenkriterium.** Sei $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe mit lauter nicht-negativen Gliedern, und es gelte $-c_n \leqslant a_n \leqslant c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.6 Aufgaben 21 – 28

Aufgabe 21. a) Bestimmen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 3n + 3}{3n^2 - n} \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^5 - 7n^2 + 4}{\frac{3}{2}n^5 + \sqrt{3}\,n^2 + n}.$$

b) Prüfen Sie, ob die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, und geben Sie den Grenzwert im Falle der Konvergenz an. Dabei sind a_n und b_n definiert durch:

$$a_n = \frac{2n^2 + 3}{n} \qquad \text{und} \qquad b_n = \frac{2n + 3}{n^2}.$$

Aufgabe 22. a) Benutzen Sie das Summenzeichen $\sum$, um die folgenden Summen aufzuschreiben:
$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12$ und $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81}$.

b) Prüfen Sie, ob die angegebenen geometrischen Reihen konvergieren, und geben Sie den Grenzwert im Falle der Konvergenz an:
$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{5}\right)^n$.

Aufgabe 23. (Anwendung)
In einem Labor wird ein Experiment mit einer Bakterienkultur vorgenommen. Dabei werden folgende Messergebnisse in regelmäßigen Zeitabständen von der Masse der Bakterienpopulation in Gramm (g) dokumentiert. Die ersten Messungen ergeben $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{2}{4}$, $a_4 = \frac{3}{5}$, $a_5 = \frac{4}{6}$ usw.

a) Erstellen Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die weitere Messergebnisse a_n liefern könnte.

b) Wie entwickelt sich langfristig die Masse unter der Annahme, dass das Experiment Ihr Ergebnis aus a) bestätigt? Gibt es eine obere Schranke für a_n? (Eine obere Schranke für a_n ist eine Zahl $M \in \mathbb{R}$, die $a_n \leqslant M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.)

Aufgabe 24. (Zur Wiederholung)
Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen:

(a) $x^2 - 16 = 0$ (b) $4x^2 - 16 = 0$
(c) $x^2 + 16 = 0$ (d) $x^2 + 8x + 16 = 0$

Aufgaben aus dem Kurs 2004/05

Aufgabe 25. Norbert gewinnt bei einem Quiz 7.500 Euro. Er legt seinen Gewinn bei einer Bank für zehn Jahre fest an mit einem Zinssatz von 5 %. Die Bank ihrerseits legt dieses Geld mit einem Zinssatz von 8,5 % an. Wie hoch ist Norberts Kapital nach 10 Jahren, und wieviel Euro hat die Bank nach 10 Jahren verdient?

Aufgabe 26. Prüfen Sie, ob die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und geben Sie den Grenzwert im Falle der Konvergenz an, für:

a) $x_n = \frac{4n^2-7n}{n^2-5}$,

b) $x_n = \frac{n^3-1000}{4n^3+20n^2}$,

c) $x_n = \frac{n^2+1}{n}$,

d) $x_n = \sqrt{n}$.

e) $x_n = \sqrt{\frac{1}{n}}$,

f) $x_n = \frac{2^n}{n!}$. (Es ist $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$)

g) $x_n = 10^{-n}$,

h) $x_n = \left(\sqrt{n(n+1)} - n\right)^{-1}$.

Aufgabe 27. Sei $\sum\limits_{n=1}^{m} \frac{1}{n} = s_m$. Erläutern Sie, dass

$$s_{2^m} > m \cdot \frac{1}{2} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}$$

gilt, und folgern Sie mit dem Konvergenzkriterium 2. aus 3.5, dass die harmonische Reihe divergiert.

Aufgabe 28. a) Erläutern Sie, dass $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{2}{n(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, und folgern Sie daraus mit Hilfe des Majorantenkriteriums, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

b) Sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Ermitteln Sie, ob die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ konvergiert.

4 Stetige Funktionen

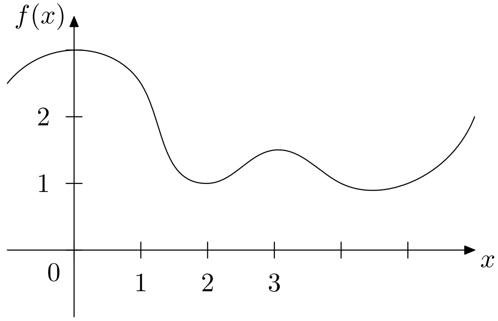
Seien X und Y Mengen, die nicht leer sind. In Kapitel 2 haben wir eine *Abbildung* definiert als eine Vorschrift, die jedem Element $x \in X$ *genau ein Element* $f(x) \in Y$ zuordnet, und die Schreibweise $f\colon X \to Y,\ x \mapsto f(x)$ eingeführt. Sind die Mengen X und Y Teilmengen von $\mathbb{R}$, so nennt man eine Abbildung $f\colon X \to Y$ auch eine *(reelle) Funktion.* Wir schreiben dann

$$f\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$$

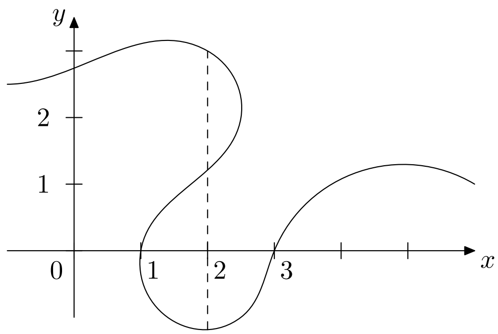
und nennen D den *Definitionsbereich* von f. Oft sind Funktionen lediglich durch ihre *Abbildungsvorschrift* (zum Beispiel $x \mapsto x^2 + 1$ oder $f(x) = 2x$) gegeben. Ihr Definitionsbereich ist dann die größtmögliche Teilmenge D von $\mathbb{R}$, für die die Abbildungsvorschrift sinnvoll ist.
Der *Graph* einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist die Menge aller geordneten Paare $(x, f(x))$ mit $x \in D$. Man schreibt dafür

$$\mathrm{Graph}(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D\}.$$

Zum Beispiel:



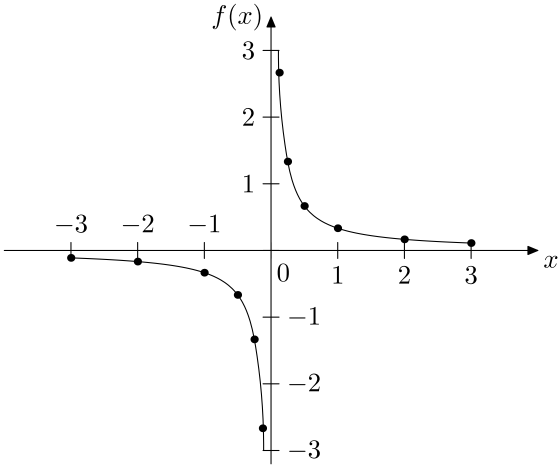
Es ist aber nicht jede Kurve im $\mathbb{R}^2$ Graph einer Funktion. Zum Beispiel ist



kein Graph, da unter anderem der Zahl 2 mehrere verschiedene Werte zugeordnet sind.

Beispiel. Betrachtet man die Abbildungsvorschrift $f(x) = \frac{1}{3x}$, dann ist der größtmögliche Definitionsbereich für f die Menge $\mathbb{R}_{\neq 0}$, denn der Nenner verschwindet für $x = 0$.
Um den Graph von f zu ermitteln, stellt man eine *Wertetabelle* auf.

x	$f(x) = \frac{1}{3x}$
0	nicht definiert
± 1	$\pm\frac{1}{3}$
± 2	$\pm\frac{1}{6}$
± 3	$\pm\frac{1}{9}$
$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{2}{3}$
$\pm\frac{1}{4}$	$\pm\frac{4}{3}$
$\pm\frac{1}{8}$	$\pm\frac{8}{3}$



4.1 Grenzwertbegriff bei Funktionen und Stetigkeit

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $D \subset \mathbb{R}$. Es gebe mindestens eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Eigenschaften

$$(*) \qquad x_n \in D \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Dann heißt eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ *Grenzwert einer Funktion* $\varphi : D \to \mathbb{R}$ an der Stelle a, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = c$ für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Eigenschaften $(*)$ gilt. Man schreibt dann

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = c.$$

Beispiel. Sei $a \in D_1 \subset \mathbb{R}$, und sei $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, wobei $f\colon D_1 \to \mathbb{R}$ differenzierbar sei und D aus D_1 durch Herausnahme des Punktes a entsteht. Dann ist

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

die *Ableitung* der Funktion f an der Stelle a.

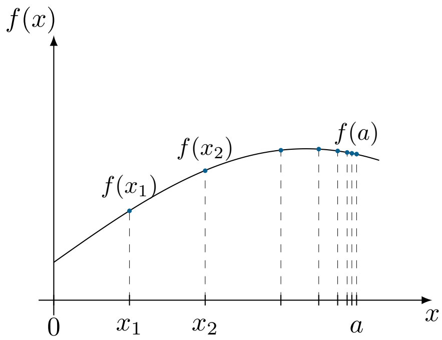
In Abschnitt 5.1 werden wir noch definieren, was unter einer „differenzierbaren Funktion“ $f\colon D_1 \to \mathbb{R}$ zu verstehen ist, nämlich dass der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$ tatsächlich für jedes $a \in D_1$ existiert.

Definition. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *stetig im Punkt* $a \in D$, falls

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

gilt. Ist f in jedem Punkt aus D stetig, so heißt f *stetig*.

Bemerkung. Da in der Definition $a \in D$ vorausgesetzt wird, gibt es stets eine Folge, die $(*)$ erfüllt, nämlich die Folge $(a, a, a, a, \ldots)$. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist also genau dann stetig in a, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ folgt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ gilt.

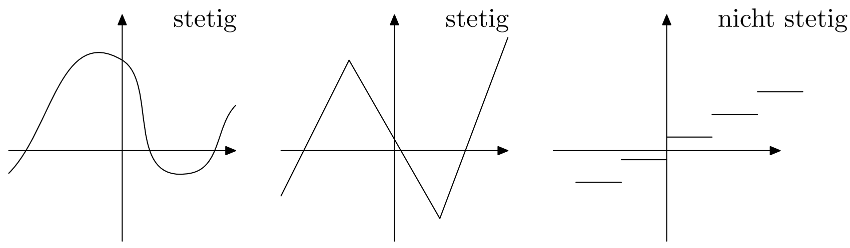


Beispiel. Alle *rationalen Funktionen*, d. h. alle Funktionen der Form

$$x \longmapsto \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$$

sind in ihrem Definitionsbereich stetig.

Ist D ein Intervall, so bedeutet Stetigkeit anschaulich, dass man den Graph in einem Strich durchzeichnen kann.



Rechenregeln für stetige Funktionen

1) Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$. Dann sind auch die Funktionen

$$f + g : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) + g(x) \text{ und } f \cdot g : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)g(x)$$

stetig in a. Gilt zusätzlich $g(a) \neq 0$, so ist auch die Funktion

$$\frac{f}{g} : \{x \in D \mid g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

stetig in a. (Diese Regeln ergeben sich aus den Rechenregeln für konvergente Folgen aus Abschnitt 3.1, weil Stetigkeit mittels konvergenter Folgen definiert ist.)

2) Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subset E$. Sei $a \in D$. Sind f in a und g in $f(a)$ stetig, so ist das Kompositum $g \circ f$ in a stetig.
(Es ist $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ für alle $x \in D$.)

Beispiel. Betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x$, und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto y^2$. Da beide Funktionen stetig sind, ist $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (3x)^2$ stetig.
(Dabei ist $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x) = (3x)^2$.)

Beispiele. 1) $\lim\limits_{x \to 3} (2x^2 + 1) = 19$.

2) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$, denn

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 \text{ und } \lim_{x \to 2} (x+2) = 4.$$

3) Es ist $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2 + x - 1}{4x^2 - 1} = \dfrac{3}{4}$. Denn offensichtlich ist $\frac{1}{2}$ eine Nullstelle des Zählers und des Nenners. Daher kann man $x - \frac{1}{2}$ kürzen. Es ist

$$(2x^2 + x - 1) : \left(x - \frac{1}{2}\right) = 2x + 2 = 2(x+1)$$

und

$$(4x^2 - 1) : \left(x - \frac{1}{2}\right) = 4x + 2 = 2(2x+1).$$

Daher folgt

$$\frac{2x^2 + x - 1}{4x^2 - 1} = \frac{(x+1)}{(2x+1)} \qquad \text{für } x \neq \frac{1}{2},$$

und also $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x^2+x-1}{4x^2-1} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(x+1)}{(2x+1)} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$.

4) Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{3x}$ hat für $x \to 0$ keinen Grenzwert.

5) Man bestimme den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 7} \frac{x^2-5x-14}{x^2-49}$, indem zunächst Zähler und Nenner in die Form $(x-a)(x-b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gebracht wird.

Für den Nenner gilt: $x^2-49 = (x-7)(x+7)$. Ermittle nun die Nullstellen des Zählers: Die Gleichung $x^2 - 5x - 14 = 0$ hat nach der „p, q-Formel“ am Ende von Abschnitt 1.4 die Lösungen $x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{56}{4}} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{9}{2}$ und also die Lösungen $x_1 = 7$ und $x_2 = -2$. Es ist also $x^2 - 5x - 14 = (x-7)(x+2)$, wie leicht durch Ausmultiplizieren von $(x-7)(x+2)$ bestätigt wird. Also ist $\lim\limits_{x \to 7} \frac{x^2-5x-14}{x^2-49} = \lim\limits_{x \to 7} \frac{(x-7)(x+2)}{(x-7)(x+7)} = \lim\limits_{x \to 7} \frac{x+2}{x+7} = \frac{9}{14}$.

4.2 Umkehrfunktion

In 2.1 haben wir schon den Begriff einer Umkehrabbildung eingeführt. Sei nun $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $f(D) := \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in D\}$ die *Bildmenge* von f. Dann heißt eine Funktion $u\colon f(D) \to \mathbb{R}$ *Umkehrfunktion* von $f\colon D \to f(D)$, wenn gilt:

$$u(f(x)) = x \text{ für alle } x \in D \quad \text{und} \quad f(u(y)) = y \text{ für alle } y \in f(D).$$

Nicht jede Funktion besitzt eine Umkehrfunktion. Z. B. besitzt die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $x \mapsto x^2$ keine Umkehrfunktion.

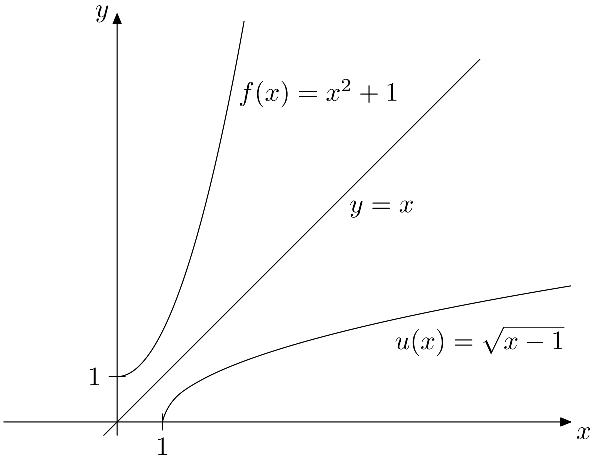
Wir führen nun den Begriff einer „streng monotonen Funktion“ ein, um damit dann ein Kriterium für Umkehrbarkeit zu formulieren.

Definition. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$, heißt *streng monoton wachsend,* wenn $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt; sie heißt *streng monoton fallend,* wenn $f(x_1) > f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt.
Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend oder streng monoton fallend, so heißt f *streng monoton.*

Wir nehmen nun an, dass der Definitionsbereich ein Intervall in $\mathbb{R}$ ist, etwa $D = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ oder z. B für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ das *abgeschlossene Intervall* $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

Kriterium für Umkehrbarkeit. Sei D ein Intervall in $\mathbb{R}$. Dann ist jede streng monotone Funktion $f\colon D \to f(D)$ *bijektiv* und besitzt also eine Umkehrfunktion $u\colon f(D) \to D$. Der Graph von u geht durch Spiegelung an der Geraden $y = x$ aus dem Graphen von f hervor.
Ist f streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend), so ist auch die Umkehrfunktion u streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend). Ist zudem f stetig, so ist auch u stetig.

Beispiel 1. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 1},\ x \mapsto x^2+1$ ist streng monoton wachsend und hat die Umkehrfunktion $u\colon \mathbb{R}_{\geqslant 1} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0},\ x \mapsto \sqrt{x-1}$.



Die Standardbezeichnung für die Umkehrfunktion von f ist f^{-1}. Wegen der Verwechslungsgefahr mit der Funktion $\frac{1}{f}$ verwenden wir lieber die Bezeichnung u oder u_f für die Umkehrfunktion von f.

Beispiel 2. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0},\ x \mapsto x^n$ ist streng monoton wachsend und hat die *n-te Wurzel*

$$u\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0},\ x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

als Umkehrfunktion. Ist n ungerade, so ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$ streng monoton wachsend mit einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Umkehrfunktion $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

4.3 Lineare Funktionen

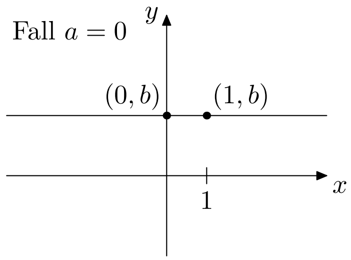
Eine Funktion der Form

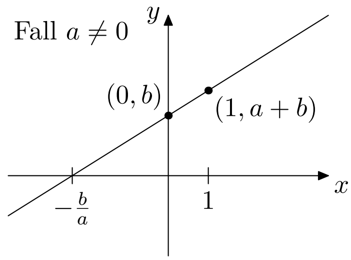
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax+b,$$

mit vorgegebenen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ nennt man eine *lineare Funktion.* Lineare Funktionen sind stetig. Der Graph von f

$$\mathrm{Graph}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

beschreibt eine Gerade. Diese Gerade geht durch die Punkte $(0, f(0)) = (0, b)$ und $(1, f(1)) = (1, a+b)$:





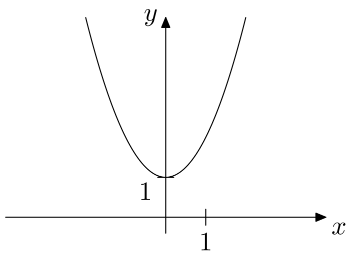
Ist $a = 0$, dann ist f die *konstante Funktion* mit $f(x) = b$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $a > 0$ ist f streng monoton wachsend, für $a < 0$ streng monoton fallend. Ist $a \neq 0$, dann erhält man die *Nullstelle* $x = -\frac{b}{a}$ von f durch Lösen der Gleichung $f(x) = 0$.
Wenn $a \neq 0$ ist, dann ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto ax + b$, bijektiv und besitzt also eine Umkehrfunktion. Um sie zu bestimmen, löst man die Gleichung $f(x) = y$ nach x auf: Aus $ax + b = y$ folgt $x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$. Also ist

$$(*) \qquad u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ y \mapsto \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$$

die Umkehrfunktion von f, denn es ist $u(f(x))) = u(y) = x$ und $f(u(y)) = f(\frac{1}{a}y - \frac{b}{a}) = a(\frac{1}{a}y - \frac{b}{a}) + b = y - b + b = y$. In $(*)$ kann man dann den Buchstaben y durch x ersetzen. Die Funktion u ist ebenfalls linear. Ihr Graph beschreibt eine Gerade durch die Punkte $(0, u(0)) = (0, -\frac{b}{a})$ und $(b, u(b)) = (b, 0)$.

4.4 Quadratische Funktionen

Funktionen von der Form $\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax^2 + bx + c}$ mit vorgegebenen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ bezeichnet man als *quadratische Funktionen.* Quadratische Funktionen sind stetig.
Ein Beispiel ist die Funktion f, die durch $f(x) = x^2 + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben ist.



Diese Funktion hat keine Nullstelle in $\mathbb{R}$. Außerdem gilt $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. In welchem Bereich ist f umkehrbar? Schränkt man f auf diejenigen $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geqslant 0$ ein, dann ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 1}, \quad x \mapsto x^2 + 1,$$

streng monoton wachsend und besitzt, wie in Beispiel 1 in 4.2 dargestellt, die Umkehrfunktion

$$u : \mathbb{R}_{\geqslant 1} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}, \quad x \mapsto \sqrt{x-1}.$$

4.5 Gerade und ungerade Funktionen

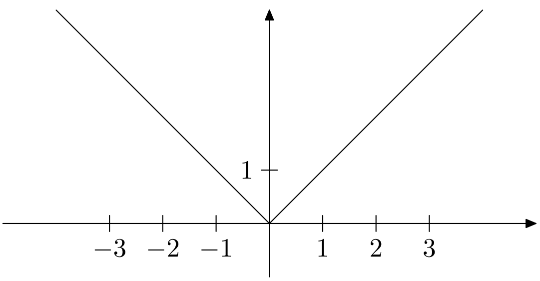
Sei $D \subset \mathbb{R}$ und gelte für $x \in D$ auch $-x \in D$. Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, heißt

- *gerade,* wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$ gilt,
- *ungerade,* wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

Beispiele. 1. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 1$, ist gerade.

2. Die Funktion $f : \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{3x}$ ist ungerade.
3. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + x + 1$ ist weder gerade noch ungerade, denn z. B. gilt $f(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$ und $f(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$, also $f(-1) \neq f(1)$. Daher ist f nicht gerade. Ferner gilt $f(-1) = 1 \neq -3 = -f(1)$. Also ist f auch nicht ungerade.
4. Die *Betragsfunktion* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $x \mapsto |x|$, ist eine stetige Funktion. Sie ist definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{, falls } x \geqslant 0, \\ -x & \text{, falls } x < 0. \end{cases}$$

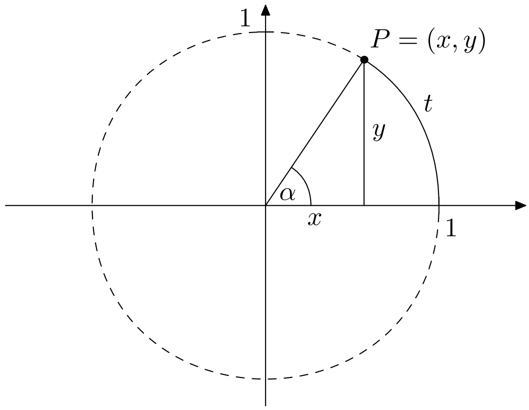


Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x| = |-x|$. Also ist die Betragsfunktion eine gerade Funktion.

Bemerkung. Wenn f eine gerade Funktion ist, so ist der Graph von f symmetrisch zur y-Achse wie bei der Betragsfunktion. Wenn f ungerade ist, dann ist der Graph symmetrisch zum Nullpunkt.

4.6 Sinus und Cosinus

Wir betrachten einen Kreis mit Radius 1 und einen Punkt $P = (x, y)$ auf dem Kreis.



Dann hängen die Koordinaten x und y von P von der Größe des Winkels α ab. In der Mathematik ist es allerdings gebräuchlicher, diese Abhängigkeit als Abhängigkeit von der *Bogenlänge* t anzugeben. Wir schreiben deswegen $x = x(t)$ und $y = y(t)$.
Während der Winkel α in Grad gemessen wird (von $0°$ bis $360°$), ist die Bogenlänge eine reelle Zahl. Sie kann alle Werte von 0 bis 2π (der Länge des Kreisumfangs) annehmen. Wir definieren

$$\cos(t) := x(t) \qquad \text{und} \qquad \sin(t) := y(t)$$

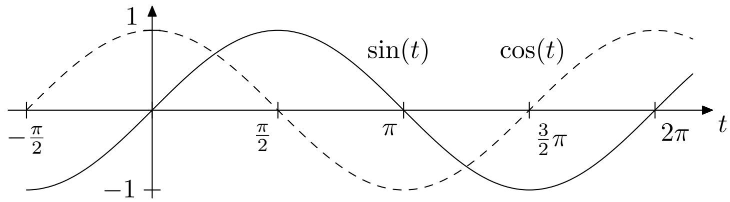
und erhalten Funktionen

$$\cos\colon\ [0, 2\pi[\ \to \mathbb{R},\ t \mapsto \cos(t) \qquad \text{und} \qquad \sin\colon\ [0, 2\pi[\ \to \mathbb{R},\ t \mapsto \sin(t).$$

Hierbei ist $[0, 2\pi[\ := \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant t < 2\pi\}$ das halboffene Intervall zwischen 0 (eingeschlossen) und 2π (ausgeschlossen). Man dehnt nun den Definitionsbereich von sin und cos auf ganz $\mathbb{R}$ aus und erhält die stetigen Funktionen $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dafür definiert man:

$$\begin{aligned} \cos(t + 2\pi n) &= \cos(t) \\ \sin(t + 2\pi n) &= \sin(t) \end{aligned} \qquad \text{für alle } t \in [0, 2\pi[\ \text{ und für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

In der Anschauung entspricht das der Bogenlänge bei mehrmaligem Durchlaufen des Kreisumfangs. Da sich die Werte von sin und cos regelmäßig wiederholen, nennt man diese Funktionen *periodisch* mit der *Periode* 2π.



Die periodischen Funktionen sin und cos eignen sich zum Beispiel dafür, Schwingungsvorgänge oder die Ausbreitung von Wellen zu beschreiben.

Weitere Eigenschaften

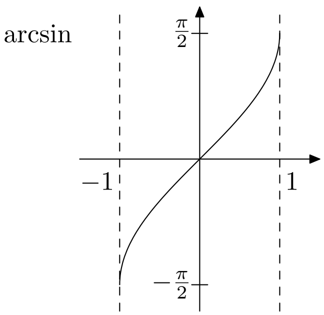
(1) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $-1 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$ und $-1 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$.

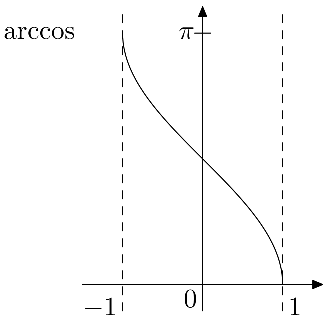
(2) Es ist $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ nach dem Satz von Pythargoras.

(3) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(t) = -\sin(-t)$ und $\cos(t) = \cos(-t)$. Das heißt sin ist eine ungerade Funktion und cos ist eine gerade Funktion.

Die Umkehrfunktionen arcsin und arccos

Im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\}$ ist die Funktion sin streng monoton wachsend, und die Funktion $\sin\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ hat die Umkehrfunktion $\arcsin\colon [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, genannt *Arcus-Sinus.*
Die Funktion cos ist im Intervall $[0, \pi] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$ streng monoton fallend, und die Funktion $\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ hat die Umkehrfunktion $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, genannt *Arcus-Cosinus.*





Additionstheoreme Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten die *Additionstheoreme:*

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$
$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

Tangens und Arcus-Tangens

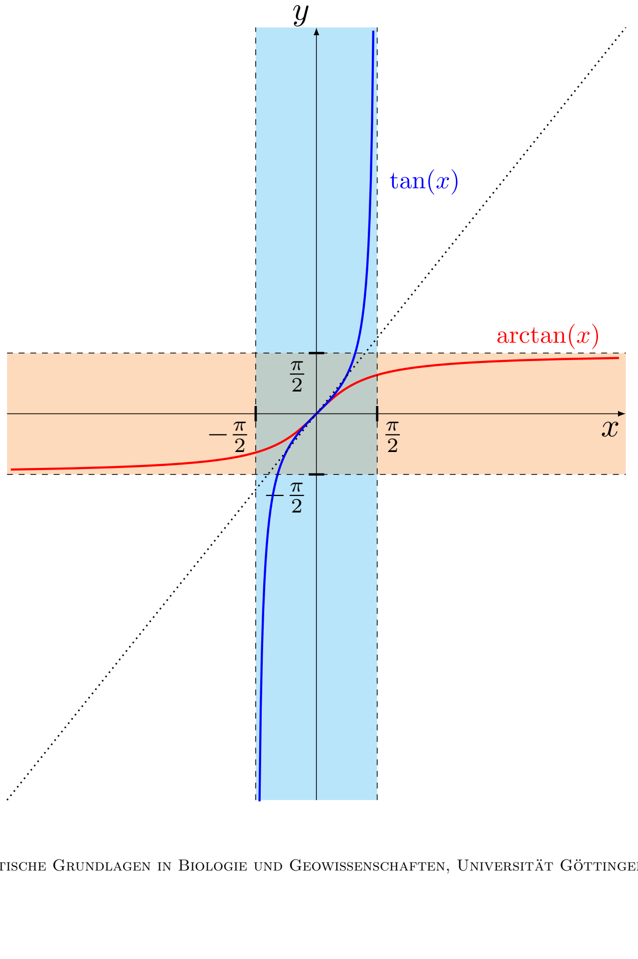
Die Funktion cos ist im offenen Intervall $\left]\ \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[= \{x \in \mathbb{R} \mid \ \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$ ungleich Null. In diesem Intervall ist demnach der Quotient $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ definiert. Die Funktion

$$\tan\colon \left]\ \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$

ist stetig und streng monoton wachsend. Ihre Umkehrfunktion

$$\arctan\colon \mathbb{R} \to \left]\ \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

wird *Arcus-Tangens* genannt.



4.7 Die Exponentialfunktion

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Man beweist das mit dem sogenannten „Quotientenkriterium“. Es ist

$$e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

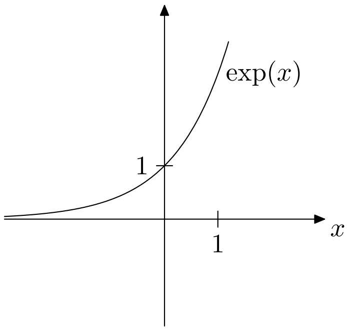
die berühmte EULER*sche Zahl* $e \approx 2{,}718281828$. Die *Exponentialfunktion*

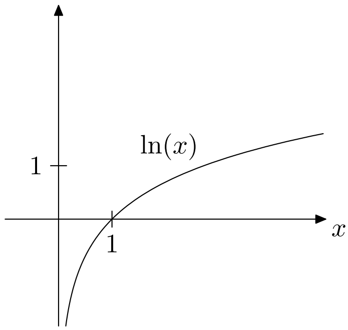
$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, \quad x \mapsto \exp(x),$$

ist stetig und streng monoton wachsend. Ihre Umkehrfunktion

$$\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x),$$

heißt *natürlicher Logarithmus.*





Es gilt $\exp(0) = 1 = e^0$, also $\ln(1) = 0$, und $\boxed{\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ sowie $\boxed{\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Allgemeiner gelten die „Funktionalgleichungen“

$$\begin{array}{llcll} (1) & \exp(x+y) & = & \exp(x) \cdot \exp(y) & \text{für alle } x, y \in \mathbb{R} \\ (2) & \ln(x \cdot y) & = & \ln(x) + \ln(y) & \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}_{>0} \end{array}$$

Man sieht hieran, dass die Exponentialfunktion Addition in Multiplikation überführt, und dementsprechend führt ihre Umkehrfunktion Multiplikation in Addition über. Dabei gilt $\boxed{\ln\left(\frac{y}{x}\right) = \ln(y) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(y) - \ln(x)}$.

Aus (1) folgt

$$\begin{aligned}\exp(n) &= \exp(\underbrace{1+\cdots+1}_{n \text{ mal}}) = \underbrace{\exp(1)\cdots\exp(1)}_{n \text{ mal}}\\ &= (\exp(1))^n = e^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

sowie

$$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = e^{-n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Allgemeiner gilt:

$$e^{\frac{m}{n}} = (e^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e^m} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N}.$$

Daher schreibt man gewöhnlich e^x statt $\exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es ist dann

(1′) $$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

Da ln die Umkehrfunktion von exp ist, gelten die *Umkehrbeziehungen*:

(3) $$e^{\ln(x)} = x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{>0}$$

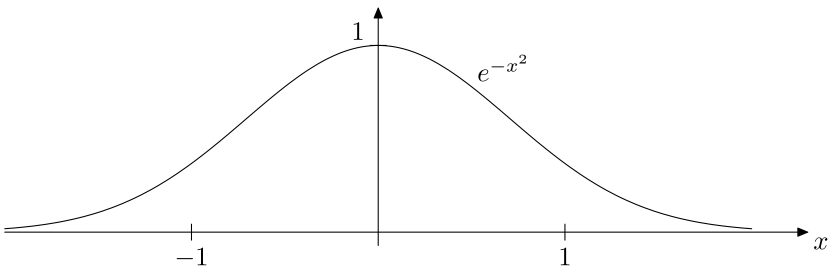
(4) $$\ln(e^x) = x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

vergleiche Abschnitt 4.2. Im folgenden Beispiel sei $y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Beispiel. Man löse die Gleichung $\ln(2y) = e^{5x}$ nach y auf:

$$\ln(2y) = 5x \implies e^{\ln(2y)} = e^{5x} \overset{(3)}{\implies} 2y = e^{5x} \implies y = \tfrac{1}{2}e^{5x}.$$

4.8 Gaußsche Glockenkurve



Für die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x^2}$, gilt $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0$, und da sie eine gerade Funktion ist auch $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^2} = 0$. Sie wird vor allem in der Stochastik leicht modifiziert als „Normalverteilung“ benutzt:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

4.9 Allgemeine Potenz

Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ vorgegeben. Setze

$$a^x := e^{x\ln(a)} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Für $x = n \in \mathbb{N}$ ist dies die übliche Potenz a^n, denn

$$\begin{aligned} e^{n\ln(a)} &= e^{\ln(a)+\cdots+\ln(a)} && (n \text{ Summanden}) \\ &= e^{\ln(a)} \cdots e^{\ln(a)} && \text{nach (1) aus 4.7} \\ &= a \cdots a && \text{wegen } e^{\ln(a)} = a \\ &= a^n. \end{aligned}$$

Für $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gelten die *Potenzregeln*:

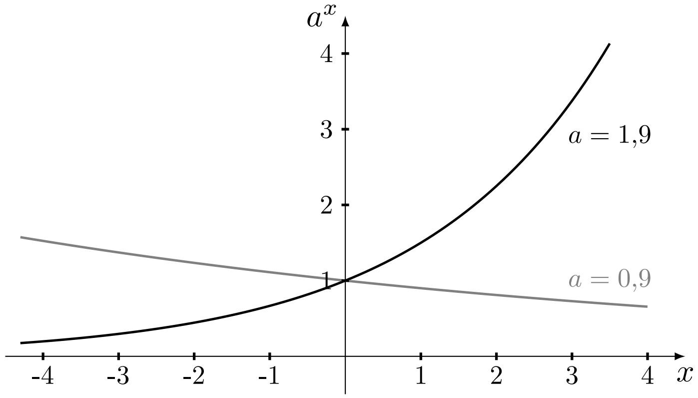
$$(a^x)^y = a^{xy} \tag{6}$$

$$a^x b^x = (ab)^x \tag{7}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x} \tag{8}$$

$$\ln(a^x) = x\ln(a) \tag{9}$$

Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto a^x$, ist stetig. Sie ist für $a > 1$ streng monoton wachsend und für $0 < a < 1$ streng monoton fallend.



Ihre Umkehrfunktion $\log_a : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log_a(x)$, heißt *Logarithmus zur Basis a*. Es gilt $\ln = \log_e$.

Die allgemeine Potenz tritt bei Wachstums- und Zerfallsphänomenen auf. Sei B_0 der Anfangsbestand, und sei B_x der Bestand nach x Zeiteinheiten.

Nimmt der Bestand in jeder Zeiteinheit um $p\,\%$ zu, so ist

$$B_x = B_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x .$$

Im Gegensatz zur Zinseszinsberechnung (Beispiel 5 in 3.1) ist hier $x \in \mathbb{R}_{>0}$ zugelassen. Nimmt der Bestand in jeder Zeiteinheit um $p\,\%$ ab, so ist

$$\begin{aligned} B_x &= B_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x \\ &= B_0\, e^{x \ln(a)} \quad \text{mit } \; a = 1 - \frac{p}{100} \quad \text{(vgl. (5))} \\ &= B_0\, e^{-\beta x} \quad \text{mit } \; \beta = -\ln(a)\,. \end{aligned}$$

Hierbei ist $0 < p < 100$ und also die *Zerfallskonstante* $\beta > 0$.

Die *Halbwertszeit* beim radioaktiven Zerfall ist die Zeit t, nach der die Anfangsmasse B_0 einer radioaktiven Substanz zur Hälfte zerfallen ist. Es gilt also $B_t = B_0 \cdot \frac{1}{2}$. Und da nach Obigem $B_t = B_0\, e^{-\beta t}$ ist, folgt

$$B_0\, e^{-\beta t} = B_0 \cdot \frac{1}{2} \qquad \text{und also} \qquad e^{-\beta t} = \frac{1}{2}\,.$$

Um die Halbwertszeit t zu ermitteln, hat man also die rechte Gleichung nach t aufzulösen: Anwenden des Logarithmus' auf beiden Seiten ergibt $-\beta t = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln(2)$ nach Umkehrregel (4) und da $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$ für $a > 0$ gilt. Es folgt $t = \frac{\ln(2)}{\beta}$. Ist die Halbwertszeit t bekannt, so erhält man die Zerfallskonstante β durch $\beta = \frac{\ln(2)}{t}$. Dies wenden wir nun an.

Beispiel. Das Isotop Plutonium-239 hat eine Halbwertszeit von $t = 24.110$ Jahren. Wieviel Prozent davon sind nach 100 Jahren zerfallen?
Es ist $\beta = \frac{\ln(2)}{24110} \approx 0{,}00002875$. Nach obigem Zerfallsgesetz gibt es nach 100 Jahren noch den Bestand $B_{100} = B_0\, e^{-\beta \cdot 100} \approx 0{,}997 \cdot B_0$, das sind 99,7 %. Also sind etwa 0,3 % zerfallen.

4.10 Aufgaben 29 – 47

Blatt 1 mit vier Aufgaben zu Kapitel 4

Aufgabe 29. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, eine Funktion. Bestimmen Sie in den folgenden Fällen den größtmöglichen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \frac{3x}{x^2+5}$, b) $f(x) = \frac{x-3}{x+x^2}$,

c) $f(x) = \sqrt{x-2}$, d) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$.

Aufgabe 30. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Dabei sind im zweiten Fall zunächst Zähler und Nenner auf die Form $(x-a)(x-b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ zu bringen:

$$\lim_{x \to -6} \frac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - 36} \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to \frac{1}{3}} \frac{x^2 + \frac{8}{3}x - 1}{x^2 - \frac{1}{9}}$$

Aufgabe 31. (Anwendung)
Es gibt Organismen, die sich schwer an veränderte Umweltbedingungen anpassen können, sog. strikte Konformer K. Beispielsweise kann die Seespinne (Osmokonformer) sich nicht aktiv osmoregulieren, d. h. sie ist auf einen stabilen Salzgehalt im Wasser angewiesen. Bei steigendem Salzgehalt in der Umgebung gibt sie mehr Wasser an diese ab, so dass sie im Körperinneren einen höheren Salzgehalt erzeugt (extrem schwankende Salzgehaltänderungen im Wasser können tödlich für sie sein). Im Gegensatz dazu können die sog. strikten Regulierer R ein konstantes inneres Milieu unabhängig vom äußeren Milieu aufrecht erhalten. Ein Beispiel stellt der Lachs dar, der im salzhaltigen Meer lebt und zum Laichen in Süßgewässer wechselt (Osmoregulierer).

a) Skizzieren Sie für beide Organismen einen möglichen Graphen, der den Zusammenhang zwischen dem Salzgehalt im Körper (y-Achse) und dem Salzgehalt im umgebenden Wasser (x-Achse) darstellt.
b) Finden Sie eine Abbildungsvorschrift für Ihre beiden Graphen aus Aufgabenteil a).
c) Begründen Sie, unter welchen Lebensbedingungen welche der Lebensformen die günstigere ist.

Aufgabe 32. (Zur Wiederholung)
Bringen Sie die folgenden komplexen Zahlen auf die Form $r + si$ mit $r, s \in \mathbb{R}$.

(a) $i^3 + i^5$ (b) $i^3 + i^6$
(c) $\frac{1}{1+i}$ (d) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2$

Blatt 2 mit vier Aufgaben zu Kapitel 4

Aufgabe 33. Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln\left(\frac{2}{5x}\right)$.

a) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $y \mapsto u(y)$, von f.
b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis aus a), indem Sie nachrechnen, dass tatsächlich $u(f(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und $f(u(y)) = y$ für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 34. Sei $D \subset \mathbb{R}$. Für jedes $x \in D$ sei auch $-x \in D$. Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Funktionen f gerade oder ungerade oder keines von beidem sind, indem Sie stets zunächst $f(-x)$ berechnen:

a) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+2}$ für $D = \mathbb{R}$, b) $f(x) = x\,e^x$ für $D = \mathbb{R}$,

c) $f(x) = \frac{x^4}{1+x^2}$ für $D = \mathbb{R}$, d) $f(x) = \tan(x)$ für $D = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Aufgabe 35. (Anwendung)
Die Zellmembran besteht aus einer Lipid-Doppelschicht. Sie ist durchzogen von Ionenkanälen und Transportproteinen, wie z.B. Aquaporinen. Die Ionen erzeugen aufgrund ihrer Ladung einen elektrochemischen Konzentrationsgradienten. Die am häufigsten transportierten Ionen sind Na^+ und K^+. Die intrazelluläre K^+-Konzentration ist um das 20-fache höher als die extrazelluläre.
Bei Na^+ ist die Konzentration außerhalb der Zelle um das 15-fache höher als innerhalb der Zelle.
Das Gleichgewichtspotential E_X eines Ions X ist definiert durch die *Nernst'sche Gleichung*

$$E_X = 25{,}26\,\text{mV} \cdot (\ln[X]_e - \ln[X]_i).$$

Hierbei bezeichnet $[X]_e$ die extrazelluläre (außerhalb der Zelle) Konzentration des Ions X und $[X]_i$ die intrazelluläre (innerhalb der Zelle).

a) Wie oben angegeben, sind die extra- und die intrazelluläre Konzentrationen $[X]_e$ und $[X]_i$ proportional zueinander. Stellen Sie jeweils die entsprechende Gleichung für $X = K^+$ und $X = Na^+$ auf.

b) Berechnen Sie jeweils das Gleichgewichtspotential E_X für $X = Na^+$ und $X = K^+$.

Aufgabe 36. (Zur Wiederholung)

(a) Prüfen Sie folgenden Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:
i) $a_n = \frac{n}{n+1}$ ii) $b_n = \frac{n^2+2n+1}{n+1}$

(b) Überprüfen Sie Folgendes durch Berechnung beider Seiten:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)^n \neq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Aufgaben aus dem Kurs 2004/05

Aufgabe 37. Zeichnen Sie den Graph für $f(x) = \dfrac{2x-2}{x^2-2x-3}$.

Aufgabe 38. Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion $x \mapsto f(x)$, wenn

a) $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$, b) $f(x) = \frac{x-3}{x-x^3}$,

c) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$, d) $f(x) = \frac{x^2}{4x^2-16}$.

Aufgabe 39. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to-3} \frac{x^2-9}{x+3}$, b) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{3x^2+5x-2}{4x^2+9x+2}$,

c) $\lim\limits_{x\to25} \frac{\sqrt{x}-5}{x-25}$, d) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$,

e) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin^2(x)}{x}$. Hierbei bedeutet $\sin^2(x) := \sin(x)\cdot\sin(x)$.

Aufgabe 40. Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion $f : x \mapsto \sqrt{1+\sin^2(x)}$ und ermitteln Sie, in welchen Punkten f stetig ist.

Aufgabe 41. Untersuchen Sie, ob die Funktion f (streng) monoton wachsend oder fallend ist.

a) $f(x) = x^4$, b) $f(x) = x^3 + 2x$,

c) $f(x) = \sqrt{x-1}$ für $x \geqslant 1$, d) $f(x) = |x^2-2x+1|$ für $x \geqslant 1$.

Aufgabe 42. Untersuchen Sie, ob die Funktion f in ihrem größtmöglichen Definitionsbereich gerade oder ungerade ist, in den Fällen:

a) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$, b) $f(x) = \sin(x)\cdot\cos(x)$,

c) $f(x) = \frac{x^2-1}{1+x^2}$, d) $f(x) = 4\cdot\sin^2(x)$.

Aufgabe 43. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von $f : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto f(x)$, in den Fällen:

a) $f(x) = \frac{1}{2x}$, b) $f(x) = \sqrt{3x}$.

Aufgabe 44. Die *hyperbolischen* Funktionen sind definiert durch
$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cosh(x) := \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ *(Cosinus hyperbolicus)*
und $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sinh(x) := \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ *(Sinus hyperbolicus).*
Verifizieren Sie die folgenden *Additionstheoreme* für die hyperbolischen Funktionen durch Einsetzen obiger Definitionen und Anwendung der Funktionalgleichung $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$:

a) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$,

b) $\sinh(x+y) = \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y)$,

Aufgabe 45. a) Zeichnen Sie den Graph von cosh und von sinh .

b) Nach 4.7 ist $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.
Ermitteln Sie daraus die Reihendarstellung für cosh und für sinh .

Aufgabe 46. Verifizieren Sie die Gleichung

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 .$$

Hierbei bedeutet $\sinh^2(x) := \sinh(x) \cdot \sinh(x)$ und $\cosh^2(x) := \cosh(x) \cdot \cosh(x)$.

Aufgabe 47. a) Eine Bakterienkultur vermehrt sich in jeder Stunde um 60 %. Am Anfang sind 1000 Bakterien vorhanden. Wieviele sind es nach 8,4 Stunden?

b) Eine radioaktive Substanz nimmt pro Minute um 3 % ab. Nach wieviel Minuten ist sie zur Hälfte zerfallen?

c) Welche Halbwertzeit hat eine radioaktive Substanz, die nach 20 Tagen zu 70 % zerfallen ist?

5 Differentialrechnung

5.1 Differenzierbarkeit

Wir benutzen den Grenzwertbegriff aus Abschnitt 4.1. Sei $x_0 \in D_1 \subset \mathbb{R}$ und $f\colon D_1 \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist der *Differenzenquotient*

$$\varphi(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

für alle $x \in D$ definiert, wobei D aus D_1 durch Herausnahme des Punktes x_0 entsteht. Dadurch erhalten wir eine Funktion $\varphi\colon D \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \varphi(x)$.

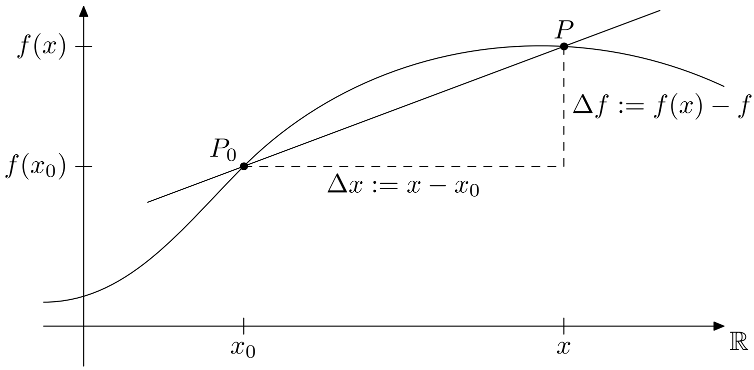
Definition. Die Funktion $f\colon D_1 \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar* im Punkt x_0, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$$

existiert. In diesem Fall heißt die Zahl $f'(x_0)$ der *Differentialquotient* oder die *Ableitung von f an der Stelle x_0*. Ist f in jedem Punkt $x_0 \in D_1$ differenzierbar, so wird f eine *differenzierbare Funktion* genannt.

Geometrische Interpretation

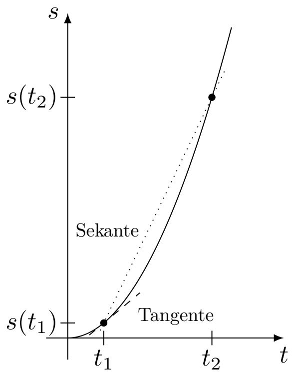
Wir betrachten zwei Punkte $P_0 = (x_0, f(x_0))$ und $P = (x, f(x))$ mit $x_0 \neq x$ in Graph(f). Dann wird durch P_0 und P eine Gerade festgelegt, die man *Sekante* von Graph(f) durch die Punkte P_0 und P nennt.



Der Differenzenquotient, der auch bezeichnet wird als

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,,$$

beschreibt die Steigung der Sekante durch die Punkte P_0 und P. Er gibt die *mittlere Änderungsrate* der Funktion im Intervall $[x_0, x]$ an.
Für $x \to x_0$ geht die Sekante in die Tangente im Punkt P_0 über, und der Differentialquotient beschreibt die Steigung der Tangente im Punkt P_0.



Beispiel. Ein Teilchen bewege sich entlang einer Geraden. Sei $s(t)$ die Länge der zur Zeit t zurückgelegten Strecke, gemessen von einem festen Bezugspunkt $s(t_0)$ zum Zeitpunkt $t_0 = 0$. Dann ist $\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$ die Länge der im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ zurückgelegten Strecke, und der Differenzenquotient $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$ ist die *mittlere Geschwindigkeit* des Teilchens im Intervall $[t_1, t_2]$. Der Differentialquotient $\frac{ds}{dt}(t_1) = s'(t_1) = \lim\limits_{t_2 \to t_1} \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$ ist dann die *Geschwindigkeit* des Teilchens zum Zeitpunkt t_1.

Die „h-Regel“

Setzt man im Differenzenquotienten $h := x - x_0$, so folgt $x = x_0 + h$ und

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \,.$$

Ist f in x_0 differenzierbar, so folgt

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \,.$$

Hierin ersetzt man dann den Buchstaben x_0 durch x und spricht von Differenzierbarkeit in x.

Bemerkung 1. Jede differenzierbare Funktion ist stetig. Aber nicht jede stetige Funktion ist differenzierbar, wie beispielsweise die Betragsfunktion

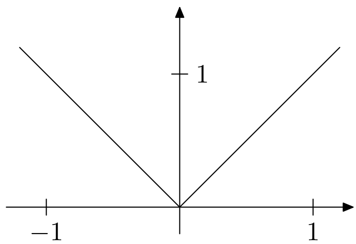
$$|\;| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x| = \begin{cases} x\,, & \text{falls } x \geqslant 0, \\ -x\,, & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

zeigt. Sie ist stetig, jedoch nicht differenzierbar im Punkt $x_0 = 0$.

Man zeigt dies mit der Nullfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $h_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, die abwechselnd positive und negative Werte annimmt. Es gilt

$$\frac{|0 + h_n| - |0|}{h_n} = \frac{\frac{1}{n} - 0}{(-1)^n \frac{1}{n}} = (-1)^n.$$

Da die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, existiert der Differentialquotient nicht.



5.2 Beispiele differenzierbarer Funktionen

1) Die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$, ist differenzierbar mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, denn für $h \neq 0$ ist
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = \frac{0}{h} = 0,$$
und damit $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$.

2) Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$, ist differenzierbar mit $\exp'(x) = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, denn mit der Reihendarstellung $\exp(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ folgt
$$\begin{aligned}\frac{e^{x+h} - e^x}{h} &= \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \frac{(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots) - 1}{h} \\ &= e^x (1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \frac{h^3}{4!} + \dots).\end{aligned}$$
Also ist
$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} &= \lim_{h \to 0} e^x (1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \frac{h^3}{4!} + \dots) \\ &= e^x (1 + \frac{0}{2!} + \frac{0^2}{3!} + \frac{0^3}{4!} + \dots) = e^x \cdot 1 = e^x.\end{aligned}$$

3) Mit Hilfe der Additionstheoreme für $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zeigt man, dass beide Funktionen differenzierbar sind mit
$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \cos'(x) = -\sin(x).$$

4) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax$, mit $a \in \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit $f'(x) = a$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Denn für $h \neq 0$ ist
$$\frac{a \cdot (x+h) - ax}{h} = \frac{ah}{h} = a$$
und $\lim\limits_{h \to 0} a = a$.

5) Die quadratische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, ist differenzierbar mit $f'(x) = 2x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, denn für $h \neq 0$ ist
$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x + h$$
und $\lim\limits_{h \to 0} (2x + h) = 2x$.

6) Allgemeiner ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$, für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ differenzierbar mit $f'(x) = nx^{n-1}$.

5.3 Differentiationsregeln

Differenzieren ist additiv, aber nicht multiplikativ. An die Stelle der Multiplikativität tritt die unten stehende *Produktregel.* Sei $D_1 \subset \mathbb{R}$, und seien $u, v : D_1 \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Dann gelten:

1) **Linearität:** Die Funktionen $u + v : D_1 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto u(x) + v(x)$, und $a \cdot u : D_1 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a \cdot u(x)$ für festes $a \in \mathbb{R}$, sind differenzierbar mit

$$(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x) \quad \text{und} \quad (a \cdot u)'(x) = a \cdot u'(x).$$

   D. h. Additivität und „einen konstanten Faktor kann man vorziehen“.

2) **Produktregel:** Die Funktion $u \cdot v : D_1 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto u(x)v(x)$, ist differenzierbar mit Ableitung

$$(u \cdot v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

3) **Quotientenregel:** Ist $v(x) \neq 0$ für alle $x \in D_1$, so ist auch die Funktion $\frac{u}{v} : D_1 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$, differenzierbar mit

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}.$$

4) **Kettenregel:** Sei $w : E \to \mathbb{R}$ eine weitere differenzierbare Funktion mit $w(E) \subset D_1$. Dann ist auch das Kompositum $v \circ w : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto v(w(x))$, differenzierbar mit

   $(v \circ w)'(x) = v'(w(x)) \cdot w'(x) =$ „äußere Ableitung $\cdot$ innere Ableitung“.

   Beispiel. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(2x)$, ist differenzierbar. Es ist $f(x) = \sin(2x) = v(w(x))$ mit $v(y) = \sin(y)$ und $w(x) = 2x$. Es folgt

$$f'(x) \overset{4)}{=} \sin'(2x) \cdot w'(x) = \cos(2x) \cdot 2 = 2\cos(2x)\,.$$

5) **Umkehrregel:** Sei D_1 ein Intervall und $f : D_1 \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende oder streng monoton fallende differenzierbare Funktion mit Umkehrfunktion $u : f(D_1) \to D_1$. Ist für $x \in D_1$ die Ableitung $f'(x) \neq 0$, so ist u in $f(x)$ differenzierbar mit

$$u'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}\,.$$

   Da u die Umkehrfunktion von f ist, gilt $u(f(x)) = x$. Beidseitiges Differenzieren ergibt mit der Kettenregel $u'(f(x))f'(x) = 1$.

5.4 Anwenden der Regeln

1) Sei $f(x) = 2\sin(x) + e^{3x}$. Dann ist $f'(x) = 2\cos(x) + 3e^{3x}$ nach Linearität und Kettenregel.

2) Sei $f(x) = x^2\cos(x)$. Dann ist $f'(x) = 2x\cos(x) - x^2\sin(x)$ nach der Produktregel.

3) Es ist $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ für $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Nach der Quotientenregel gilt

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

4) Für die Umkehrfunktion arctan von tan gilt nach der Umkehrregel $\arctan'(\tan(x)) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{1+\tan^2(x)}$. Mit $y := \tan(x)$ folgt

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2} \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}.$$

5) Für die Umkehrfunktion arcsin von sin gilt nach der Umkehrregel $\arcsin'(\sin(x)) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}$, da $\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$ und also $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ gilt. Mit $y := \sin(x)$ folgt

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \text{für alle } y \in \left]-1, 1\right[.$$

6) Für die Umkehrfunktion arccos von cos gilt nach der Umkehrregel $\arccos'(\cos(x)) = \frac{1}{\cos'(x)} = \frac{1}{-\sin(x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}$. Mit $y := \cos(x)$ folgt

$$\arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \text{für alle } y \in \left]-1, 1\right[.$$

7) Für die Umkehrfunktion ln der Exponentialfunktion exp gilt nach der Umkehrregel $\ln'(\exp(x)) = \frac{1}{\exp'(x)} = \frac{1}{\exp(x)}$. Mit $y := \exp(x)$ folgt

$$\ln'(y) = \frac{1}{y} \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}_{>0}.$$

8) Sei $r \in \mathbb{R}$ beliebig, und sei $f(x) = x^r := e^{r\ln(x)}$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Nach der Kettenregel gilt $f'(x) = \frac{r}{x}e^{r\ln(x)} = \frac{r}{x}x^r$, da $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ gilt. Es ist also

$$f'(x) = rx^{r-1} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Ist insbesondere $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, so folgt

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Bei den Ableitungen für die Umkehrfunktionen schreibt man dann auch wieder x statt y.

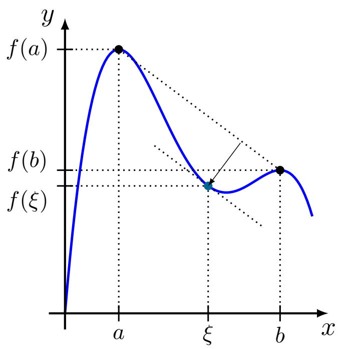
Bemerkung. Aus 3) folgt auch $\tan'(x) = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$, da $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ ist.

5.5 Mittelwertsatz

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Ist f differenzierbar in allen $x \in \,]a, b[\,$, so gibt es ein $\xi \in \,]a, b[$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Die mittlere Änderungsrate wird mindestens einmal angenommen.



Anwendungen. Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$, und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

1. *Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$, so ist f eine konstante Funktion.* (Denn für alle $a, b \in I$ mit $a < b$ folgt aus dem Mittelwertsatz $f(a) = f(b)$.)

2. *Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, dann ist f streng monoton wachsend.* Denn mit $a, b \in I$, $a < b$, folgt aus dem Mittelwertsatz

$$f(b) = f(a) + \underbrace{f'(\xi)}_{>0}\underbrace{(b-a)}_{>0} > f(a) \quad \text{für alle } a, b \in I, a < b.$$

Analog folgt aus $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$, dass f streng monoton fällt.

5.6 Ableitungstest

Bestimmen Sie nachfolgende Ableitungen.

$f(x) = \tan(\frac{\pi}{3})$	$f'(x) =$
$f(x) = x\,\tan(\frac{\pi}{3})$	$f'(x) =$
$f(x) = \tan(\frac{\pi x}{3})$	$f'(x) =$
$f(x) = \tan(\frac{\pi}{71}) + \ln(x)$	$f'(x) =$
$f(x) = \tan^2(\pi x)$	$f'(x) =$
$f(x) = \tan(\pi x^2)$	$f'(x) =$
$f(x) = \tan(\pi)\,x^2$	$f'(x) =$
$f(x) = \tan(\frac{\pi}{3})\,x^2$	$f'(x) =$
$f(x) = \tan(\pi x)\,x^2$	$f'(x) =$
$f(x) = x\,\sin(\frac{11\pi}{71})$	$f'(x) =$
$f(x) = \arctan(x\frac{\pi}{3})$	$f'(x) =$
$f(x) = e^{-x}$	$f'(x) =$
$f(x) = e^{20x}$	$f'(x) =$
$f(x) = e^{-2x}$	$f'(x) =$
$f(x) = e^{-x^2}$	$f'(x) =$
$f(x) = \ln^2(\tan(x))$	$f'(x) =$
$f(x) = \ln(\tan^2(x))$	$f'(x) =$
$f(x) = \ln(\tan(x^2))$	$f'(x) =$
$f(x) = \ln(x)\,\tan(x)$	$f'(x) =$
$f(x) = \frac{\ln(2x)}{\tan(x)}$	$f'(x) =$
$f(x) = \sqrt[23]{x^{41}}$	$f'(x) =$
$f(x) = 5^x$	$f'(x) =$
$f(x) = 7^2 x$	$f'(x) =$
$f(x) = 7^{2x}$	$f'(x) =$
$f(x) = 7^{\sqrt{2x}}$	$f'(x) =$

Regel von de l'Hospital Diese Regel folgt aus dem Mittelwertsatz. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, und sei $a \in I$. Für differenzierbare Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ gelte $f(a) = 0 = g(a)$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ mit $x \neq a$. Wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so existiert auch der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es gilt $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beispiel.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{6} = \frac{1}{6}.$$

Ableitungsfunktion f'

Ist $f\colon D_1 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so erhält man eine neue Funktion $f'\colon D_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$, genannt *Ableitung von f*. Diese ist nicht immer stetig. Man schreibt auch $\boxed{\frac{df}{dx} := f'}$ für die Ableitungsfunktion.

Ist f' differenzierbar, so ist $f'' := (f')'$ die *zweite Ableitung von f*. Man schreibt dann auch $\boxed{\frac{d^2 f}{dx^2} := f''}$ für die zweite Ableitungsfunktion.

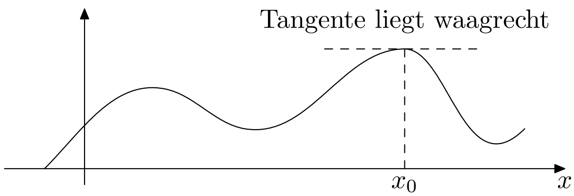
5.7 Lokale Extrema (ergänzend)

Sei I ein Intervall, und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann hat f in $x_0 \in I$ ein *lokales Maximum* (bzw. *lokales Minimum*), falls es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt so, dass gilt:

$$f(x) \leqslant f(x_0) \qquad (\text{bzw. } f(x) \geqslant f(x_0)) \qquad \text{für alle } x \in I \text{ mit } |x - x_0| < \varepsilon.$$

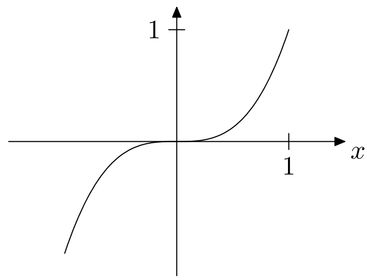
Man nennt x_0 eine *Extremalstelle* von f, wenn f in x_0 eine lokales Maximum oder lokales Minimum besitzt. Es gelten

- Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in]a, b[$, und sei x_0 eine Extremalstelle von f, dann gilt $f'(x_0) = 0$.



Die umgekehrte Richtung „$f'(x_0) = 0 \Longrightarrow x_0$ ist Extremalstelle" ist im Allgemeinen nicht richtig, wie das Beispiel $f(x) = x^3$ zeigt.

Hier ist $f'(0) = 0$, aber $x_0 = 0$ ist keine Extremalstelle.



Kurvendiskussion

Mit dem Begriff *Kurvendiskussion* bezeichnet man das Zusammentragen von prägnanten Eigenschaften einer Funktion f. In der Regel bestimmt man dafür

- den Definitionsbereich von f.
- Falls f nicht überall definiert ist (wie etwa $f\colon x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$, vgl. Beispiel 3 in Abschnitt 12), untersuche man die Definitionslücken auf stetige Ergänzbarkeit.
- Besitzt f Nullstellen?
- Gibt es Extremalstellen? Wenn $f\colon\ ]a,b[\ \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, bestimmt man die Ableitung f' und ihre Nullstellen. Falls auch f' differenzierbar ist, bestimmt man noch die *zweite Ableitung* $f'' := (f')'$. Es gilt: Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, so hat f ein lokales Minimum in x_0. Ist hingegen $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, so hat f in x_0 ein lokales Maximum.
- Gibt es Wendepunkte? Wenn die zweite Ableitung f'' existiert und differenzierbar ist, bestimmt man die *dritte Ableitung* $f''' := (f'')'$. Es gilt: Ist $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann hat f in x_0 einen *Wendepunkt.*
- Wenn f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, untersuche man das asymptotische Verhalten für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.
- Weist f ein Symmetrieverhalten auf? Ist f zum Beispiel gerade oder ungerade (siehe 4.5)?
- Zeichne den Graph von f.

5.8 Aufgaben 48 – 58

Aufgabe 48. a) Bestimmen Sie die Ableitung $f'(x)$ in den folgenden Fällen: $f(x) = (\sin(x) - \cos(x))e^x$ und $f(x) = \frac{1+x^2}{x^2}$ mit $x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$.

b) Sei $f(x) = e^{-x} \arctan(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Ableitung $f'(x)$ mit Hilfe der Ketten- und Produktregel.

c) Sei $f(x) = \frac{\arctan(x)}{e^x}$ für $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Ableitung $f'(x)$ mit Hilfe der Quotientenregel.

Aufgabe 49. Bestimmen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung $f'(x)$ für:

a) $f(x) = \ln(3x^4)$ mit $x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, b) $f(x) = e^{\cos(4x)}$ mit $x \in \mathbb{R}$,

c) $f(x) = \arctan(e^{2x})$ mit $x \in \mathbb{R}$, d) $f(x) = \sin(\frac{2}{x})$ mit $x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$.

Aufgabe 50. (Anwendung Bio)
Im Rahmen der biologischen Ringvorlesungen und der Vorlesung Chemie für Biologen wird Ihnen der Begriff *Michaelis-Menten-Funktion* begegnen. Diese gibt bei einer enzymatischen Reaktion die Umwandlungsgeschwindigkeit $M(x)$ von der Konzentration $x \in \mathbb{R}_{>0}$ des Substrats in folgender Weise an: $M(x) = \dfrac{ax}{x+b}$ mit Konstanten $a, b > 0$.

a) Bilden Sie die Ableitung $M'(x)$ und zeigen Sie, dass die Michaelis-Menten-Funktion die folgende *Differentialgleichung* erfüllt:

$$M'(x) = \frac{bM(x)^2}{ax^2}.$$

b) Wie kann man begründen, dass $M(x) \in \,]0, a[$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt?

c) Zeigen Sie, dass die Funktion $M(x)$ streng monoton wachsend ist.

d) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $u_M\colon]0, a[\,\to \mathbb{R}_{>0}$ von M und verifizieren Sie, dass $u_M(M(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie $M(u_M(y)) = y$ für alle $y \in \,]0, a[$ gelten.

Aufgabe 51. (Anwendung Geo)
Nach einem Chemie-Unfall in einem Gelände ist ein angrenzender See durch einen Gefahrenstoff verunreinigt worden. Durch die zuständigen Behörden sind unverzüglich Messungen der Menge des Gefahrenstoffes k (gemessen in μl) im See eingeleitet worden. In Abhängigkeit von der Zeit $x \geqslant 0$ in Tagen seit dem Unfall lässt sich die Gefahrenstoffmenge im See angeben durch die Gleichung $k(x) = e^{-x}(50x + 4)$.

a) Berechnen Sie für $x \geqslant 0$ die Schnittpunkte der Funktion $k(x)$ mit der x-Achse und mit der y-Achse.
b) Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung und bestimmen Sie die Nullstelle x_0 von $k'(x)$. Entscheiden Sie anschließend, ob und an welcher Stelle $k(x)$ ein Maximum besitzt.
c) Skizzieren Sie den Graph der Funktion $k(x)$ über den Zeitraum von 10 Tagen.
d) Was geben die Werte $k(0{,}5)$ und $k'(0{,}5)$ an?

Aufgabe 52. (Zur Wiederholung)

a) Sei $f\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$, eine Funktion. Bestimmen Sie in den folgenden Fällen den größtmöglichen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$.
   i) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ ii) $f(x) = \ln(x) - \ln(2-x)$

b) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, indem Sie zunächst Zähler und Nenner als Linearfaktoren schreiben:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - x} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - x}\,.$$

Aufgaben aus dem Kurs 2004/05

Aufgabe 53. a) Sei $f(x) = x^3 + \frac{\sin(2x)}{x}$ für $x \neq 0$ in $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie $f'(x)$.

b) Bestimmen Sie Definitionsbereich und Ableitung der *Kotangensfunktion*, definiert durch $\cot(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Aufgabe 54. Die *hyperbolischen* Funktionen

$$\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \quad \text{und} \quad \sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

erfüllen die Gleichung $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, vergleiche die Aufgaben 44 und 46. Die Funktion $\sinh$ ist bijektiv, und die Funktion $\cosh$ ist, eingeschränkt auf $\cosh : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 1}$, bijektiv. Als Umkehrfunktionen erhält man die *Area-Funktionen*

$$\operatorname{arcosh} : \mathbb{R}_{\geqslant 1} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,.$$

a) Bestimmen Sie die Ableitung von $\cosh$ und von $\sinh$.

b) Bestimmen Sie die Ableitungen $\operatorname{arcosh}'(y)$ für $y \in \mathbb{R}_{>1}$ und $\operatorname{arsinh}'(y)$ für $y \in \mathbb{R}$ mit Hilfe der *Umkehrregel.*

Aufgabe 55. Sei $u(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$ und $v(y) = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$. Bestimmen Sie die Ableitungen $u'(y)$ für $y \in \mathbb{R}_{>1}$ und $v'(y)$ für $y \in \mathbb{R}$ mit Hilfe der Kettenregel.

Bemerkung. Die Lösungen von Aufgabe 54 und Aufgabe 55 müssen übereinstimmen, denn es gelten:

$$\operatorname{arcosh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \quad \text{und} \quad \operatorname{arsinh}(y) = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}) \; .$$

Aufgabe 56. Bestimmen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x) - \sin(x)}{x^2} \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{\ln(x)} \right)$$

mit Hilfe der Regel von de l'Hospital.

Aufgabe 57. Diskutieren Sie die Kurve

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{\frac{-x^2}{2}} \; .$$

Aufgabe 58. Wie folgt die Regel von de l'Hospital aus dem Mittelwertsatz?

6 Integralrechnung

Im letzten Kapitel haben wir die Ableitung f' einer differenzierbaren Funktion f kennengelernt. Nun interessieren wir uns für das Integral

$$\int f(x)\,dx := F(x), \qquad \text{wobei } F'(x) = f(x) \text{ gilt,}$$

einer stetigen Funktion f. Das ist nichts anderes als eine differenzierbare Funktion F, für die $F' = f$ gilt. Zum Beispiel ist $\int \cos(x)\,dx = \sin(x)$, denn es ist $\sin'(x) = \cos(x)$. Es handelt sich hierbei um ein *unbestimmtes Integral*, denn mit $F' = f$ ist auch $(F + c)' = F' + c' = f$ für jede konstante Funktion c, da $c' = 0$ gilt, vgl. Beispiel 1 in 5.2.

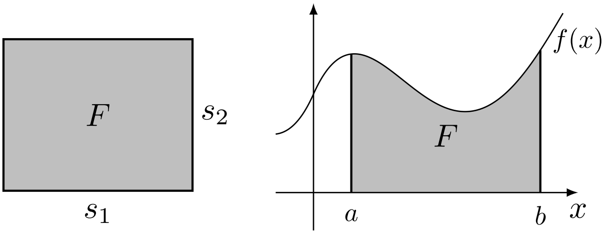
Das *bestimmte Integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ ist eine Zahl und kann als ein Flächeninhalt aufgefasst werden, wie wir nun herleiten werden. Danach kommen wir in 6.2 auf das unbestimmte Integral zurück.

6.1 Das Riemann-Integral

Wir führen nun das von Bernhard Riemann (1826–1866) entdeckte Integral ein, und zwar anschaulich als Flächeninhalt.

Den Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen s_1 und s_2 bestimmt man durch das Produkt $F = s_1 \cdot s_2$.

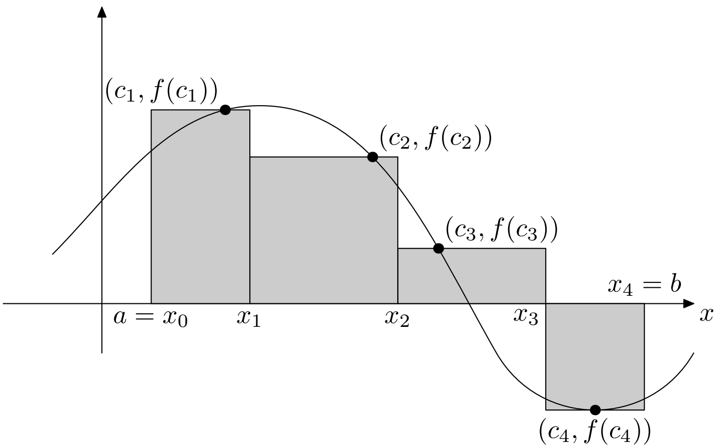
Aber wie bestimmt man den Flächeninhalt F, der vom Graph irgendeiner stetigen Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{>0}$ begrenzt wird?



$$F = s_1 \cdot s_2 \qquad\qquad F = \int_a^b f(x)\,dx$$

Als Ergebnis erhält man das *Integral von $f(x)\,dx$ von a bis b*, geschrieben als $F = \int_a^b f(x)\,dx$. Dies wird folgendermaßen konstruiert. Wähle $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ und erhalte so eine *Unterteilung* U_n von $[a,b]$, die aus den Intervallen $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$ bis $[x_{n-1}, x_n]$ besteht. Wähle $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ für $i = 1, \dots, n$ und bilde die

Riemann*sche Summe* $R(U_n) := f(c_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(c_n)(x_n - x_{n-1})$.



In der Abbildung ist $n = 4$, und die RIEMANNsche Summe ist die Summe der Flächeninhalte der dargestellten Rechtecke.
Die RIEMANNsche Summe ist also die Summe der Flächeninhalte von Rechtecken mit der Grundseite $x_i - x_{i-1}$ und der Höhe $f(c_i)$. Der Flächeninhalt von Rechtecken unterhalb der x-Achse wird dabei negativ gezählt. Je kürzer die Grundseiten $x_i - x_{i-1}$ werden, desto besser wird der Flächeninhalt unter dem Graph von f approximiert. Sei

$$\ell(U_n) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - x_{i-1})$$

die Länge des größten Teilintervalls von U_n. Da $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ nach Voraussetzung stetig ist, gibt es eine reelle Zahl $F =: \mathfrak{I}(f)$ derart, dass für jede Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(U_n) = 0$ der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} R(U_n)$ existiert und gleich $\mathfrak{I}(f)$ ist. Man schreibt dazu

$$\mathfrak{I}(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

und nennt $\mathfrak{I}(f)$ das *bestimmte Integral von f über $[a,b]$*. Häufig wird $\mathfrak{I}(f)$ auch RIEMANNsches Integral genannt.

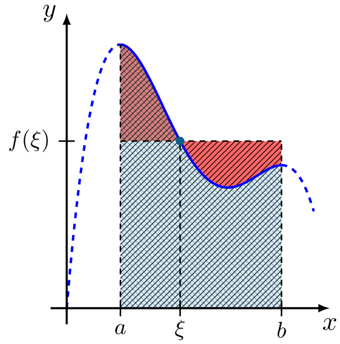
Anstelle von x kann in $\mathfrak{I}(f)$ auch ein anderer Buchstabe verwendet werden und zum Beispiel $\int_a^b f(t)\,dt$ geschrieben werden.

Um den Flächeninhalt unterhalb von Graph(f) zu gewinnen, haben wir hier wieder die Erscheinungen ins „Unendlichkleine“ verfolgt, vgl. das Zitat von RIEMANN vor Kapitel 3.

Wie in der Differentialrechnung, so gibt es auch in der Integralrechnung einen *Mittelwertsatz*.

Mittelwertsatz der Integralrechnung. *Sei* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Dann gibt es ein* $\xi \in [a,b]$ *mit* $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a)$.

Wenn $f(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [a,b]$ ist, so ist also $\mathfrak{I}(f)$ der Flächeninhalt eines gewissen Rechtecks mit Grundseite $b-a$.



Konventionen. Man setzt

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \ \text{ für } a < b.$$

6.2 Integrieren und Differenzieren

Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$, und sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nennt man eine differenzierbare Funktion $F\colon I \to \mathbb{R}$, die

(1) $$F'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in I$$

erfüllt, eine *Stammfunktion von* f.

Eigenschaften von Stammfunktionen von f

(i) Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist auch $F+c$ eine Stammfunktion von f, wobei c eine konstante Funktion ist. (Denn die konstante Funktion $x \mapsto c$ hat die Ableitung 0 nach 1) aus 5.2.)

(ii) Sind F und G Stammfunktionen von f, dann ist $F-G$ eine konstante Funktion. Denn es ist $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$ und also $F-G$ konstant nach 1. aus 5.5.

Man nennt daher eine Stammfunktion F von f auch ein *unbestimmtes Integral* und schreibt $\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ oder auch $\int f(x)\,dx = F(x)$, wenn man nur eine Stammfunktion braucht.

Beispiele. $\int \cos'(x)\,dx = \cos(x)$ und allgemein $\int F'(x)\,dx = F(x) + c$.

Wie kommt man von dem in 6.1 eingeführten Integral $\int_a^b f(x)\,dx$, das eine Zahl ist, zu einer Stammfunktion von f? Man hält a fest und variiert die obere Grenze. Das führt zu der Funktion $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, und tatsächlich ist diese Funktion eine Stammfunktion von f, wie man mit dem Mittelwertsatz zeigen kann, vgl. z. B. [6, §19 Satz 1]. Es gilt der folgende Hauptsatz.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. *Seien I ein Intervall, $a, b \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.*

1) *Dann ist* $F : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, *eine Stammfunktion von f.*

2) *Für jede Stammfunktion $F : I \to \mathbb{R}$ von f ist*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b .$$

Wir stellen nun eine Tabelle von unbestimmten Integrale zusammen. Die Ableitungen in der rechten Spalte sind alle in 5.2 und 5.4 zu finden.

$\int f(x)\,dx = F(x)$	**Bemerkung**	**Probe:** $F'(x) \overset{?}{=} f(x)$
$\int 1\,dx =: \int dx = x$		$F'(x) = 1 = f(x)$
$\int x\,dx = \frac{1}{2}\,x^2$		$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x = f(x)$
$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}$	$n \in \mathbb{N}$	$F'(x) = \frac{n+1}{n+1}\,x^n = f(x)$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}$	$x > 0$	$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{x}}$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)$	$x > 0$	$F'(x) = \ln'(x) = \frac{1}{x} = f(x)$
$\int e^x\,dx = e^x$		$F'(x) = e^x = f(x)$
$\int \cos(x)\,dx = \sin(x)$		$F'(x) = \sin'(x) = f(x)$
$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$		$F'(x) = -\cos'(x) = f(x)$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x)$	$x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$	$F'(x) = \tan'(x) = f(x)$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x)$		$F'(x) = \arctan'(x) = f(x)$
$\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\,e^{3x}$		$F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3\,e^{3x} = f(x)$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x)$	$x \in \left]-1, 1\right[$	$F'(x) = \arcsin'(x) = f(x)$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos(x)$	$x \in \left]-1, 1\right[$	$F'(x) = \arccos'(x) = f(x)$
$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}\,x^{r+1}$	$r \in \mathbb{R}_{\neq -1},\ x > 0$	$F'(x) = \frac{r+1}{r+1}\,x^r = f(x)$

6.3 Integrationsregeln

Integrieren ist additiv, aber nicht multiplikativ. An die Stelle der Multiplikativität tritt die unten stehende *Regel der partiellen Integration.*

Linearität: Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\displaystyle\int_a^b \Big(f(x)+g(x)\Big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

und $\displaystyle\int_a^b \lambda\cdot f(x)\,dx = \lambda\cdot\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{mit } \lambda\in\mathbb{R}.$

„Additivität“ und „einen konstanten Faktor kann man vorziehen“.

Beispiel. $\displaystyle\int\Big(\frac{5}{x} - 4x^3\Big)dx = 5\ln(x) - x^4 + c$ für $x > 0$.

Partielle Integration: Seien $f,\ g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ differenzierbar mit stetigen Ableitungen. Dann gilt

$$\text{(2)}\qquad \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)g(x)\,\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Bei der partiellen Integration sind also $f(x)$ und $g'(x)$ vorgegeben, und man berechnet zunächst $f'(x)$ und $g(x) = \int g'(x)\,dx$.

(Die Regel folgt aus der Produktregel in 5.3 2) und dem Hauptsatz in 6.2, denn danach gilt $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ und Integrieren auf beiden Seiten liefert $(fg)(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$ und also $\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$.)

Beispiel 1. Berechne $\int \ln(x)\,dx$ für $x > 0$.

Es ist $\int \ln(x)\,dx = \int \ln(x)1\,dx = \int f(x)\,g'(x)\,dx$ mit $f(x) = \ln(x)$, also $f'(x) = \frac{1}{x}$, und $g'(x) = 1$, also $g(x) = \int 1\,dx = x$. Es folgt

$$\begin{aligned}\int \ln(x)1\,dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx\\ &= \ln(x)x - \int \frac{1}{x}x\,dx = \ln(x)x - \int 1\,dx\\ &= \ln(x)x - x + c.\end{aligned}$$

Beispiel 2. Berechne $\int x\cos(x)\,dx$.

Es ist $\int x\cos(x)\,dx = \int f(x)\,g'(x)\,dx$ mit $f(x) = x$ also $f'(x) = 1$, und $g'(x) = \cos(x)$, also $g(x) = \int \cos(x)\,dx = \sin(x)$. Es folgt

$\int x\cos(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx = x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx = x\sin(x) + \cos(x) + c$.

Substitutionsregel: Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit stetiger Ableitung g'. Und sei $f : g([a,b]) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann folgt

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du\,. \tag{3}$$

Dazu verwendet man die *Substitution* $u := g(x)$, also

$$u' = \frac{du}{dx} = g'(x),$$

woraus die formale Beziehung $\boxed{g'(x)\, dx = du}$ folgt. Dies setzt man in die linke Seite von (3) ein und erhält die rechte Seite, aber diese mit geänderten Grenzen: Wenn auf der linken Seite x von a nach b läuft, so läuft auf der rechten Seite $u = g(x)$ von $g(a)$ nach $g(b)$.

Beispiel 1. Berechne $\displaystyle\int_0^\pi \cos(x^3) \cdot 3x^2\, dx\,.$

Setze $u = g(x) = x^3$. Dann ist $\frac{du}{dx} = g'(x) = 3x^2$ und also formal $du = 3x^2\, dx$. Ferner ist $f(u) = f(g(x)) = \cos(u)$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \cos(x^3) \cdot 3x^2\, dx &= \int_{g(0)}^{g(\pi)} f(u)\, du \\
&= \int_0^{\pi^3} \cos(u)\, du \\
&= \sin(u)\Big|_0^{\pi^3} \\
&= \sin(\pi^3) - \sin(0) \\
&= \sin(\pi^3)\,.
\end{aligned}$$

Beispiel 2. Berechne $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x)\cos(x)\, dx$. Setze $u = g(x) = \sin(x)$. Dann ist $\frac{du}{dx} = g'(x) = \cos(x)$ und also formal $du = \cos(x)\, dx$. Ferner ist $f(u) = u^4$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x)\cos(x)\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx \\
&= \int_{\sin(0)=0}^{\sin(\frac{\pi}{2})=1} f(u)\, du = \int_0^1 u^4\, du = \frac{u^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

6.4 Aufgaben 59 – 67

Aufgabe 59. Berechnen Sie nachfolgende Integrale mit Hilfe der Regel der partiellen Integration $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,dx$ b) $\int_0^{10} x\,e^{10x}\,dx$

Aufgabe 60. Berechnen Sie nachfolgende Integrale mit Hilfe der Substitutionsregel $\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{28}(x)\,\cos(x)\,dx$ b) $\int_1^{e^\pi} \sin\bigl(\ln(x)\bigr)\,\frac{1}{x}\,dx$

Aufgabe 61. (Anwendung)
Die Änderung der Körpertemperatur einer Person mit fieberhaftem Infekt ist gegeben durch die folgende Ableitung

$$y'(t) = \left(1 - \frac{1}{10}\,t\right)\,e^{-\frac{1}{10}\,t}\,.$$

Hierbei beschreibt $t \geqslant 0$ die Zeit in Stunden nach Ausbruch des Infektes und $y(t)$ die Körpertemperatur in Grad Celsius. Die Körpertemperatur der Person betrage normalerweise $36,8$ Grad Celsius, so dass die Anfangsbedingung $y(0) = 36,8$ gegeben ist.

a) Ermitteln Sie den Temperaturverlauf $y(t)$.

b) Nach wie vielen Stunden war die Körpertemperatur am höchsten, und wie hoch war sie dann? (Bei $t = t_0$ liegt ein Maximum, wenn $y'(t_0) = 0$ und $y''(t_0) < 0$ gilt.)

Aufgabe 62. (Zur Wiederholung)
Beantworten Sie folgende Fragen für die unten stehenden Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ist die Funktion gerade? Ist die Funktion ungerade?
(a) $f(x) = 0$ (b) $f(x) = 1$ (c) $f(x) = x$ (d) $f(x) = x + 1$

Aufgaben aus dem Kurs 2004/05

Aufgabe 63. Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{-1}^{2} (x^2 - 3x + 2)\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_{\frac{1}{4}}^{1} 3 \cdot \sqrt{x}\,dx.$$

Aufgabe 64. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der partiellen Integration:

$$\int_0^1 x\,e^x\,dx, \qquad \text{sowie} \qquad \int x\,\sin(x)\,dx \qquad \text{und} \qquad \int x^2\,\cos(x)\,dx.$$

Aufgabe 65. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Substitutionsregel:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2(x)\,\cos(x)\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \ln(4x+2)\,dx.$$

Aufgabe 66. a) Zeichnen Sie die beiden Kurven

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\,,\; x \mapsto \sqrt{x}\,, \quad \text{und} \quad g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\,,\; x \mapsto x^2\,,$$

und bestimmen Sie den Flächeninhalt $\mathcal{F}$ der von diesen beiden Kurven eingeschlossenen Fläche.

b) Bei konstanter Flächendichte hat der *Schwerpunkt* S der Fläche die Koordinaten

$$x_S = \frac{1}{\mathcal{F}} \int_0^1 x(f(x)-g(x))\,dx \qquad \text{und} \qquad y_S = \frac{1}{2\mathcal{F}} \int_0^1 (f(x)^2 - g(x)^2)\,dx.$$

Berechnen Sie die Koordinaten x_S und y_S und markieren Sie den Schwerpunkt S in Ihrer Zeichnung.

Aufgabe 67. Sei $-1 < x < 1$.

a) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int \frac{-2x}{1-x^2}\,dx$ mit der Substitutionsregel.

b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[4]{1-x^2}}\,dx$ mit der Substitutionsregel.

7 Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten eine *Differentialgleichung* der Form $y' = f(x)$ mit einer stetigen Funktion $f(x)$. Gesucht ist eine Funktion $y(x)$ genannt *Lösung*, deren Ableitung die Funktion $f(x)$ ist. Diese ist schnell gefunden, denn für $y(x) := \int f(x)\,dx$ gilt $y'(x) = f(x)$ nach Kapitel 6.

Zum Beispiel hat die Differentialgleichung $y' = e^{7x}$ die *allgemeine Lösung* $y(x) = \int e^{7x}\,dx = \frac{1}{7}e^{7x} + c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Wir überprüfen dies Ergebnis durch eine *Probe*, indem wir die gefundene Lösung ableiten.

Probe. $y = \frac{1}{7}e^{7x} + c \implies y' = \frac{1}{7}7e^{7x} + 0 = e^{7x} \quad ✓$

Die Probe zeigt, dass unsere Lösung die vorgegebene Differentialgleichung $y' = e^{7x}$ tatsächlich erfüllt.

Eine *(gewöhnliche) Differentialgleichung 1. Ordnung* ist eine Gleichung, in der eine unbekannte Funktion $y = y(x)$ und deren Ableitung y' vorkommt. Wir benutzen dafür die Abkürzung **DGL**.

Gesucht ist eine *Lösung* der DGL, d. h. eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion $y\colon I \to \mathbb{R}$, die die DGL erfüllt.

Beispiel. Man löse die DGL $y' = y$. Es ist $y(x) = e^x$ eine Lösung und allgemeiner $y(x) = ce^x$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

Probe. $y = ce^x \implies y' = ce^x = y \quad ✓$

Ist eine *Anfangsbedingung* $y(x_0) = y_0$ vorgegeben, so spricht man von einer *Anfangswertaufgabe*.

Beispiel. Man löse die DGL $y' = y$ mit $y(0) = 2$.

Für die Lösung $y(x) = ce^x$ gilt $y(0) = c\,e^0 = c \stackrel{!}{=} 2$. Die Lösung der Anfangswertaufgabe ist daher $y(x) = 2e^x$.

Wir betrachten nun verschiedene häufig vorkommende DGL-Typen. Dabei seien $a, b, f\colon I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem Interval $I \subset \mathbb{R}$. Mit dem Buchstaben c sei stets eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ bezeichnet.

7.1 Homogene lineare DGL $y' = a(x)y$

Eine DGL der Form $y' = a(x)\,y$ wird eine *homogene lineare DGL* genannt. Sie hat die allgemeine Lösung

$$y(x) = ce^{\mathcal{A}(x)} \tag{1}$$

mit einer Stammfunktion $\mathcal{A}(x)$ von $a(x)$. Denn aus $y = ce^{\mathcal{A}(x)}$ folgt nach der Kettenregel $y' = \mathcal{A}'(x)\,ce^{\mathcal{A}(x)} = a(x)y$, da $\mathcal{A}'(x) = a(x)$ gilt.

Beispiel 1. Man löse die DGL $y' = 2xy$. Es ist $y' = 2xy = a(x)y$ mit $a(x) = 2x$. Es folgt $\mathcal{A}(x) = \int 2x\,dx = x^2$.
Die allgemeine Lösung ist also $y(x) = ce^{\mathcal{A}(x)} = ce^{x^2}$.

Probe. $y = ce^{x^2} \Longrightarrow y' = c \cdot 2xe^{x^2} = 2x \cdot ce^{x^2} = 2xy \quad \checkmark$

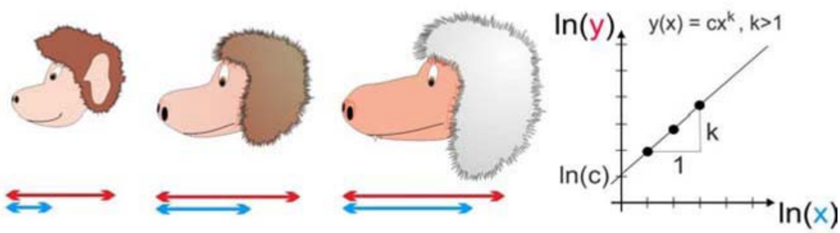
Beispiel 2. Man löse für $x > 0$ die DGL $y' = \frac{k}{x}y$ mit festem $k \in \mathbb{R}$.
Es ist $y' = \frac{k}{x}y = a(x)y$ mit $a(x) = \frac{k}{x}$. Es folgt $\mathcal{A}(x) = \int \frac{k}{x}\,dx = k\ln(x)$.
Die allgemeine Lösung ist also $y(x) = c\,e^{\mathcal{A}(x)} = c\,e^{k\ln(x)} = cx^k$.

Probe. $y = cx^k \Longrightarrow y' = ckx^{k\;\;1} = ck\frac{x^k}{x} = \frac{k}{x}cx^k = \frac{k}{x}y \quad \checkmark$

Beispiel 3. Allometrische DGL
Bei der *Allometrie* geht es um die Veränderung von Größenverhältnissen $\frac{y}{x}$ im Laufe eines Wachstumsprozesses, z.B. wenn x die Körpergröße und y die Kopfhöhe eines Menschen ist: Vor der Geburt *positiv allometrisch* und danach *negativ allometrisch*.
Die *allometrische DGL* lautet: $y' = k\frac{y}{x}$ mit einer Konstanten $k \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x > 0$. Es ist $y' = \frac{k}{x}y$, und diese DGL hat nach Beispiel 2 die Lösung

$$y(x) = cx^k.$$

Die Konstante k wird *allometrischer Exponent* genannt und die Lösung *Allometrieformel*. Für $k > 1$ liegt positive Allometrie vor wie z. B. beim Wachstum des Gesichtsschädels eines Mantelpavians. Der Gesichtsschädel wächst schneller als der Gesamtschädel.



Beispiel 4. Das *exponentielle Wachstum* einer Population (z. B. Bakterien in einer Nährlösung) wird durch die DGL $\frac{dP}{dt} = \alpha P(t)$ mit einer Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ beschrieben. Dabei ist $P(t)$ die Größe der Population zum Zeitpunkt t. Nach (1) ist $P(t) = ce^{\alpha t}$ die allgemeine Lösung der DGL. Es ist $P(0) = ce^0 = c$. Hat also die Population zum Zeitpunkt $t = 0$ die Größe P_0, so gilt das *exponentielle Wachstumsgesetz* $\boxed{P(t) = P_0 e^{\alpha t}}$ für $t \geqslant 0$. Hierbei wird angenommen, dass keine äußeren Einflüsse das Wachstum behindern.

7.2 Lineare DGL $y' = a(x)y + b(x)$

Eine DGL der Form $y' = a(x)y + b(x)$ heißt *lineare DGL*. Eine lineare DGL wird *inhomogen* genannt, wenn $b(x) \neq 0$ für mindestens ein $x \in I$ ist. In diesem Fall nennt man $b(x)$ auch eine *Störfunktion*. Man bestimmt nun wieder eine Stammfunktion $\mathcal{A}(x)$ von $a(x)$ und erhält dann als Lösung

$$(2) \qquad y(x) = e^{\mathcal{A}(x)} \int e^{-\mathcal{A}(x)} b(x)\, dx.$$

Probe. Da $\mathcal{A}(x)$ eine Stammfunktion von $a(x)$ ist, gilt $\mathcal{A}'(x) = a(x)$, und nach Definition des unbestimmten Integrals gilt $\left(\int f(x)\, dx\right)' = f(x)$. Aus Ketten- und Produktregel ergibt sich daher: $y = e^{\mathcal{A}(x)} \cdot \int e^{-\mathcal{A}(x)} b(x)\, dx \implies$ $y' = a(x)e^{\mathcal{A}(x)} \cdot \int e^{-\mathcal{A}(x)} b(x)\, dx + e^{\mathcal{A}(x)} \cdot e^{-\mathcal{A}(x)} b(x) = a(x)y + b(x)$. ✓
Hier wurde auch noch die Funktionalgleichung der e-Funktion ausgenutzt: $e^{\mathcal{A}(x)} \cdot e^{-\mathcal{A}(x)} = e^{\mathcal{A}(x)-\mathcal{A}(x)} = e^0 = 1$.

Auf die Lösung (2) kommt man nach einer Idee von Lagrange durch *Variation der Konstanten*. Es wird der Ansatz $y = e^{\mathcal{A}(x)} c(x)$ gemacht und damit sozusagen die Konstante in der Lösung (1) der homogenen DGL variiert. Da $\mathcal{A}'(x) = a(x)$ ist, folgt aus Ketten- und Produktregel

$$\begin{aligned} y' &= a(x)\, e^{\mathcal{A}(x)} c(x) + e^{\mathcal{A}(x)} c'(x) \\ &= a(x)\, y + e^{\mathcal{A}(x)} c'(x). \end{aligned}$$

Joseph Louis Lagrange, 1736–1813

Ein Vergleich mit $y' = a(x)\, y + b(x)$ ergibt also $e^{\mathcal{A}(x)} c'(x) = b(x)$.

Daraus folgt $c'(x) = e^{-\mathcal{A}(x)} b(x)$. Durch Integrieren auf beiden Seiten folgt $c(x) = \int e^{-\mathcal{A}(x)} b(x)\, dx$. Dies in den Ansatz $y = e^{\mathcal{A}(x)} \cdot c(x)$ eingesetzt, ergibt die in (2) angegebene Lösung.

Beispiel 1. Man löse die DGL $y' = 2xy + e^{x^2}$. Es ist $y' = a(x)y + b(x)$ mit $a(x) = 2x$ und $b(x) = e^{x^2}$. Eine Stammfunktion von $a(x)$ ist $\mathcal{A}(x) = \int 2x\, dx = x^2$. Nach (2) folgt
$y(x) = e^{\mathcal{A}(x)} \int e^{-\mathcal{A}(x)} b(x)\, dx = e^{x^2} \int e^{-x^2} e^{x^2}\, dx = e^{x^2} \int 1\, dx = e^{x^2}\big(x + c\big)$.

Probe. $y = e^{x^2}\big(x + c\big) \implies y' = 2xe^{x^2}\big(x + c\big) + e^{x^2} \cdot 1 = 2xy + e^{x^2}$ ✓

Beispiel 2. Man löse die Anfangswertaufgabe $y' = \sin(x)y + 3x^2 e^{-\cos(x)}$ mit $y(\pi) = 0$.
Es ist $y' = a(x)y + b(x)$ mit $a(x) = \sin(x)$ und $b(x) = 3x^2 e^{-\cos(x)}$.

Eine Stammfunktion von $a(x) = \sin(x)$ ist $\mathcal{A}(x) = \int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$. Nach (2) folgt

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\mathcal{A}(x)} \int e^{-\mathcal{A}(x)} \cdot b(x)\,dx \\ &= e^{-\cos(x)} \int e^{\cos(x)} \cdot 3x^2 e^{-\cos(x)}\,dx \\ &= e^{-\cos(x)} \int 3x^2\,dx \qquad \text{da} \;\; e^{\cos(x)}e^{-\cos(x)} = e^{\cos(x)-\cos(x)} = e^0 = 1 \\ &= e^{-\cos(x)}\Big(x^3 + c\Big) \end{aligned}$$

Anfangsbedingung: Es ist $y(\pi) = e^{-\cos(\pi)}\big(\pi^3 + c\big) = e^{-(-1)}\big(\pi^3 + c\big) \overset{!}{=} 0$. Es folgt $\pi^3 + c = 0$ und also $c = -\pi^3$.

Lösung der Anfangswertaufgabe: $y(x) = e^{-\cos(x)}\big(x^3 - \pi^3\big)$.

Probe. $y = e^{-\cos(x)}\big(x^3 - \pi^3\big) \Longrightarrow$
$y' = \sin(x)e^{-\cos(x)}\big(x^3 - \pi^3\big) + e^{-\cos(x)} \cdot 3x^2 = \sin(x)y + 3x^2e^{-\cos(x)}$ ✓

7.3 DGL mit getrennten Variablen $y' = f(x)g(y)$

Sei $g\colon J \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$ stetige Funktion mit $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$. Eine DGL der Form $y' = f(x)\,g(y)$ nennt man eine DGL mit *getrennten Variablen.*

Schreibt man die DGL als $\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$, so folgt $\frac{1}{g(y)}\,\frac{dy}{dx} = f(x)$, und man kann dies formal umformen zu $\frac{1}{g(y)}\,dy = f(x)\,dx$. Man integriert nun auf beiden Seiten und erhält eine Lösung der DGL $y' = f(x)\,g(y)$, indem man die Gleichung

$$\text{(3)} \qquad \int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx$$

nach y auflöst. Die Lösung y schreibt man dann auch als $y(x)$.

Beispiel 1. Man löse die Anfangswertaufgabe $y' = -\frac{1}{x^2}e^{-y}$ mit $y(2) = 0$. Es ist $y' = f(x)g(y)$ mit $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ und $g(y) = e^{-y}$. Es folgt $g(y) = \frac{1}{e^y}$ und also $\frac{1}{g(y)} = e^y$. Man hat nun die folgende Implikationskette:

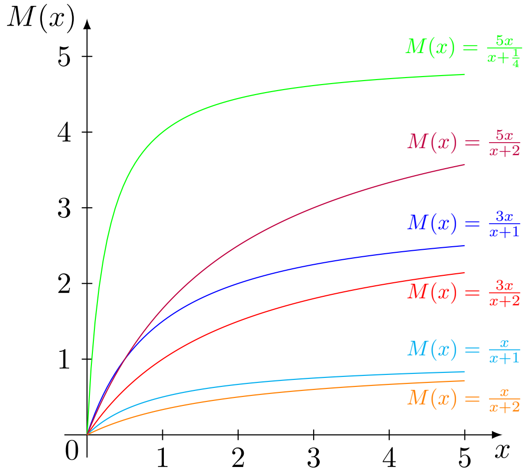
$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx \Longrightarrow \int e^y\,dy = \int -\frac{1}{x^2}\,dx \\ &\Longrightarrow e^y = \frac{1}{x} + c \Longrightarrow y = \ln\Big(\frac{1}{x} + c\Big). \end{aligned}$$

Anfangsbedingung: Es ist $y(x) = \ln(\frac{1}{x} + c)$ und also $y(2) = \ln(\frac{1}{2} + c) \stackrel{!}{=} 0$. Anwenden der Exponentialfunktion ergibt $\frac{1}{2} + c = e^0 = 1$ und also $c = \frac{1}{2}$.
Lösung der Anfangswertaufgabe: $y(x) = \ln(\frac{1}{x} + \frac{1}{2})$ für $x > 0$.

Probe. $y = \ln(\frac{1}{x} + c) \Longrightarrow$
$y' = \frac{1}{\frac{1}{x}+c} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{e^{\ln(\frac{1}{x}+c)}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{e^y} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2}\, e^{-y}$ ✓

Beispiel 2. Seien $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ konstant und $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$. Man löse die DGL $y' = \frac{by^2}{ax^2}$. Es ist $y' = \frac{b}{ax^2} \cdot y^2 = f(x)g(y)$ mit $f(x) = \frac{b}{ax^2}$ und $g(y) = y^2$.
Löse also die Gleichung $\int \frac{1}{y^2}\, dy = \int \frac{b}{ax^2}\, dx$ nach y auf. Integrieren auf beiden Seiten ergibt $-\frac{1}{y} = -\frac{b}{ax} + c = -\frac{b-cax}{ax}$ und also durch Multiplikation mit -1 und Kehrwertbildung die Lösung $y(x) = \frac{ax}{b-cax}$.
Für $c := -\frac{1}{a}$ erhält man die *Michaelis-Menten-Funktion* $M(x) = \frac{ax}{x+b}$. Die Probe hierfür wurde bereits in Aufgabe 50 gemacht.

Als eine *Dosis-Wirkungsfunktion* zeigt die Michaelis-Menten-Funktion, dass sich die Wirkung $M(x)$ eines Medikaments mit wachsender Dosis x einer Sättigung a nähert, denn es ist $M(x) = \frac{a}{1+\frac{b}{x}}$ und also $\lim\limits_{x\to\infty} M(x) = a$.



7.4 DGL vom Typ $y' = g(y)$

Dieser Typ ist ein Spezialfall des Typs in 7.3 mit $f(x) = 1$ und also mit $\int f(x)\, dx = \int dx = x + c$. Es sei wieder $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$.
Man erhält dann eine Lösung der DGL $y' = g(y)$, indem man die Gleichung

$$\int \frac{1}{g(y)}\, dy = x + c \quad \text{nach } y \text{ auflöst.}$$

Beispiel. Man löse für $y > 0$ die Anfangswertaufgabe $y' = y + y^2$ mit $y(0) = 1$. (Dabei wird Partialbruchzerlegung geübt.)
Um die DGL zu lösen, ist die Gleichung $\int \frac{1}{y+y^2}\,dy = x+c$ nach y aufzulösen.

Zunächst berechnen wir $\int \frac{1}{y+y^2}\,dy$. Ein Ansatz mit *Partialbruchzerlegung* ergibt $\frac{1}{y+y^2} = \frac{1}{y(1+y)} \overset{!}{=} \frac{A}{y} + \frac{B}{1+y} = \frac{A(1+y)+By}{y(1+y)} = \frac{A+Ay+By}{y(1+y)} = \frac{A+(A+B)y}{y(1+y)}$, und nach Koeffizientenvergleich folgt $A = 1$ und $A + B = 0$, also $B = -1$. Es folgt $\frac{1}{y+y^2} = \frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}$ und daher

$$\int \frac{1}{y+y^2}\,dy = \int \frac{1}{y}\,dy - \int \frac{1}{1+y}\,dy = \ln(y) - \ln(1+y) = \ln\left(\frac{y}{1+y}\right).$$

Also ist die Gleichung $\ln\left(\frac{y}{1+y}\right) = x + c$ nach y aufzulösen. Anwenden der Exponentialfunktion auf beiden Seiten ergibt:
$\frac{y}{1+y} = e^{x+c}$, also $y = e^{x+c}(1+y) = e^{x+c} + ye^{x+c}$. Es folgt $y - ye^{x+c} = e^{x+c}$ und daher $y \cdot (1 - e^{x+c}) = e^{x+c}$. Dies ergibt $y(x) = \frac{e^{x+c}}{1-e^{x+c}} = \frac{e^c e^x}{1-e^c e^x}$.

Probe. Benutze die Quotientenregel: $y = \frac{e^{x+c}}{1-e^{x+c}} \Longrightarrow$
$y' = \frac{e^{x+c}(1-e^{x+c})+e^{x+c}e^{x+c}}{(1-e^{x+c})^2} = \frac{e^{x+c}}{1-e^{x+c}} + \frac{(e^{x+c})^2}{(1-e^{x+c})^2} = y + y^2 \quad \checkmark$

Anfangsbedingung: Es ist $y(0) = \frac{e^c}{1-e^c} \overset{!}{=} 1$, also $e^c = 1 - e^c$ und $e^c = \frac{1}{2}$.
Lösung der Anfangswertaufgabe: $y(x) = \frac{\frac{1}{2}e^x}{1-\frac{1}{2}e^x} = \frac{e^x}{2-e^x}$ für $x < \ln(2)$.

7.5 Übersichtstabelle

Die in der folgenden Tabelle aufgeführten DGL-Typen sind der Reihe nach in den Abschnitten 6.2, 7.1, 7.2, 7.3 und 7.4 behandelt worden.

Typ	DGL	Lösung oder Lösungsweg
I	$y' = f(x)$	$y = \int f(x)\,dx$
II	$y' = a(x)\,y$ homogene lineare DGL	$y = ce^{\mathcal{A}(x)}$ wobei $\mathcal{A}'(x) = a(x)$, also $\mathcal{A}(x) = \int a(x)\,dx$
III	$y' = a(x)\,y + b(x)$ lineare DGL	$y = e^{\mathcal{A}(x)} \cdot \int e^{-\mathcal{A}(x)}\,b(x)\,dx$ wobei $\mathcal{A}'(x) = a(x)$
IV	$y' = f(x)\,g(y)$, DGL mit getrennten Variablen	Löse folgende Gleichung nach y auf: $\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx$
V	$y' = g(y)$ (Spezialfall von Typ IV)	Löse folgende Gleichung nach y auf: $\int \frac{1}{g(y)}\,dy = x + c$

Beispiel. Für den *Dampfdruck* $p = p(T)$ einer Flüssigkeit bei absoluter Temperatur T gilt näherungsweise die DGL

$$(*)\qquad \frac{dp}{dT} = \frac{q_0 + (C_p - C)T}{RT^2}\, p\,,$$

wobei C die Molekülwärme der Flüssigkeit, C_p die Molwärme des Dampfes, q_0 die Verdampfungswärme bei $T = T_0$ und R die Gaskonstante ist. Die DGL ist vom Typ II, denn es ist $\frac{dp}{dT} = a(T)\, p$ mit

$$a(T) = \frac{q_0 + (C_p - C)T}{RT^2} = \frac{q_0}{RT^2} + \frac{C_p - C}{RT}\,.$$

Es sei die Anfangsbedingung $p(T_0) = p_0$ vorgegeben. Wähle als Stammfunktion von $a(T)$ gemäß Hauptsatz in 6.2 die Funktion

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(T) &= \int_{T_0}^{T} a(t)dt = \left(-\frac{q_0}{Rt} + \frac{C_p - C}{R}\ln(t)\right)\Bigg|_{T_0}^{T} \\ &= -\frac{q_0}{RT} + \frac{q_0}{RT_0} + \frac{C_p - C}{R}\ln\left(\frac{T}{T_0}\right).\end{aligned}$$

Nach (1) in 7.1 wird die DGL $(*)$ durch $p(T) = ce^{\mathcal{A}(T)}$ gelöst. Da $\mathcal{A}(T_0) = 0$ gilt, ist $c = ce^0 = ce^{\mathcal{A}(T_0)} = p(T_0) = p_0$ Wir erhalten die Lösung

$$p(T) = p_0 e^{\mathcal{A}(T)} = p_0\, e^{\frac{q_0}{RT_0} - \frac{q_0}{RT}} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{C_P - C}{R}}\,,$$

da $e^{c\ln(\frac{T}{T_0})} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^c$ nach Definition der allgemeinen Potenz in 4.9 gilt.

7.6 Lösen mit Substitution (ergänzend)

Die DGL-Typen in der folgenden Tabelle kann man jeweils durch eine geeignete Substitution auf einen schon bekannten Typ zurückführen.

VI	$y' = f(x)\, y + g(x)\, y^r$ $r \neq 1$, BERNOULLI-DGL	Substitution $z = y^{1-r}$ ergibt Typ III: $z' = (1-r)f(x)\, z + (1-r)g(x)$
VII	$y' = f(\frac{y}{x})$ homogene DGL	Substitution $z = \frac{y}{x}$ ergibt Typ IV: $z' = \frac{1}{x}\,(f(z) - z)$
VIII	$y' = f(ax + by + d)$ $a, b, d \in \mathbb{R}$	Substitution $z = ax + by + d$ ergibt Typ V: $z' = a + b\, f(z)$
IX	$y' = ay^2 + \frac{b}{x^2}$, $a, b \in \mathbb{R}$ spezielle RICCATI-DGL	Substitution $u = \frac{1}{y}$ ergibt Typ VII: $u' = -a - b\,(\frac{u}{x})^2$

Wir begründen nun, wie man jeweils auf die durch Substitution entstandene DGL kommt. Hat man diese DGL gelöst, so muss man danach rücksubstituieren. Bei Typ IX hat man zweimal zu substituieren und daher auch zweimal zu rücksubstituieren.

VI: Es sei $z := y^{1-r}$ definiert (z. B. für $y > 0$, wenn $r = \frac{1}{2}$ ist). Ist dann $y' = f(x)\,y + g(x)\,y^r$, so folgt nach Kettenregel und durch Einsetzen

$$\begin{aligned} z' &= (1-r)y^{-r}y' = (1-r)y^{-r}(f(x)y + g(x)y^r) \\ &= (1-r)(f(x)y^{1-r} + g(x)) = (1-r)(f(x)z + g(x)). \end{aligned}$$

VII: Ist $z = \frac{y}{x}$ und $y' = f(\frac{y}{x})$ für $x \neq 0$, so folgt

$$z' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x}\left(y' - \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\big(f(z) - z\big).$$

VIII: Ist $z = ax + by + d$ und $y' = f(ax + by + d)$, so folgt

$$z' = a + b\,y' = a + b\,f(z)\,.$$

IX: Ist $u = \frac{1}{y}$ und $y' = ay^2 + \frac{b}{x^2}$ für $x, y \neq 0$, so folgt

$$u' = -\frac{1}{y^2}\,y' = -\frac{1}{y^2}\left(ay^2 + \frac{b}{x^2}\right) = -a - b\left(\frac{u}{x}\right)^2.$$

Im Folgenden rechnen wir zu den Typen VI bis IX je ein Beispiel.

Jacob Bernoulli 1654-1705

Beispiel 1. Man löse die Anfangswertaufgabe $y' = y + y^2$ mit $y(0) = 1$.

Wende **Typ VI** für $y \neq 0$ an. Es ist

$$y' = y + y^2 = f(x)y + g(x)y^r$$

mit $f(x) = 1$ und $g(x) = 1$ sowie $r = 2$ und also $1 - r = 1 - 2 = -1\,.$

Setze $z = y^{1-r} = y^{-1} = \frac{1}{y}$. Es folgt

$$\begin{aligned} z' &= (1-r)f(x)\,z + (1-r)g(x) = -z - 1 \\ &= a(x)z + b(x) \qquad \text{mit } \ a(x) = -1 \ \text{ und } \ b(x) = -1\,. \end{aligned}$$

Es ist $\mathcal{A}(x) = \int a(x)\,dx = -x$, und es folgt $z = e^{\mathcal{A}(x)} \cdot \int e^{-\mathcal{A}(x)} b(x)\,dx = e^{-x} \cdot \int e^x \cdot (-1)\,dx = e^{-x}(-e^x + c) = -1 + ce^{-x}$. Rücksubstitution $y = \frac{1}{z}$ ergibt $y(x) = \frac{1}{-1+ce^{-x}} = \frac{e^x}{-e^x+c}$.

Anfangsbedingung: Es ist $y(0) = \frac{1}{-1+c} \overset{!}{=} 1$, also $1 = -1 + c$ und $c = 2$.

Lösung der Anfangswertaufgabe: $y(x) = \frac{e^x}{2-e^x}$ für $x < \ln(2)$.

In 7.4 haben wir dieselbe Anfangswertaufgabe mit Hilfe von Typ V gerechnet und dasselbe Ergebnis erhalten, denn die Lösung ist durch die Anfangsbedingung eindeutig bestimmt.
Wie ermittelt man das (maximale) Intervall, auf dem die Lösung definiert ist? Da der Nenner der Lösung $y(x) = \frac{e^x}{2-e^x}$ genau für $x = \ln(2)$ Null ist, stehen die Intervalle $\mathbb{R}_{>\ln(2)}$ und $\mathbb{R}_{<\ln(2)}$ zur Auswahl. Wegen der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ kommt nur das zweite Intervall in Frage.
Es sei noch angemerkt, dass das *logistische Wachstumsmodell* in Aufgabe 70 durch eine Bernoulli-DGL beschrieben wird.

Beispiel 2. Man löse die Anfangswertaufgabe $y' = \frac{1}{\cos(\frac{y}{x})} + \frac{y}{x}$ mit $y(1) = 0$.
Die DGL ist vom **Typ VII**. Die Substitution $z = \frac{y}{x}$ ergibt dann die DGL $z' = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\cos(z)} + z - z\right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\cos(z)}$ vom Typ IV. Es folgt $\int \cos(z)\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx$ und also $\sin(z) = \ln(x) + c$. Es folgt $z = \arcsin(\ln(x) + c)$. Rücksubstitution ergibt $y = xz = x\arcsin(\ln(x) + c)$.

Anfangsbedingung: Da $\ln(1) = 0$ ist, folgt $y(1) = \arcsin(c) \stackrel{!}{=} 0$ und also $c = \sin(0) = 0$.
Lösung der Anfangswertaufgabe: $y(x) = x\arcsin(\ln(x))$ für $x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$.

Das Lösungsintervall ist hier im Hinblick auf Definitions- und Wertebereich von arcsin: $[-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ relativ klein.

Probe. Benutze $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ und also $\cos(t) = \sqrt{1 - \sin^2(t)}$ für $t \in \mathbb{R}$. Nach 5.4.5 und 5.4.7 sowie Produkt- und Kettenregel gilt dann:
$y = x\arcsin(\ln(x)) \Longrightarrow y' = \arcsin(\ln(x)) + \frac{x}{\sqrt{1-\ln(x)^2}} \cdot \frac{1}{x}$
$= \frac{y}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(\ln(x)))}} = \frac{y}{x} + \frac{1}{\cos(\frac{y}{x})}$ ✓

Beispiel 3. Man löse die Anfangswertaufgabe $y' = (x + y)^2$ mit $y(0) = 1$.
Die DGL ist vom **Typ VIII** mit $a = 1 = b$ und $d = 0$. Die Substitution $z = x + y$ ergibt dann $z' = 1 + z^2$ vom Typ V. Danach ist die DGL

$$\int \frac{1}{1 + z^2}\,dz = x + c$$

nach z aufzulösen. Es folgt $\arctan(z) = x + c$ und also $z = \tan(x + c)$. Nach Rücksubstitution $y = z - x$ erhält man $y(x) = \tan(x + c) - x$.

Anfangsbedingung: Es ist $y(0) = \tan(c) \stackrel{!}{=} 1$ und also $c = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

Lösung der Anfangswertaufgabe: $y(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - x$ für alle $x \in \left]-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.

Probe. $y = \tan(x+c) - x \Longrightarrow y' = 1 + \tan^2(x+c) - 1 = (y+x)^2$ ✓

Jacopo Francesco Riccati 1676-1754

Beispiel 4. Man löse die Anfangswertaufgabe $y' = -\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{x^2}$ mit $y(1) = 4$.

Wende **Typ IX** an.
Es ist $y' = ay^2 + \frac{b}{x^2}$ mit $a = -\frac{1}{4}$ und $b = -1$.
Die Substitution $u = \frac{1}{y}$ ergibt die DGL $u' = \frac{1}{4} + (\frac{u}{x})^2$ vom Typ VII.
Die Substitution $z = \frac{u}{x}$ ergibt die DGL $z' = \frac{1}{x}(\frac{1}{4} + z^2 - z) = \frac{1}{x}(z - \frac{1}{2})^2$ vom Typ IV. Also ist die Gleichung $\displaystyle\int \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx$ nach z aufzulösen.

Wir erhalten die Implikationskette:
$\int \frac{1}{(z-\frac{1}{2})^2}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx \Longrightarrow -\frac{1}{z-\frac{1}{2}} = \ln(x) + c \Longrightarrow z - \frac{1}{2} = -\frac{1}{\ln(x)+c} \Longrightarrow$
$z = \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln(x)+c} \Longrightarrow u = xz = \frac{x}{2} - \frac{x}{\ln(x)+c} = \frac{x\ln(x)+xc-2x}{2\,(\ln(x)+c)}$.

Es folgt $y(x) = \frac{1}{u} = \frac{2\ln(x)+2c}{x\ln(x)+xc-2x}$.

Anfangsbedingung: Es ist $y(1) = \frac{2c}{c-2} \overset{!}{=} 4$, also $2c = 4c - 8$ und $c = 4$.
Lösung der Anfangswertaufgabe: $y(x) = \frac{2\ln(x)+8}{x\ln(x)+2x}$ für $x > \frac{1}{e^2}$.

Probe. Aus $y = \frac{2\ln(x)+8}{x(\ln(x)+2)}$ folgt

$-\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{4}\,\frac{(2\ln(x)+8)^2}{x^2(\ln(x)+2)^2} - \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{4}\,\frac{4\ln^2(x)+32\ln(x)+64}{x^2(\ln(x)+2)^2} - \frac{1}{x^2} =$
$\frac{-\ln^2(x)-8\ln(x)-16}{x^2(\ln(x)+2)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{-\ln^2(x)-8\ln(x)-16-(\ln(x)+2)^2}{x^2(\ln(x)+2)^2} = \frac{-2\ln^2(x)-12\ln(x)-20}{x^2(\ln(x)+2))^2}$

und $y' = \frac{\frac{2}{x}x(\ln(x)+2)-(2\ln(x)+8)(\ln(x)+3)}{x^2(\ln(x)+2))^2} = \frac{2\ln(x)+4-2\ln^2(x)-6\ln(x)-8\ln(x)-24}{x^2(\ln(x)+2))^2}$
$= \frac{-2\ln^2(x)-12\ln(x)-20}{x^2(\ln(x)+2))^2} = -\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{x^2}$ ✓

Bemerkung. Die *allgemeine Riccati-DGL* hat die Form

$$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x).$$

Sind f und g konstant und beide > 0, so stellt die DGL $y' = -fy^2 + gy + h(x)$ ein Modell für *natürliches Wachstum* dar, das durch eine *Steuerungsfunktion* $h(x)$ von außen beeinflusst wird, vgl. [13, Kap. 9, § 2].

7.7 Aufgaben 68 – 76

Aufgabe 68. Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $y' = 2x\,y + e^{x^2}\sin(x)$ mit $y(0) = 1$ und bestätigen Sie Ihr Ergebnis durch eine Probe.

Aufgabe 69. Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $y' = \sin(x)\,e^y$ mit $y(\pi) = 0$ und bestätigen Sie Ihr Ergebnis durch eine Probe.

Aufgabe 70. (Anwendung Bio)
Sei $N = N(t)$ die Anzahl der Individuen in einer Population zum Zeitpunkt $t > 0$. Dann wird die Zuwachsrate im *logistischen Wachstumsmodell* durch die DGL $\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K})$ beschrieben, wobei $r > 0$ eine Populationskonstante ist, $K \in \mathbb{R}$ die *Umweltkapazität* bezeichnet und stets $0 < N < K$ vorausgesetzt ist.

a) Nennen Sie alle DGL-Typen aus der Vorlesung, mit deren Lösungswegen Sie die DGL $\frac{dN}{dt} = rN\big(1 - \frac{N}{K}\big)$ lösen könnten. Lösen Sie anschließend die DGL nach einem dieser Verfahren.

   Hinweis: Es ist $\frac{K}{N(K-N)} = \frac{1}{N} + \frac{1}{K-N}$.

b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{t\to\infty} N(t)$ für Ihre Lösung N aus a) und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 71. (Anwendung Geo)
Wir betrachten den radioaktiven Zerfall von Radium in Radon und von Radon in Polonium in Abhängigkeit von der Zeit $t \geqslant 0$. Es gelten folgende Bezeichnungen:

- $N_1(t)$ beschreibt die Anzahl der Radiumatome zur Zeit t so, dass für $t = 0$ gilt $N_1(0) = N_0 > 0$ mit einer Zerfallskonstanten λ_1 .
- $N_2(t)$ beschreibt die Anzahl an Radonatomen zur Zeit t so, dass für $t = 0$ gilt $N_2(0) = 0$ mit einer Zerfallskonstanten $\lambda_2 \neq \lambda_1$.

Der Zerfall von Radium wird beschrieben durch die Differentialgleichung

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1.$$

Diese DGL vom Typ II hat die Lösung $N_1 = N_0 e^{-\lambda_1 t}$. Das aus dem Radium entstandene Radon zerfällt weiter zu Polonium, so dass sich die folgende DGL ergibt (für $\lambda_1 \neq \lambda_2$):

$$\frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1 = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}.$$

a) Lösen Sie diese DGL mit obiger Anfangsbedingung $N_2(0) = 0$.
b) Berechnen Sie die Lösung unter der Annahme $\lambda_1 = \lambda_2$ mit obigen Anfangsbedingungen.

Aufgabe 72. (Zur Wiederholung)
Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \sin\big(\sin(x)\big)$ (b) $f(x) = e^{-x^2}$

(c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (d) $f(x) = \sqrt{e^x \cdot (1 + x^2)}$

Aufgaben aus dem Kurs 2004/05

Aufgabe 73. Ermitteln Sie eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Ableitung

$$F'(x) = 4\left(3\,\sin^2(x) + 4\sin(x) + 2\right)\,\cos(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 74. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen und bestätigen Sie jeweils Ihr Ergebnis durch Differenzieren der ermittelten Lösung.

a) $y' = \cos(x)\,y + e^{\sin(x)}$,

b) $y' - y^2\,\sin(x) = 0$.

Aufgabe 75. Sei $-1 < x < 1$. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' + \frac{x}{1 - x^2}\,y = x\,\sqrt{y}\,.$$

Aufgabe 76. a) Gegeben sei eine Differentialgleichung der Form

$$y'' + a_1\,y' + a_0\,y = 0 \ \text{ mit } a_1, a_0 \in \mathbb{R}\,.$$

Die dazu gehörige *charakteristische Gleichung* $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ besitze zwei verschiedene reelle Lösungen λ_1 und λ_2. Bilden Sie die erste und zweite Ableitung von

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \qquad \text{(mit Konstanten } c_1, c_2 \in \mathbb{R}\text{)}$$

und zeigen Sie, dass y die Differentialgleichung $y'' + a_1\,y' + a_0 = 0$ erfüllt und somit eine Lösung ist. (Man nennt y die *allgemeine Lösung.*)

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

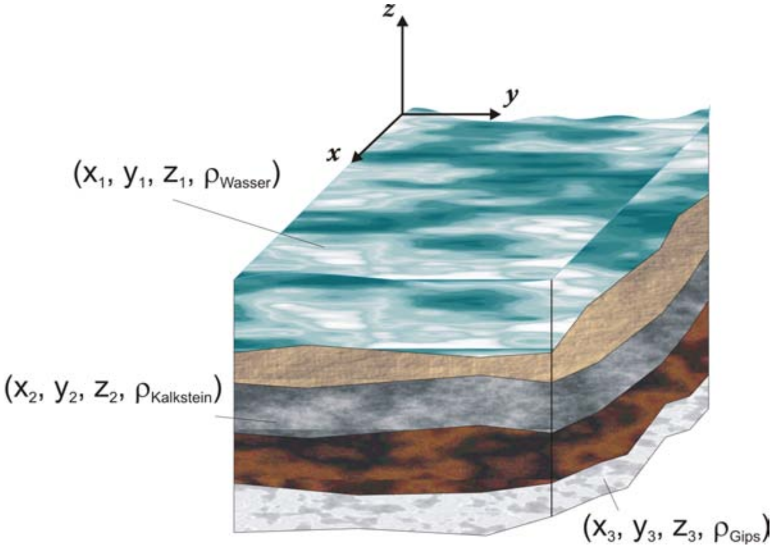
$$y'' - y' - 2y = 0\,.$$

8 Funktionen mehrerer Veränderlicher

Die meisten Vorgänge in der Natur hängen von mehreren Ursachen ab. Bei ihrer Modellierung hat man also mehrere Veränderliche zu berücksichtigen.

Beispiele. 1. OHMsches Gesetz: $I = \frac{U}{R}$ wobei I die Stromstärke, U die Spannung und R der Widerstand ist. Man kann U und R unabhängig voneinander verändern und erhält I als Funktion der beiden Veränderlichen U und R. Man schreibt dann auch $I = f(U, R)$.

2. Untersucht man den Erdboden und darunterliegende Gesteinsschichten näher, so kann man z. B. deren Dichte oder Wärmeleitfähigkeit ρ als Funktion der drei Ortskoordinaten x, y, z modellieren.



8.1 Reellwertige Funktionen

Sei D eine Teilmenge des n-dimensionalen Raums $\mathbb{R}^n$. Eine *reellwertige Funktion von n Veränderlichen* ist eine Abbildung $f\colon D \to \mathbb{R}$. Sie ordnet jedem Punkt $(x_1, \dots, x_n) \in D$ genau eine reelle Zahl $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ zu. Ist $n = 2$ oder $n = 3$, so schreibt man auch $f(x, y)$ oder $f(x, y, z)$.

Beispiele. 1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^3 + y^4$.

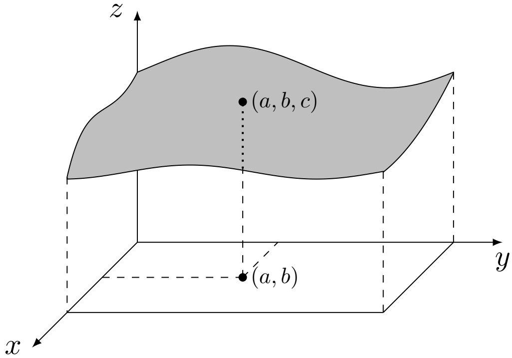
2. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x - y}$ für $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$.

8.2 Der Graph einer Funktion

Sei $D \subset \mathbb{R}$. Dann lässt sich $\mathrm{Graph}(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D\}$ einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ durch eine *Kurve* im $\mathbb{R}^2$ veranschaulichen, (vgl. Anfang von Kapitel 4).
Sei nun $D \subset \mathbb{R}^2$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann lässt sich

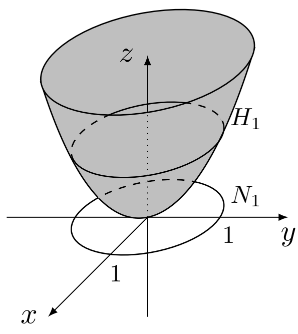
$$\mathrm{Graph}(f) := \{\big(x, y, f(x)\big) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D\}$$

durch eine *Fläche* im $\mathbb{R}^3$ veranschaulichen:



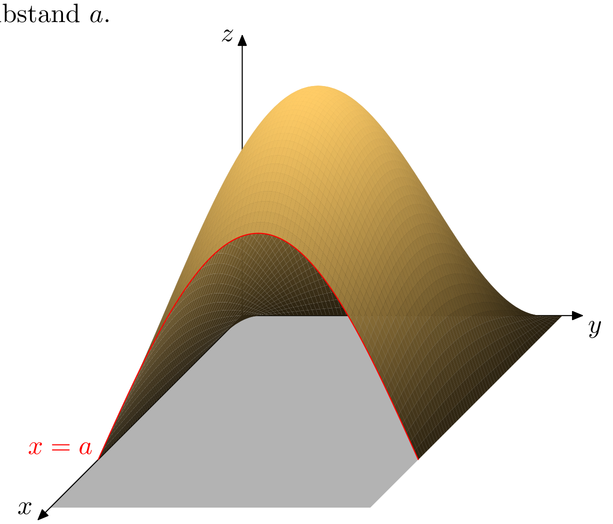
Es ist D eine Teilmenge der (x, y)-Ebene. Über dem Punkt $(a, b) \in D$ liegt der Punkt $(a, b, c) \in \mathrm{Graph}(f)$ mit $c = f(a, b)$. Um zu einem Schaubild von $\mathrm{Graph}(f)$ zu gelangen, benutzt man als Hilfsmittel:

- Die *Niveaulinie* zu konstantem Niveau $c \in \mathbb{R}$. Dabei handelt es sich um die Menge $N_c := \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}$ in D. Sie wird auch als *Höhenlinie* bezeichnet.
- Den Schnitt H_c von $\mathrm{Graph}(f)$ mit der Ebene $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = c\}$. (Für $c = 0$ entspricht das der Niveaulinie N_0.)

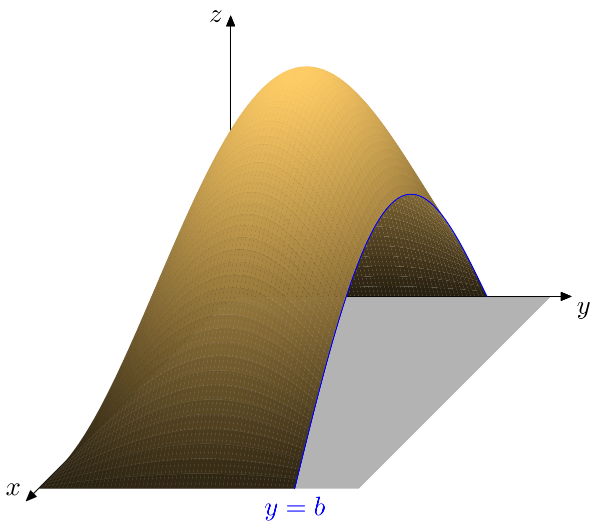


$f(x, y) = x^2 + y^2$

- Zu passendem $a \in \mathbb{R}$ den Graph der *partiellen Funktion* $y \mapsto f(a, y)$, dabei handelt es sich um den Schnitt von Graph(f) mit der Ebene $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = a\}$, d. h. mit der Ebene parallel zur (y,z)-Ebene im Abstand a.



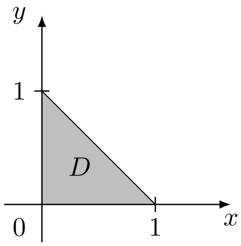
- Zu passendem $b \in \mathbb{R}$ den Graph der *partiellen Funktion* $x \mapsto f(x, b)$, dabei handelt es sich um den Schnitt von Graph(f) mit der Ebene $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = b\}$, d. h. mit der Ebene parallel zur (x,z)-Ebene im Abstand b.

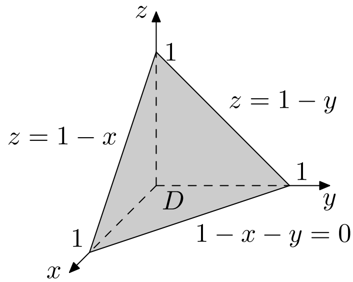


Beispiel. Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0 \text{ und } x + y \leqslant 1\}$, und sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = 1 - x - y =: z$. Man zeichne D und Graph(f).

Es ist D die Dreiecksfläche mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$, (denn für $y = 0$ ist $0 \leqslant x \leqslant 1$ und für $x = 0$ ist $0 \leqslant y \leqslant 1$.)

- Die Elemente der Niveaumenge zum Niveau 0 erfüllen die Geradengleichung $1 - x - y = 0$ in D.
- Der Graph der Funktion $y \mapsto f(0,y) = 1 - y$ ist eine Gerade in der (y,z)-Ebene, gegeben durch $z = 1 - y$.
- Der Graph der Funktion $x \mapsto f(x,0) = 1 - x$ ist eine Gerade in der (x,z)-Ebene, gegeben durch $z = 1 - x$.





Der Graph von f ist dann die Dreiecksfläche mit den Eckpunkten $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$.

Bemerkung. Für $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f \colon D \to \mathbb{R}$ ist Graph$(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, nämlich

$$\text{Graph}(f) := \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, \ldots, x_n) \in D \text{ und } x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

8.3 Stetigkeit

Sei $D \subset \mathbb{R}$. Dann heißt eine Funktion $f \colon D \to \mathbb{R}$ *stetig im Punkt* $a \in D$, wenn für jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in D mit $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = a$ gilt: $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = f(a)$, vgl. 4.1.

Für Funktionen von 2 Veränderlichen lässt sich die Definition wie folgt verallgemeinern:

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$. Eine Funktion $f \colon D \to \mathbb{R}$ heißt *stetig im Punkt* $(a,b) \in D$, wenn für je zwei Folgen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $(x_k, y_k) \in D$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = a$ sowie $\lim\limits_{k \to \infty} y_k = b$ gilt: $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k, y_k) = f(a,b)$.

Ist $f \colon D \to \mathbb{R}$ in allen Punkten aus D stetig, so heißt f *stetig*.

Beispiel. Man ermittle, ob die folgende Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Punkt $(0,0)$ stetig ist:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Für die Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k = \frac{1}{k} = y_k$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$ und $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = 0$. Andererseits ist

$$f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k}\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{k^2}}{2 \cdot \frac{1}{k^2}} = \frac{3}{2}\,.$$

Also ist $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = \frac{3}{2} \neq 0 = f(0,0)$. Die Funktion ist daher im Punkt $(0,0)$ nicht stetig.

Bemerkung. Für Funktionen von n Veränderlichen verallgemeinert sich die Definition der Stetigkeit wie folgt: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$.
Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *stetig im Punkt* $(a_1, \ldots, a_n) \in D$, wenn für je n Folgen $(x_{1,k})_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, (x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $(x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}) \in D$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{k\to\infty} (x_{1,k}) = a_1, \ldots, \lim\limits_{k\to\infty} (x_{n,k}) = a_n$ gilt:

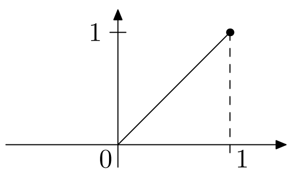
$$\lim_{k\to\infty} f(x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}) = f(a_1, \ldots, a_n).$$

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ in allen Punkten aus D stetig, so heißt f *stetig.*

8.4 Offene Mengen im $\mathbb{R}^n$

Stimmt die folgende Aussage? Wenn eine Funktion f im Punkt x_0 ein Maximum hat, so ist $f'(x_0) = 0$. Nein, im Allgemeinen nicht.

Beispiel. $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto x.$

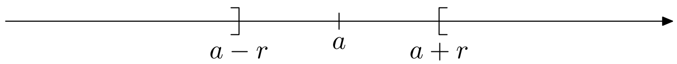


Dann hat f in $x_0 = 1$ ein Maximum. Aber es ist $f'(x) = 1$ für alle $x \in [0,1]$. Insbesondere ist $f'(x_0) = 1 \neq 0$.
Das Maximum am Rand des abgeschlossenen Intervalls $[0,1]$ macht Probleme. Betrachten wir eine differenzierbare Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem *offenen* Intervall I in $\mathbb{R}$, so ist die obige Aussage für $x_0 \in I$ richtig.

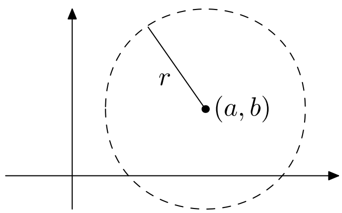
Ein Beispiel für eine *offene Menge im* $\mathbb{R}^n$ ist das Innere eines „Balls“ mit Mittelpunkt $(a_1, \ldots, a_n)$ und Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$, definiert durch

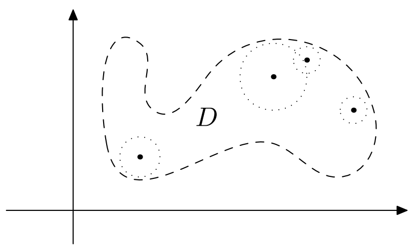
$$B_r\big((a_1, \ldots, a_n)\big) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} < r\}.$$

Für $\boldsymbol{n = 1}$ ist $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid a - r < x < a + r\}$ das offene Intervall $]a - r, a + r[$ in $\mathbb{R}$.



Für $\boldsymbol{n = 2}$ ist $B_r\big((a, b)\big) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < r\}$ das Innere eines Kreises mit Mittelpunkt (a, b) und Radius r.





Definition. Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt *offen,* wenn es zu jedem Punkt $(a_1, \ldots, a_n) \in D$ ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, für das gilt: $B_r\big((a_1, \ldots, a_n)\big) \subset D$.

8.5 Partielle Differenzierbarkeit

Beispiel 1. Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit drei Veränderlichen:

$$f(x, y, z) = 3x^2y + \cos(y) + 4xz^2.$$

Die *partiellen Ableitungen* von f erhält man, indem man jeweils zwei Veränderliche als konstant ansieht und nach der dritten differenziert:

1. Betrachte y und z als konstant und differenziere nach x. Erhalte die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 6xy + 4z^2$.

2. Betrachte x und z als konstant und differenziere nach y. Erhalte die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 3x^2 - \sin(y)$.

3. Betrachte x und y als konstant und differenziere nach z. Erhalte die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 8xz$.

Häufig ist auch nach den partiellen Ableitungen in einem bestimmten Punkt gefragt. Zum Beispiel besitzt die Funktion $f(x,y,z) = 3x^2y + \cos(y) + 4xz^2$ im Punkt $(1,0,1)$ die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0,1) = 4 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0,1) = 3 \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(1,0,1) = 8.$$

Wir haben hier ein Beispiel einer Funktion, die in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs nach allen Richtungen „partiell differenzierbar" ist. Das braucht im Allgemeinen nicht so zu sein.

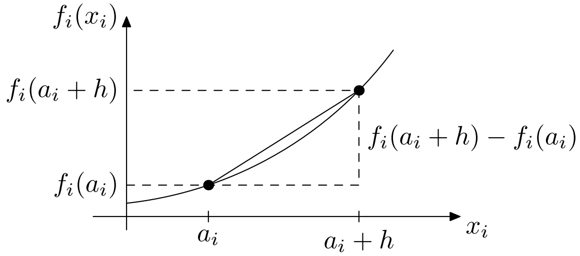
Definition. Sei $n \geqslant 2$ und $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion in n Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$. Dann heißt f im Punkt $(a_1, \ldots, a_n) \in D$ *partiell differenzierbar nach x_i,* falls die i-te *partielle Funktion*

$$f_i : x_i \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

in a_i differenzierbar ist. Hierbei ist $i \in \{1, \ldots, n\}$. Man nennt dann

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) := f_i'(a_i) = \lim_{h \to 0} \frac{f_i(a_i + h) - f_i(a_i)}{h}$$

die *partielle Ableitung von f nach x_i* im Punkt $(a_1, \ldots, a_n)$.



Wenn f in jedem Punkt aus D partiell nach x_i differenzierbar ist, so heißt *f partiell differenzierbar nach x_i,* und die Funktion

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f_i'(x_i)$$

heißt die *partielle Ableitung* von f nach x_i. Man schreibt auch f_{x_i} dafür. Existieren die partiellen Ableitungen f_{x_i} für alle $i = 1, \ldots, n$, so heißt f *partiell differenzierbar.*

Es sei noch angemerkt: Da D offen ist, kann man sich bei der Limesbildung $h \to 0$ auf solche $h \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ beschränken, für die $f_i(a_i + h)$ definiert ist. Anders als für $n = 1$ folgt aus partieller Differenzierbarkeit nicht Stetigkeit.

Man erhält die partielle Ableitung nach x_i, indem man alle Veränderlichen außer x_i als konstant ansieht und nach x_i differenziert.

Beispiel 2. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = 5x^2y + e^{3x}\sin(2y) + \cos(x).$$

hat die folgenden partiellen Ableitungen:

1. Betrachte y als konstant und differenziere nach x. Erhalte die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 10xy + 3e^{3x}\sin(2y) - \sin(x)$.
2. Betrachte x konstant und differenziere nach y. Erhalte die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 5x^2 + 2e^{3x}\cos(2y)$.

Wenn y als konstant angesehen wird, ist auch $\sin(2y)$ konstant. Und wenn x als konstant betrachtet wird, sind auch $5x^2$ und e^{3x} sowie $\cos(x)$ konstant.

8.6 Höhere partielle Ableitungen

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion. Wenn die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =: f_x \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =: f_y$$

auch noch partiell differenzierbar sind, so kann man die *zweiten partiellen Ableitungen* bilden:
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) := \frac{\partial f_x}{\partial x}(x,y)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) := \frac{\partial f_y}{\partial y}(x,y)$ sowie
$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) := \frac{\partial f_x}{\partial y}(x,y)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) := \frac{\partial f_y}{\partial x}(x,y)$.
Man nennt dann f *zweimal partiell differenzierbar.*

Beispiel 1. Es ist $f(x,y) = x^4\sin(2y)$ ist partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3\sin(2y) =: f_x \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^4\cos(2y) =: f_y\,.$$

Dies sind wiederum partiell differenzierbare Funktionen. Die *zweiten partiellen Ableitungen* von f sind

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) := \frac{\partial f_x}{\partial x}(x,y) = 12x^2\sin(2y)\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) := \frac{\partial f_x}{\partial y}(x,y) = 8x^3\cos(2y)\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) := \frac{\partial f_y}{\partial y}(x,y) = -4x^4\sin(2y)\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) := \frac{\partial f_y}{\partial x}(x,y) = 8x^3\cos(2y)\,.$$

Man kann nun auch noch die dritten partiellen Ableitungen $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)$ und so weiter bilden. Es fällt auf, dass die *gemischten partiellen Ableitungen* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ übereinstimmen. Das ist nicht immer so.

Beispiel 2. Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Die partiellen Funktionen $x \mapsto f(x,0)$ und $y \mapsto f(0,y)$ sind beide die Nullfunktion. Daher folgt $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt nach Produkt- und Quotientenregel

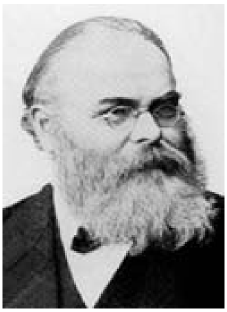
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$ und

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{-2y(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2} = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}\,.$

Es folgt $f_x(0,y) := \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ und $f_y(x,0) := \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x\,.$

Aus Obigem folgt $\boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) =} \lim\limits_{h\to 0}\frac{f_x(0,0+h)-f_x(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{-h-0}{h} \boldsymbol{= -1}$ und $\boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) =} \lim\limits_{h\to 0}\frac{f_y(0+h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{h-0}{h} \boldsymbol{= 1}$.

Die gemischten partiellen Ableitungen stimmen also im Nullpunkt nicht überein. Der folgende Satz von Schwarz sagt aus, dass so etwas nicht passieren kann, wenn alle partiellen Ableitungen stetig sind.

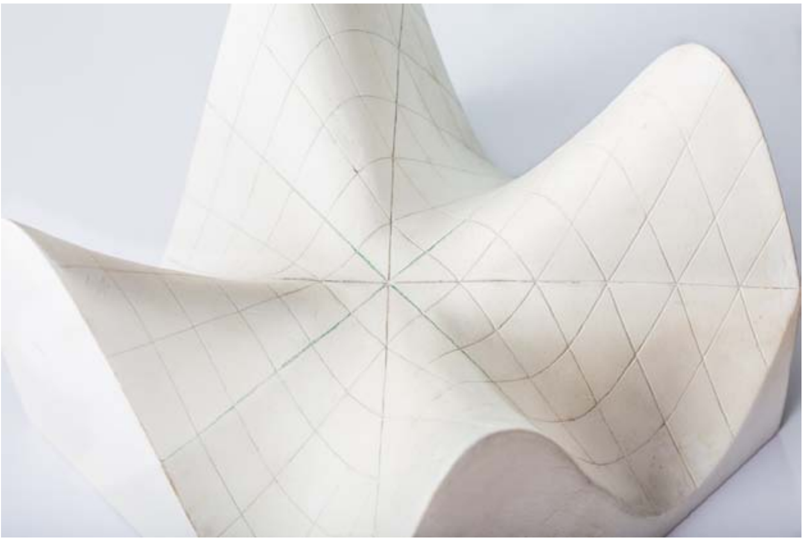


H. A. Schwarz 1843–1921

Satz von Schwarz zur Reihenfolge partiellen Differenzierens

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine zweimal partiell differenzierbare Funktion. Wenn alle partiellen Ableitungen stetig sind, dann gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\,.$$



Das im Foto von Sven Wiese abgebildete Gipsmodell stellt die Funktion aus Beispiel 2 dar. Es ist das Modell Nr. 215 in der *Göttinger Sammlung mathematischer Modelle und Instrumente*. Schwarz hat in den Jahren 1875 bis 1892, in denen er in Göttingen wirkte, wesentlich zum Aufbau der Sammlung beigetragen.

Allgemeiner lautet der Satz von Schwarz für $n \geqslant 2$:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn alle partiellen Ableitungen f_{x_i} und alle zweiten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) := \frac{\partial f_{x_i}}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n)$$

existieren und stetig sind, dann gilt $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \ldots, x_n)$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

8.7 Extremalstellen

Beispiel. Die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ hat im Punkt $(0,0)$ ein Minimum, denn es ist $f(0,0) = 1 \leqslant x^2 + y^2 + 1$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $f : D \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion.

Definition. Die Funktion f hat im Punkt $(a_1, \ldots, a_n) \in D$ ein *lokales Maximum,* wenn es einen Ball $B = B_r((a_1, \ldots, a_n)) \subset D$ gibt, für den

$$f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant f(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{für alle } (x_1, \ldots, x_n) \in B$$

gilt. Sie hat in $(a_1, \ldots, a_n) \in D$ ein *lokales Minimum,* wenn es einen Ball $B = B_r((a_1, \ldots, a_n)) \subset D$ gibt, für den

$$f(x_1, \ldots, x_n) \geqslant f(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{für alle } (x_1, \ldots, x_n) \in B$$

gilt. Punkte, an denen f ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum annimmt, nennt man *Extremalstellen.*

Im Beispiel $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$, also $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Dies gilt allgemein:

Wenn $(a_1, \ldots, a_n) \in D$ *eine Extremalstelle von* f *ist, dann folgt*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) = 0 \quad \textit{für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Die umgekehrte Folgerung ist dagegen im Allgemeinen nicht richtig.

8.8 Extremalbedingungen bei zwei Veränderlichen

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ eine Funktion, die die Voraussetzungen des Satzes von Schwarz erfüllt.

Für $(a,b) \in D$ sei folgende Bedingung erfüllt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

Dann ist der Punkt (a,b) ein Kandidat für eine Extremalstelle von f, braucht aber keine solche zu sein. Um zu weiteren Bedingungen zu gelangen, definieren wir eine Größe $\Delta \in \mathbb{R}$ durch

$$\Delta := \Delta(a,b) := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \right)^2.$$

Dann gelten:

- Ist $\Delta > 0$, so ist (a,b) eine Extremalstelle von f.
- Ist $\Delta > 0$ und gilt $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$, so hat f in (a,b) ein lokales Maximum.
- Ist $\Delta > 0$ und gilt $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$, so hat f in (a,b) ein lokales Minimum.

- Ist $\Delta < 0$, so ist (a,b) keine Extremalstelle von f, (sondern es liegt über (a,b) ein *Sattelpunkt* auf der Fläche).

Ist $\Delta = 0$, dann lässt sich keine so allgemein gültige Aussage treffen. Eine Herleitung der obigen Resultate und etliche Beispiele finden sich zum Beispiel in [9, §173].

Bemerkung. Im Fall $\Delta > 0$ kann man auch nachprüfen, ob $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) > 0$ oder < 0 gilt, da dann $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$ dasselbe Vorzeichen wie $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$ hat. (Dies folgt aus $\Delta > 0$, weil stets $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)\right)^2 \geqslant 0$ gilt.)

Beispiel. Untersuche die Funktion $f(x,y) = 2x^3 + 4xy - 2y^3 + 5$ auf Extremalstellen.

1. Schritt: Bilde die ersten und zweiten partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 + 4y =: f_x \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x - 6y^2 =: f_y\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -12y$$

sowie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial f_x}{\partial y}(x,y) = 4.$$

2. Schritt: Löse in $\mathbb{R}^2$ das Gleichungssystem $f_x = 0,\ f_y = 0$.

$$\begin{array}{ll} \text{1. Gleichung:} & 6x^2 + 4y = 0 \\ \text{2. Gleichung:} & 4x - 6y^2 = 0 \end{array}$$

Die 2. Gleichung nach x aufgelöst, ergibt $x = \frac{3}{2}y^2$. Setze $x^2 = \frac{9}{4}y^4$ in die 1. Gleichung ein und erhalte $\frac{27}{2}y^4 + 4y = 0$, also $\left(\frac{27}{2}y^3 + 4\right)y = 0$. Es folgt $y = 0$ oder $\frac{27}{2}y^3 + 4 = 0$, was $y^3 = -\frac{8}{27}$ ergibt und damit $y = -\frac{2}{3}$ in $\mathbb{R}$. Für $y = 0$ ergibt sich $x = 0$ und für $y = -\frac{2}{3}$ ergibt sich $x = \frac{3}{2}y^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{3}$. Das Gleichungssystem hat demnach die Lösungen $(0,0)$ und $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.

3. Schritt: Prüfe, ob die Lösungen Extremalstellen sind: Es ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)\right)^2 = 0 \cdot 0 - 4^2 = -16 < 0.$$

Also ist $(0,0)$ keine Extremalstelle von f. Es ist

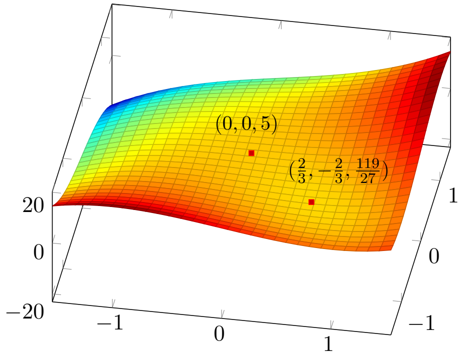
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right)^2 = 8 \cdot 8 - 4^2 = 48 > 0.$$

Also ist $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ eine Extremalstelle von f.

4. Schritt: Entscheide über lokale Maxima oder Minima: Es ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = 8 > 0.$$

Also hat f in $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ ein lokales Minimum.



Wir stellen nun die Fälle $n = 1$ (also $D \subset \mathbb{R}$) und $n = 2$ (also $D \subset \mathbb{R}^2$) in einer Tabelle gegenüber. Dabei benutzen wir die Abkürzungen f_{xx}, f_{yy} und f_{xy} für die zweiten partiellen Ableitungen, und es seien die Voraussetzungen des Satzes von Schwarz erfüllt.

$f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$	$f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^2$
Bestimme die Ableitungen f' und f''	Bestimme die partiellen Ableitungen f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy} und f_{xy}
Bestimme die Lösungen $a \in D$ der Gleichung $f'(x) = 0$	Bestimme die Lösungen $(a, b) \in D$ des Gleichungssystems $f_x = 0, f_y = 0$
Prüfe, ob $f''(a) < 0$ oder $f''(a) > 0$ gilt.	Prüfe, ob $\Delta(a, b) > 0$ gilt. Falls ja, prüfe, ob $f_{xx}(a, b) > 0$ oder $f_{xx}(a, b) < 0$ gilt.
Entscheide, ob f in a ein lok. Minimum oder Maximum hat.	Entscheide, ob f in (a, b) ein lokales Minimum oder Maximum hat.

8.9 Nebenbedingungen (ergänzend)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, deren erste und zweite partielle Ableitungen alle vorhanden und stetig sind. Gefragt ist nach Extremalstellen von f in der Teilmenge

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in D \mid g(x_1, \ldots, x_n) = 0\}.$$

Man bezeichnet die Eigenschaft $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$ dann als *Nebenbedingung.*

Lagrangesche Multiplikatorregel

Bilde eine Hilfsfunktion $L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda g(x_1, \ldots, x_n)$ mit einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ und löse das Gleichungssystem

$$L_{x_1} = 0 \qquad \ldots \qquad L_{x_n} = 0 \qquad L_\lambda = 0,$$

das sich aus den partiellen Ableitungen von L nach $x_1, \dots, x_n$ und λ zusammensetzt. Überlege dann, welche der Lösungen des Gleichungssystems die gestellte Aufgabe lösen.

Erstes Beispiel

Es sind die *Scheitelpunkte einer Ellipse* zu bestimmen, das sind die Punkte mit dem größten oder kleinsten Abstand zum Nullpunkt. Die Ellipse sei durch die Gleichung $x^2 + xy + y^2 - 5 = 0$ gegeben.
Der Abstand eines Punktes (x, y) zum Nullpunkt ist $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Um die Punkte mit dem größten oder kleinsten Abstand zu ermitteln, genügt es, das Quadrat $r^2 = x^2 + y^2$ zu betrachten. Es sind also Extremalstellen der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ unter der *Nebenbedingung*

$$x^2 + xy + y^2 - 5 = 0$$

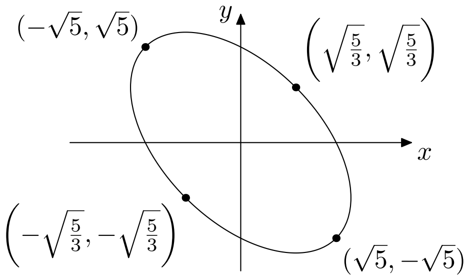
zu bestimmen.
Setze $L = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + xy + y^2 - 5)$ und löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} L_x &= 2x + \lambda(2x + y) = 0 \\ L_y &= 2y + \lambda(2y + x) = 0 \\ L_\lambda &= x^2 + xy + y^2 - 5 = 0. \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt

$$0 = yL_x - xL_y = \lambda(y^2 - x^2).$$

Wenn $\lambda = 0$ wäre, müsste auch $x = 0$ und $y = 0$ gelten, wie ebenfalls aus den ersten beiden Gleichungen folgt. Damit wäre die Nebenbedingung nicht erfüllt. Also muss $\lambda \neq 0$ sein. Es folgt $y^2 - x^2 = 0$ und weiter $x = \pm y$.
Aus $x = y$ folgt mit der Nebenbedingung $3x^2 = 5$, also $x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$. Und aus $x = -y$ folgt mit der Nebenbedingung $x^2 = 5$, also $x = \pm\sqrt{5}$. Die vier Scheitelpunkte der Ellipse sind demnach



Zweites Beispiel

Man bestimme drei reelle Zahlen a, b, c, deren Summe gleich 90 und deren Quadratsumme minimal ist. Es ist also eine Minimalstelle der Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ unter der Nebenbedingung $x + y + z - 90 = 0$ zu bestimmen.
Setze $L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + y + z - 90)$ und löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
L_x &= 2x + \lambda = 0\\
L_y &= 2y + \lambda = 0\\
L_z &= 2z + \lambda = 0\\
L_\lambda &= x + y + z - 90 = 0.
\end{aligned}$$

Aus den ersten drei Gleichungen folgt $x = y = z$. Setze dies in $L_\lambda = 0$ ein. Dann folgt $3x - 90 = 0$ und $x = y = z = 30$.
Der Punkt $(30, 30, 30)$ ist Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $x + y + z - 90 = 0$. Denn jeder Punkt aus $\mathbb{R}^3$ lässt sich schreiben als $(30 + h_1, 30 + h_2, 30 + h_3)$ mit reellen Zahlen h_1, h_2, h_3. Ein Punkt erfüllt die Nebenbedingung genau dann, wenn $h_1 + h_2 + h_3 = 0$ gilt. Damit ist

$$\begin{aligned}
&f(30 + h_1, 30 + h_2, 30 + h_3)\\
&\quad= (30 + h_1)^2 + (30 + h_2)^2 + (30 + h_3)^2\\
&\quad= f(30, 30, 30) + 60(h_1 + h_2 + h_3) + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2\\
&\quad= f(30, 30, 30) + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2\\
&\quad\geqslant f(30, 30, 30)
\end{aligned}$$

für alle Punkte, die die Nebenbedingung erfüllen.

8.10 Aufgaben 77 – 98

Blatt 1 mit vier Aufgaben zu Kapitel 8

Aufgabe 77. Sei $D = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0\,,\ y \geqslant 0 \ \text{ und } \ \frac{1}{2}x + 2y \leqslant 2 \,\}$ der Definitionsbereich der durch

$$f(x, y) = -\frac{1}{2}x - 2y + 2$$

definierten Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$. Zeichnen Sie D und den Graph von f.

Aufgabe 78. Zwei harmonische Funktionen
Bilden Sie die partiellen Ableitungen $f_x := \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ und $f_y := \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sowie $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) := \frac{\partial f_x}{\partial x}(x,y)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) := \frac{\partial f_y}{\partial y}(x,y)$ ferner $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) := \frac{\partial f_x}{\partial y}(x,y)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) := \frac{\partial f_y}{\partial x}(x,y)$
für die folgenden Funktionen:

(a) $f(x,y) = e^x \cos(y) + e^x \sin(y)$,

(b) $f(x,y) = e^{ax} \cos(ay)$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Die Funktionen sind *harmonisch*, d. h. sie erfüllen die Gleichung $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$.

Aufgabe 79. (Anwendung Bio)
Im Rahmen der Ermittlung der Demographie (Entwicklung der Bevölkerung im zeitlichen Verlauf) ist die Betrachtung von Größen- und Gewichtsveränderung von Bedeutung. In der Ernährungsmedizin spielt bei der Ermittlung des Verhältnisses von Körpergewicht zur Körpergröße der *Body-Mass-Index* (BMI) eine wichtige Rolle. Der BMI berechnet sich durch den Quotienten aus Körpergewicht $x > 0$ in kg und dem Quadrat der Körpergröße $y > 0$ in m zum Quadrat. Er wird also beschrieben durch die Funktion $b(x,y) = \frac{x}{y^2}$.

a) Der optimale BMI liegt bei Männern und Frauen im Durchschnitt bei 22 $\mathrm{kg/m^2}$. Skizzieren Sie die Menge

   $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\,,\ y > 0 \text{ und } b(x,y) = 22\}$

   in einem kartesischen Koordinatensystem.

b) Bilden Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von $b(x,y)$, analog wie in Aufgabe 78, und vergleichen Sie diese miteinander. Was fällt auf?

Aufgabe 80. (Anwendung Geo)
Für ein ideales Gas mit Druck P, Volumen V und Temperatur T gilt die Zustandsgleichung $PV = cT$ mit einer Konstanten c, bei der jede Variable eine Funktion der anderen beiden ist. Zeigen Sie für ein solches Gas die Beziehung

$$\frac{\partial V}{\partial T}\,\frac{\partial T}{\partial P}\,\frac{\partial P}{\partial V} = -1\ .$$

(Das Produkt hat also nicht den Wert 1, auf den man durch „Kürzen“ kommen würde.)

Aufgabe 81. (Zur Wiederholung)

(a) Berechnen Sie folgende Integrale mittels partieller Integration.

i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(3x)\,dx$ ii) $\displaystyle\int_1^e \ln(x)\,dx$

(b) Berechnen Sie folgende Integrale mittels Substitutionsregel.

i) $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,2x\,dx$ ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\big(\sin(x)\big)\cos(x)\,dx$

Zusatzaufgabe

Aufgabe 82. (Nach einer Aufgabe von A. Pack) Sie haben eine Analyse eines Gesteins. Es enthält 0,23 Gew.% MgO und 5,4 Gew.% SiO_2. Der 1σ-Messfehler in MgO ist $u_1 := \pm 0{,}032$ Gew.% und der 1σ-Messfehler in SiO_2 ist $u_2 := \pm 0{,}31$ Gew.%. Bestimmen Sie den Fehler des MgO/SiO_2-Verhältnisses (Gew.%/Gew.%) nach der *Gauss'schen Fehlerfortpflanzung*

$$\mathcal{F}(x,y) = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot u_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot u_2\right)^2\right)^{0.5},$$

wobei also $f(x,y) = \frac{x}{y}$ sei.

Blatt 2 mit vier Aufgaben zu Kapitel 8

Aufgabe 83. Untersuchen Sie die durch

$$f(x,y) = x^3 + 2xy + y^2 - 4$$

definierte Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf lokale Maxima und lokale Minima.

Aufgabe 84. Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$. Untersuchen Sie die durch

$$f(x,y) = \cos(x) + 5\arctan(y) - y + 5$$

definierte Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ auf lokale Maxima und lokale Minima.

Aufgabe 85. (Anwendung)
Sie interessieren sich für den Höhenverlauf einer Landschaft, der etwa durch die Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{3}y^3 + 1$$

gegeben ist. Die Variable x beschreibt die Distanz in Ostrichtung und die Variable y die Distanz in Nordrichtung von Ihrem Standpunkt $P = (0,0,f(0,0))$ in einem (x,y,z)-Koordinatensystem, wobei x,y,z Längenangaben in km sind.

a) Gibt es in dieser Umgebung ein Tal oder einen Berg?

b) Wie groß ist der Höhenunterschied vom ermittelten Extrempunkt aus a) zu P?

Aufgabe 86. (Zur Wiederholung)

(a) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $y' = y + 1$ mit $y(0) = 0$ nach den Verfahren für Typ III und V aus der Vorlesung.

(b) Bestätigen Sie Ihr Ergebnis aus (a) durch eine Probe.

(c) Nennen Sie alle DGL-Typen aus der Vorlesung, deren Lösungsverfahren auf die modifizierte DGL $y' = y + x$ angewendet werden könnten.

Die obigen Aufgaben 77 und 80 sind aus dem Kurs 2004/05.

Weitere Aufgaben aus dem Kurs 2004/05

Aufgabe 87. Sei $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1 \}$ der Definitionsbereich der durch

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

definierten Funktion. Man zeichne D und den Graph von f.

Aufgabe 88. Man ermittle, ob die folgenden auf $\mathbb{R}^2$ definierten Funktionen im Punkt $(0, 0)$ stetig sind:

a) $$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

b) $$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y \end{cases}$$

Aufgabe 89. Man zeige die Gleichung $xf_x + yf_y = 0$ für die Funktionen

$$f(x, y) = \frac{x}{y} \qquad \text{und} \qquad f(x, y) = e^{\frac{x^2}{y^2}}.$$

Aufgabe 90. Man bestimme die 1. und 2. partiellen Ableitungen der Funktion $f(x, y) = x^5 + 2x^3y^2 + 2y^5$.

Aufgabe 91. Man bestimme die 1. und 2. partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x, y) = \frac{1 + xy}{1 - xy}.$$

Aufgabe 92. Man untersuche die Funktion $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ auf lokale Maxima und lokale Minima.

Aufgabe 93. Man untersuche die Funktion

$$f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 2y^2 - 5x - 2y + 5$$

auf lokale Maxima und lokale Minima.

Aufgabe 94. Man bestimme die Scheitelpunkte der Ellipse, die durch

$$5x^2 - 8xy + 5y^2 - 9 = 0$$

beschrieben wird, und fertige eine Skizze an.

Aufgabe 95. Sei $D = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \text{ und } y < \frac{\pi}{2} \,\}$. Man untersuche die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}\,, \;\; x \mapsto \sin(x) + \sin(y) + \sin(x+y)\,,$$

auf lokale Maxima und lokale Minima.

Aufgabe 96. Man bestimme drei positive reelle Zahlen, deren Summe gleich 60 und deren Produkt maximal ist.

Aufgabe 97. Man bestimme den Flächeninhalt des größten Rechtecks mit achsenparallelen Kanten innerhalb der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

(Es ist also der Maximalwert der Funktion $f(x,y) = 2x \cdot 2y$ unter der Nebenbedingung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ zu ermitteln.)

Aufgabe 98. Man untersuche die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + 1$ auf lokale Maxima und lokale Minima.

Bemerkung. Aufgabe 9.8 aus dem Kurs 2004/05 zum Satz von Schwarz ist in diesem Kurs in Abschnitt 8.6 behandelt worden.

Lineare Algebra

9 Matrizenrechnung

Eine *Matrix* ist eine Anordnung von Zahlen in einem rechteckigen Schema, wie zum Beispiel die Tafel

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix},$$

die rechts oben im Kupferstich „Melencolia“ von Dürer zu sehen ist. Der Kupferstich stammt aus dem Jahr 1514, was auch in der Mitte der letzten Zeile zu erkennen ist.

Die Besonderheit in der Matrix von Dürer ist, dass die Summe der Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte, sowie in den Diagonalen immer 34 ergibt. Es gibt sogar noch weitere Konstellationen von Zahlen mit Summe 34.

9.1 Wie sieht eine Matrix aus?

Seien m und n natürliche Zahlen. Eine $m \times n$*-Matrix über* $\mathbb{R}$ ist eine Anordnung von $m \cdot n$ Elementen aus $\mathbb{R}$ nach folgendem Schema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Oft schreiben wir auch einfach $(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ oder nur (a_{ij}). Wir nennen die waagrecht geschriebenen n-Tupel $(a_{i1}, \dots, a_{in})$ die *Zeilen* und die senkrecht geschriebenen m-Tupel

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

die *Spalten* der Matrix.
Es ist dann m die Anzahl der Zeilen und n die Anzahl der Spalten. Mit $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ bezeichnen wir die Menge aller $m \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$.

Beispiel.

$$M_{2\times 3}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \middle| \, a_{ij} \in \mathbb{R},\, i \in \{1,2\},\, j \in \{1,2,3\} \right\}$$

und

$$M_{3\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \middle| \, a_{ij} \in \mathbb{R},\, i \in \{1,2,3\},\, j \in \{1,2\} \right\}$$

9.2 Addition von Matrizen und Skalarmultiplikation

Man kann Matrizen gleicher Größe addieren, und man kann jede Matrix mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, genannt *Skalar*, multiplizieren. Die Operationen sind komponentenweise definiert:

Seien $(a_{ij}), (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(a_{ij}) + (b_{ij}) &:= (a_{ij} + b_{ij})\\ \lambda \cdot (a_{ij}) &:= (\lambda a_{ij}).\end{aligned}$$

Beispiele. Sei $m = 2$ und $n = 3$. Dann ist

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ 0 & 3 & -5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0 & 5\\ 4 & 8 & 1\end{pmatrix}$$

und

$$-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 8 & 10 & 12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -2 & -3\\ -4 & -5 & -6\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}.$$

Für $m = 3$ und $n = 2$ ist $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & -2\\ 5 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 8 & 3\\ 8 & 8\end{pmatrix}$.

9.3 Produkt von Matrizen

Das Produkt $A \cdot B$ zweier Matrizen A und B ist nur definiert, *wenn die Anzahl der Spalten von A gleich der Anzahl der Zeilen von B ist.* Sei $A = (a_{ik})_{\substack{i=1,\dots,m\\ k=1,\dots,n}}$ eine $m \times n$-Matrix und $B = (b_{kj})_{\substack{k=1,\dots,n\\ j=1,\dots,\ell}}$ eine $n \times \ell$-Matrix. Dann heißt die $m \times \ell$-Matrix $C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,\ell}}$ mit den Einträgen

$$(*) \qquad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

das *Produkt* von $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ und $B = M_{n\times \ell}(\mathbb{R})$. Es ist $C \in M_{m\times\ell}(\mathbb{R})$. Wir schreiben dafür $C = A \cdot B$ oder einfach $C = AB$.

Die Zahl c_{ij} aus $(*)$ nennen wir das *Produkt der i-ten Zeile von A mit der j-ten Spalte von B* und schreiben dafür auch

$$c_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \cdot \begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix} = (i\text{-te Zeile von } A) \cdot \begin{pmatrix} j\text{-te Spalte}\\ \text{von } B\end{pmatrix}$$

Beispiele

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{1. Zeile} \cdot \text{1. Spalte} & \text{1. Zeile} \cdot \text{2. Spalte} \\ \text{2. Zeile} \cdot \text{1. Spalte} & \text{2. Zeile} \cdot \text{2. Spalte} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3+5+7 & 4+6+8 \\ 6+10+14 & 8+12+16 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 15 & 18 \\ 30 & 36 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{1. Z.} \cdot \text{1. Sp.} & \text{1. Z.} \cdot \text{2. Sp.} & \text{1. Z.} \cdot \text{3. Sp.} \\ \text{2. Z.} \cdot \text{1. Sp.} & \text{2. Z.} \cdot \text{2. Sp.} & \text{2. Z.} \cdot \text{3. Sp.} \\ \text{3. Z.} \cdot \text{1. Sp.} & \text{3. Z.} \cdot \text{2. Sp.} & \text{3. Z.} \cdot \text{3. Sp.} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3+8 & 3+8 & 3+8 \\ 5+12 & 5+12 & 5+12 \\ 7+16 & 7+16 & 7+16 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 11 & 11 & 11 \\ 17 & 17 & 17 \\ 23 & 23 & 23 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+5+7 & 6+10+14 \\ 4+6+8 & 8+12+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 30 \\ 18 & 36 \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 \\ a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \quad \text{(die 1. Spalte)}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 1 \\ a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{(die 2. Spalte)}$$

5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 26 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 18 & 26 \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation ist also auch für $n \times n$-Matrizen nicht kommutativ, wie man an diesem Beispiel mit $n = 2$ sieht.

9.4 Diagonalmatrizen

Eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

heißt *Diagonalmatrix.* Einträge, die $\neq 0$ sind, können hierbei höchstens in der Diagonalen vorkommen.
Die Multiplikation von $n\times n$-Diagonalmatrizen geschieht komponentenweise

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2b_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}.$$

9.5 Transponierte Matrix

Ist $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, so heißt

$${}^tA := (a_{ji}) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$$

die zu A *transponierte Matrix.* Wir erhalten ${}^tA$, indem wir die Zeilen von A als Spalten schreiben.
Ist speziell $m = n$, so entsteht ${}^tA$ aus A durch Spiegelung an der Diagonalen, zum Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Regeln

1. ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ für alle $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
2. ${}^t(\lambda A) = \lambda({}^tA)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
3. ${}^t({}^tA) = A$ für alle $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
4. ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$ für alle $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ und $B \in M_{n\times \ell}(\mathbb{R})$ (vergleiche Beispiel 1. und 3. in 9.3).

9.6 Determinante

Quadratische Matrizen, so bezeichnet man Matrizen mit n Zeilen und n Spalten, besitzen eine *Determinante.* Für $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ist die Determinante $\det(A) \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Man kann sie rekursiv einführen.
$n = 1$: Sei $a \in \mathbb{R}$ und $A = (a)$ eine 1×1-Matrix. Setze $\det(A) = a$.
$n > 1$: Sei $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Berechne $\det(A)$ mit Hilfe der Determinanten von $(n-1)\times(n-1)$-Matrizen A_{ij}, wobei A_{ij} aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Für festes $j \in \{1, \ldots, n\}$ erhält man dann $\det(A)$ durch „Entwicklung nach der j-ten Spalte“:

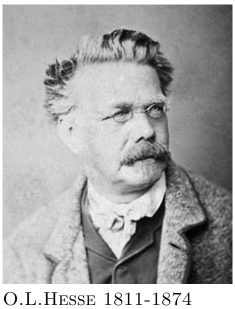
$$\begin{aligned} \det(A) &:= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \\ &= (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det(A_{nj}) \end{aligned}$$

Dabei ergibt sich für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ derselbe Wert.

Beispiel. Sei $n = 2$ und $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Dann ist $A_{11} = (a_{22})$ und $A_{21} = (a_{12})$. Entwicklung nach der 1. Spalte ergibt

$$\det(A) = a_{11} \det(A_{11}) - a_{21} \det(A_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\,.$$

Man erhält folgende Formel: $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \quad$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.



O.L.Hesse 1811-1874

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die die Voraussetzungen des Satzes von Schwarz aus 8.6 erfüllt. Dann ist der Ausdruck $\Delta(x, y)$ aus 8.8 nach obiger Formel gerade die Determinante der Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}.$$

P.S. LAPLACE 1749-1827

Die Entwicklung der Determinante einer $n \times n$-Matrix geschieht nach dem *Entwicklungssatz von* LAPLACE.
Man kann die Determinante auch durch „Entwicklung nach der i-ten Zeile“ berechnen. Die Formel dafür ist
$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$
$= (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in})$.

9.7 Determinante einer 3×3-Matrix

Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_{31} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

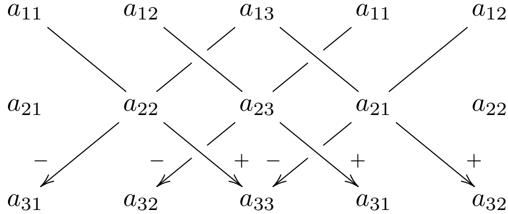
Entwicklung nach der 1. Spalte ergibt

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11} \det(A_{11}) - a_{21} \det(A_{21}) + a_{31} \det(A_{31}) \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) \\ &\quad + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}). \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren und Umstellen ergibt

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Das ist die SARRUSsche Regel:



Beispiele

1. $\det\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (-3)\cdot(-2)\cdot 4 + 2\cdot 1\cdot 3 + 3\cdot 2\cdot 1$
$- 3\cdot(-2)\cdot 3 - (-3)\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 4 = 24 + 6 + 6 + 18 + 3 - 16 = 41.$

2. Betrachte $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Da $a_{14} = a_{34} = a_{44} = 0$ gilt, ist die Entwicklung nach der 4. Spalte besonders günstig:
$$\det(A) = 0 + (-1)^{2+4}\cdot 4\cdot\det\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} + 0 + 0 \overset{1.}{=} 4\cdot 41 = 164.$$

3. Betrachte
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$
Erste Möglichkeit: Entwicklung nach der 3. Spalte:
$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+3}\cdot(-2)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^{2+3}\cdot 0\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^{3+3}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^{4+3}\cdot(-2)\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-2)\cdot(8 - 8 - 1) + 0 \\ &\quad + 1\cdot(8 + 3 - 8) + (-1)\cdot(-2)\cdot(8 + 3 - 8 - 1) \\ &= 2 + 3 + 4 = 9. \end{aligned}$$
Diese Rechnung ist etwas ungünstig, da drei Determinanten von 3×3-Matrizen berechnet werden müssen.

Günstiger ist hier die Entwicklung nach der 2. Zeile, da dort zwei Einträge gleich 0 sind. Es sind daher nur noch zwei Determinanten von 3×3-Matrizen zu berechnen:

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^{2+2} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^{2+3} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^{2+4} \cdot 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= (-1) \cdot (-2 - 6 - 3 + 2) + 0 \\ &\quad + 0 + 4 \cdot (-4 + 2 - 4 + 4 - 2 + 4) \\ &= 9 + 4 \cdot 0 = 9.\end{aligned}$$

9.8 Regeln für die Determinante

Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, und sei ${}^tA$ die gemäß 9.5 zu A transponierte Matrix.

1. $\det(A) = \det({}^tA)$. Das ergibt sich daraus, dass man auch nach der i-ten Zeile entwickeln kann (für $i \in \{1, \ldots, n\}$).

2. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ („Multiplikationssatz“)

3. Addiert man ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile, so ändert sich der Wert der Determinante nicht. Betrachte zum Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

   Dann ist $\det(B) = (a_{11} + \lambda a_{21})a_{22} - (a_{12} + \lambda a_{22})a_{21} = a_{11}a_{22} + \lambda a_{21}a_{22} - a_{12}a_{21} - \lambda a_{21}a_{22} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det(A)$.

4. Wird eine Zeile mit einem Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert, so ändert sich die Determinante um diesen Faktor. Betrachte zum Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\det(B) = (\lambda a_{11})a_{22} - (\lambda a_{12})a_{21} = \lambda \cdot (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda \cdot \det(A)$.

5. Eine *(obere) Dreiecksmatrix* ist eine Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Einträge auf der Diagonalen, also $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$.

6. Sei

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

die *Einheitsmatrix.* Dann gilt nach 5. $\det(E_n) = 1$.

7. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt *invertierbar,* falls es eine Zahl $a^{-1} \in \mathbb{R}$ gibt mit $a \cdot a^{-1} = 1$, z. B. $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$. Es gilt: $\boxed{a \text{ ist invertierbar} \iff a \neq 0}$.

Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ heißt *invertierbar,* falls es eine Matrix $A^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ gibt mit $A \cdot A^{-1} = E_n$.
(Es ist dann auch $A^{-1} \cdot A = E_n$, und A^{-1} ist eindeutig durch A bestimmt.) Es gilt: $\boxed{A \text{ ist invertierbar} \iff \det(A) \neq 0}$.

9.9 Formel für die inverse Matrix

Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix, also $\det(A) \neq 0$.
Ist $n = 2$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Begründung:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & -cb + da \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit $\det(A) \neq 0$ gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot B\,,$$

wobei $B = (b_{ij})$ die $n \times n$-Matrix mit den Einträgen

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$$

ist. Die Matrix A_{ji} entsteht wieder aus A durch Streichen der j-ten Zeile und der i-ten Spalte (vergleiche 9.6).

Beispiel. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\det(A) = -1$ und

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \det(A_{11}) & -\det(A_{21}) & \det(A_{31}) \\ -\det(A_{12}) & \det(A_{22}) & -\det(A_{32}) \\ \det(A_{13}) & -\det(A_{23}) & \det(A_{33}) \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

9.10 Aufgaben 99 – 111

Aufgabe 99. Nach dem Multiplikationssatz für $n \times n$-Matrizen A, B gilt $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$. Verifizieren Sie dies für die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, indem Sie $\det(AB)$ sowie $\det(A) \cdot \det(B)$ ausrechnen und die Ergebnisse vergleichen.

Aufgabe 100. Berechnen Sie mit Hilfe der Formel

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \det(A_{11}) & -\det(A_{21}) & \det(A_{31}) \\ -\det(A_{12}) & \det(A_{22}) & -\det(A_{32}) \\ \det(A_{13}) & -\det(A_{23}) & \det(A_{33}) \end{pmatrix}$$

die zu der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ inverse Matrix A^{-1}. Zur Probe berechnen Sie dann das Produkt $A \cdot A^{-1}$.

Aufgabe 101. (Anwendung und Übung)
Sie entnehmen auf einer Exkursion Bodenproben aus den Regionen A und B. In beiden Regionen überprüfen Sie jeweils eine Probe an zwei verschiedenen Stellen, den sogenannten Quadranten. Hierbei messen Sie einmal pro Quadrant in einer Tiefe von 10 cm und einmal in 1 Meter Tiefe, d. h. pro Region erhalten Sie vier Proben. Der pH-Wert einer Probe gibt an, wie sauer (pH < 7), neutral (pH $= 7$) oder basisch (pH > 7) der Boden ist.
Im ersten Quadranten von A herrscht in 10 cm Tiefe ein pH-Wert von 8 und in 1 Meter Tiefe ein ph-Wert von 5,2. Im zweiten Quadranten dieser Region beträgt der pH-Wert in 10 cm Tiefe 8,1 und in 1 Meter Tiefe 4,8.
Die Region B liefert Ihnen im ersten Quadranten in 10 cm Tiefe einen pH-Wert von 7 und in 1 Meter Tiefe von 3,8. Im zweiten Quadranten dieser Region beträgt der pH-Wert in 10 cm Tiefe 8,1 und in 1 Meter Tiefe liegt er im neutralen Bereich.

a) Erstellen Sie aus den oben stehenden Angaben zwei sinnvolle Matrizen A und B. Tragen Sie bei einem sauren pH-Wert eine -1, bei einem neutralen pH-Wert eine 0 und bei einem basischen pH-Wert eine $+1$ in die Matrizen ein.

Zur weiteren Übung bearbeiten Sie die nachfolgenden Teilaufgaben.

b) Berechnen Sie AB und BA und vergleichen Sie die Ergebnisse miteinander.
c) Berechnen Sie $\det(A)$ und $\det(B)$. Welche Aussagen liefern diese Ergebnisse?
d) Zeigen Sie durch Berechnung, dass $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ gilt.

Aufgabe 102. (Zur Wiederholung)
Bestimmen Sie folgende partielle Ableitungen der Funktion

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{1+y^2}\right).$$

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ (b) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ (c) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ (d) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$

Aufgaben aus dem Kurs 2004/05

Aufgabe 103. Man berechne für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

die beiden Summen $-4 \cdot A + 2 \cdot B$ und $-4 \cdot {}^tA + 2 \cdot {}^tB$.

Aufgabe 104. Man berechne das Produkt AB der Matrizen A und B in den beiden Fällen

a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $$A = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 105. Man berechne für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

die Produkte AB, AC, $A \cdot (B - C)$ und $(B - C) \cdot A$.

Aufgabe 106. Man prüfe, ob $AB = BA$ für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & -15 & 12 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 22 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt, und berechne ${}^tA \cdot {}^tB$, ${}^tB \cdot {}^tA$, ${}^t(AB)$, A^2, A^3, B^2 und B^3.

Aufgabe 107. Seien

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Man berechne für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & -15 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Produkte $A\vec{e_i}$, $B\vec{e_i}$ für $i = 1, 2, 3$, sowie die Produkte $A\vec{x}$ und $B\vec{x}$. Dann vergleiche man für die beiden Abbildungen $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$, und $\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \mapsto B\vec{x}$, die Komposition $\alpha \circ \beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \mapsto \alpha(\beta(\vec{x}))$, mit der Abbildung $\gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \mapsto C\vec{x}$, wobei $C = AB$ sei.

Aufgabe 108. Für Matrizen $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ gilt der *Multiplikationssatz*: $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$, siehe 2. in 9.8.
Man verifiziere dies für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

indem man $\det(AB)$, sowie $\det(A)\cdot\det(B)$ ausrechnet und die Ergebnisse vergleicht.

Aufgabe 109. Man berechne die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

durch Entwicklung nach der dritten Spalte und durch Entwicklung nach zweiten Zeile.
(Wenn richtig gerechnet wird, kommt beide Male dasselbe Ergebnis heraus.)

Aufgabe 110. Man zeige, dass für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\det\begin{pmatrix} x & y & 0 & 1 \\ -y & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & x & -y \\ -1 & 0 & y & x \end{pmatrix} = (x^2+y^2+1)^2\,.$$

Aufgabe 111. Man berechne mit Hilfe der Formel

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} \det(A_{11}) & -\det(A_{21}) & \det(A_{31}) \\ -\det(A_{12}) & \det(A_{22}) & -\det(A_{32}) \\ \det(A_{13}) & -\det(A_{23}) & \det(A_{33}) \end{pmatrix}$$

die zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

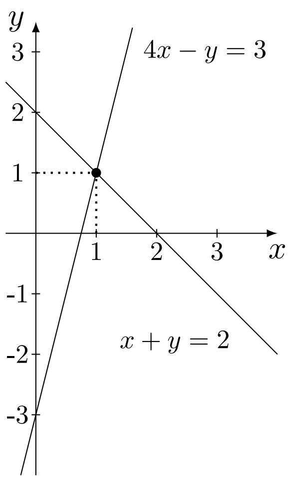
inverse Matrix A^{-1} . Zur Probe berechne man dann $A\cdot A^{-1}$.

10 Lineare Gleichungssysteme

Ein *lineares Gleichungssystem* besteht aus m Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 \; + \; a_{12}x_2 \; + \ldots + \; a_{1n}x_n \; &= \; b_1 \\ a_{21}x_1 \; + \; a_{22}x_2 \; + \ldots + \; a_{2n}x_n \; &= \; b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

mit n gemeinsamen Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ und *Koeffizienten* a_{ij}, $b_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$.
Die n Unbekannten sind so zu bestimmen, dass sie alle m Gleichungen erfüllen. Man spricht dann auch von einer *Lösung* des Systems.



Beispiel 1.
Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x - y &= 3 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

hat die Lösung $x = 1$ und $y = 1$, wie man geometrisch ermitteln kann.

Die beiden Gleichungen beschreiben jeweils eine Gerade, und die Lösung des Systems ist der Schnittpunkt der beiden Geraden.

Beispiel 2. Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ 4x + 2y &= 1 \end{aligned}$$

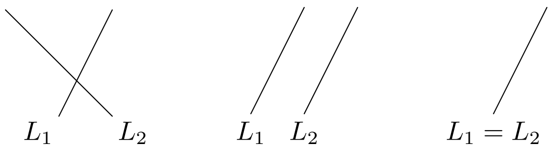
hat gar keine Lösung, denn aus der ersten Gleichung folgt $y = -2x$. Setzt man dies für y in die zweite Gleichung ein, so folgt $4x + 2y = 4x - 4x = 0 \neq 1$.

Beispiel 3. Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + y &= \frac{1}{2} \\ 4x + 2y &= 1 \end{aligned}$$

hat unendlich viele Lösungen, denn nach Multiplikation der zweiten Gleichung mit $\frac{1}{2}$ sieht man, dass sich nur um *eine* Gerade $y = -2x + \frac{1}{2}$ handelt.

Mehr Möglichkeiten gibt es nicht, denn zwei Geraden L_1 und L_2 im $\mathbb{R}^2$ schneiden sich entweder in genau einem Punkt oder sind parallel oder sind gleich:



Bemerkung. Dieses Phänomen gilt für ein beliebiges lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten: Es hat entweder genau eine Lösung im $\mathbb{R}^n$ oder gar keine Lösung oder unendlich viele Lösungen im $\mathbb{R}^n$. Weitere Möglichkeiten gibt es nicht.

10.1 Matrizenschreibweise $A\vec{x} = \vec{b}$

Ein lineares Gleichungssystem

$$(*) \qquad \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

kann man auch in der Form von Matrizen (siehe 9.1) schreiben

$$(**) \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

denn bezüglich der in 9.3 definierten Matrizenmultiplikation gilt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Besteht eine Matrix aus genau einer Spalte, so nennt man sie auch einen *Vektor* und setzt $\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$. Das System $(*)$ schreibt sich dann kurz als $\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$ mit $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$.

Bemerkung. Ist speziell $n = m$ und A invertierbar, so ist $(*)$ eindeutig lösbar durch $\boxed{\vec{x} = A^{-1}\vec{b}}$.

Beispiel. Das oben betrachtete lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x - y &= 3 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

schreibt sich als $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $A := \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Wir lösen dieses nun, indem wir A^{-1} und dann $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ berechnen.
Es ist $\det(A) = 4 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 5$ und also $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Dies ergibt die Lösung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

10.2 Cramersche Regel

Ist $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix, so ist das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ für jeden Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar. Man findet die Lösung $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ dann auch nach der Cramer*schen Regel.*

Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ berechnet man $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ durch:

Gabriel Cramer 1704-1752

$$x_1 = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$x_2 = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & b_n \end{pmatrix}.$$

Die Regel wurde 1750 von Cramer in seinem Buch [4] veröffentlicht:

Aus dem Göttinger Digitalisierungszentrum. Bearbeitet von M. Liebetruth.

No. I.

Voyez pag. 59 *&* 60.

Soient plusieurs inconnues $z, y, x, v,$ *&c.* & autant d'équations

$$\begin{aligned} A^1 &= Z^1 z + \Upsilon^1 y + X^1 x + V^1 v + \&c. \\ A^2 &= Z^2 z + \Upsilon^2 y + X^2 x + V^2 v + \&c. \\ A^3 &= Z^3 z + \Upsilon^3 y + X^3 x + V^3 v + \&c. \\ A^4 &= Z^4 z + \Upsilon^4 y + X^4 x + V^4 v + \&c. \\ &\&c. \end{aligned}$$

où les lettres A^1, A^2, A^3, A^4, *&c.* ne marquent pas, comme à l'ordinaire, les puissances d'A, mais le prémier membre, supposé connu, de la prémiére, seconde, troisiéme, quatriéme &c. équation. De même Z^1, Z^2, *&c.* sont les coëfficients de z; Υ^1, Υ^2, *&c.* ceux de y; X^1, X^2, *&c.* ceux de x; V^1, V^2, *&c.* ceux de v; &c. dans la prémiére, seconde, &c. équation.

Cette Notation supposée, s'il n'y a qu'une équation & qu'une inconnue z; on aura $z = \frac{A^1}{Z^1}$. S'il y a deux équations & deux inconnues z & y; on trouvera $z = \frac{A^1\Upsilon^2 - A^2\Upsilon^1}{Z^1\Upsilon^2 - Z^2\Upsilon^1}$, & $y = \frac{Z^1A^2 - Z^2A^1}{Z^1\Upsilon^2 - Z^2\Upsilon^1}$. S'il y a trois équations & trois inconnues z, y, & x; on trouvèra

$$z = \frac{A^1Y^2X^3 - A^1Y^3X^2 - A^2Y^1X^3 + A^2Y^3X^1 + A^3Y^1X^2 - A^3Y^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

$$y = \frac{Z^1A^2X^3 - Z^1A^3X^2 - Z^2A^1X^3 + Z^2A^3X^1 + Z^3A^1X^2 - Z^3A^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

$$x = \frac{Z^1Y^2A^3 - Z^1Y^3A^2 - Z^2Y^1A^3 + Z^2Y^3A^1 + Z^3Y^1A^2 - Z^3Y^2A^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

10.3 Gaußscher Algorithmus

Der GAUSSsche Algorithmus ist ein allgemeines Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme.
Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Alle Informationen über das Gleichungssystem sind in den Werten a_{ij} für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$, sowie in den Werten $b_1, \ldots, b_m$ enthalten. Man fasst diese daher zur *erweiterten Koeffizientenmatrix*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

zusammen. Ziel ist es, diese erweiterte Koeffizientenmatrix durch „elementare Zeilenumformungen“, die die Lösungsmenge nicht verändern, in eine Matrix der folgenden Form zu bringen.

$$\left(\begin{array}{cccccccccc} 0 & \ldots & 0 & * & & & & & & \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & * & & & a_{ij} & \\ . & . & . & . & . & 0 & * & & & \\ . & . & . & . & . & . & 0 & \ldots & & \\ . & . & . & . & . & . & . & \ldots & & \\ . & . & . & . & . & . & . & . & * & \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & * \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & . & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Unterhalb der horizontalen Stufenlinie dürfen nur Nullen stehen. Beispiele für solche Matrizen in *Zeilenstufenform* sind

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hingegen sind $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nicht in Zeilenstufenform. Jede beliebige Matrix lässt sich durch folgende *elementare Zeilenumformungen* auf Zeilenstufenform bringen.

I) Addition eines skalaren Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile, (d. h. multipliziere eine Zeile mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ und addiere diese dann zu einer anderen Zeile).
II) Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl aus $\lambda \in \mathbb{R}_{\neq 0}$.
III) Vertauschen zweier Zeilen.

Diese Umformungen verändern die Lösungsmenge des Gleichungssystems nicht.

Beispiele. 1) Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 8x_2 - 2x_3 &= 4 \\ x_1 + 4x_3 &= -2\,. \end{aligned}$$

Die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix lautet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -8 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right).$$

Schreibe Z. für „Zeile“. Dann bedeutet zum Beispiel die Schreibweise „2.Z. $-$ 2 $\times$ 1.Z.“: Subtrahiere das 2-fache der ersten Zeile von der zweiten Zeile. Wir können nun umformen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -8 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{3.Z.}-\text{1.Z.}]{\text{2.Z.}-3\times\text{1.Z.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{3.Z.}+\text{2.Z.}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array}\right)$$

und erhalten eine Matrix in Zeilenstufenform. Die dritte Zeile dieser Matrix entspricht der Gleichung $6x_3 = -6$ und also $x_3 = -1$. Die zweite Zeile entspricht der Gleichung $-2x_2 + x_3 = -2$. Es folgt $-2x_2 - 1 = -2$, also $x_2 = \frac{1}{2}$. Aus der ersten Zeile erhalten wir nun $x_1 - 2x_2 - x_3 = 2$ und also $x_1 - 1 + 1 = 2$.

Die einzige Lösung des Gleichungssystems ist somit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$.

2) Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 &= -2 \\ -x_1 + 6x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 7x_4 &= -2 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2\,. \end{aligned}$$

Wir bringen die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix auf Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 7 & -2 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{3.Z.}-2\times\text{1.Z., 4.Z.+1.Z.}]{\text{2.Z.+1.Z.}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{3.Z.}-2\times\text{2.Z.}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{4.Z.+3.Z.}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die dritte Zeile entspricht der Gleichung $-2x_3 - x_4 = 4$. Wir haben Wahlmöglichkeiten für x_4. Wähle $x_4 =: \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig und erhalte damit $-2x_3 - \lambda = 4$, also $x_3 = -2 - \frac{1}{2}\lambda$. Setze dies in die zweite Zeile $-x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -1$ ein und löse nach x_2 auf:

$$x_2 = 1 + 4x_3 + 3x_4 = 1 + 4(-2 - \frac{1}{2}\lambda) + 3\lambda = -7 + \lambda.$$

Die erste Zeile entspricht der linearen Gleichung $x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -2$, also $x_1 = -2 + x_2 + 2x_3 - x_4$. Setzt man die vorher gefundenen Werte für x_2, x_3 und x_4 ein, so erhält man

$$x_1 = -2 + (-7 + \lambda) + 2(-2 - \frac{1}{2}\lambda) - \lambda = -13 - \lambda.$$

Somit erhält man unendlich viele Lösungen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 - \lambda \\ -7 + \lambda \\ -2 - \frac{1}{2}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \overset{9.2}{=} \begin{pmatrix} -13 \\ -7 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alle Lösungen liegen auf einer Geraden im $\mathbb{R}^4$.

3) Wir betrachten noch einmal das (nicht-lösbare) zweite Beispiel

$$\begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ 4x + 2y &= 1 \end{aligned}$$

vom Anfang dieses Kapitels und bringen die erweiterte Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{2.Z.}-2\times\text{1.Z.}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Die zweite Zeile steht für $0 \cdot x + 0 \cdot y = 1$ und ergibt den Widerspruch $0 = 1$, woran man sieht, dass das System nicht lösbar ist.

10.4 Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Sei ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ durch eine Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ und einen Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Die Menge der Lösungen nennt man auch *Lösungsmenge*.

Fall 1: Ist $\vec{b} = \vec{0}$, so nennt man das System *homogen*.

- Ein homogenes System $A\vec{x} = \vec{0}$ besitzt stets eine Lösung, nämlich die *triviale* Lösung $\vec{x} = \vec{0}$. Wenn ein homogenes System auch noch eine Lösung $\vec{x} \neq \vec{0}$ besitzt, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ und Lösungen $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_k}$ derart, so dass jede Lösung $\vec{x}$ sich eindeutig in der Form

  $$\vec{x} = \lambda_1\vec{x_1} + \cdots + \lambda_k\vec{x_k} \quad \text{mit } \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

  schreiben lässt. Die Zahl k ist eindeutig bestimmt und heißt *Dimension des Lösungsraums*.

- Ist $m = n$, so gilt für das System $A\vec{x} = \vec{0}$:

  $$\vec{0} \text{ ist die einzige Lösung} \iff \det(A) \neq 0 \iff A \text{ ist invertierbar}$$

- Ist $m < n$ (es gibt also weniger Gleichungen als Unbekannte), so hat das System $A\vec{x} = \vec{0}$ stets eine Lösung $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Fall 2: Ist $\vec{b} \neq \vec{0}$, so nennt man das System *inhomogen*.

- Ein inhomogenes System braucht keine Lösung zu besitzen, wie wir oben gesehen haben. Die Lösungsmenge ist dann die leere Menge.

- Gilt $m = n$ und $\det(A) \neq 0$, dann ist A invertierbar und $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ ist die einzige Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$.
- Wenn das System $A\vec{x} = \vec{b}$ eine Lösung besitzt, so genügt es, irgendeine Lösung $\vec{x_0}$ (zum Beispiel durch Probieren) zu finden. Jede Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ hat dann folgende Form:

$$\vec{x} = \underbrace{\vec{x_0}}_{\substack{\text{spezielle Lsg.}\\ \text{von } A\vec{x}=\vec{b}}} + \underbrace{\lambda_1\vec{x_1} + \cdots + \lambda_k\vec{x_k}}_{\substack{\text{allgemeine Lsg.}\\ \text{von } A\vec{x}=\vec{0}}} \quad \text{mit } \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R},$$

wobei k die Dimension des Lösungsraumes und $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_k}$ Lösungen des homogenen Systems wie im Fall 1 sind. Besitzt $A\vec{x} = \vec{0}$ nur die triviale Lösung, so ist $\vec{x_0}$ die einzige Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$.

Fazit. Das System $A\vec{x} = \vec{b}$ besitzt entweder keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen. Andere Varianten sind nicht möglich.

10.5 Aufgaben 112 – 124

Aufgabe 112. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & -5 \\ -x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \end{array}$$

indem Sie es in die Form $A\vec{x} = \vec{b}$ bringen und $\vec{x} = A^{-1}\,\vec{b}$ berechnen.

Aufgabe 113. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -4 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 2 \end{array}$$

mit Hilfe der Cramerschen Regel.

Aufgabe 114. (Anwendung)
Aus dem Biologieunterricht in der Schule ist Ihnen bereits der Abbau der Glucose durch eine Redoxreaktion bekannt. Es wird Glucose $C_6H_{12}O_6$ oxidiert zu Kohlenstoffdioxid (CO_2) und Sauerstoff (O_2) reduziert zu Wasser (H_2O). Zusätzlich entsteht bei dieser Reaktion noch Energie. Dieser Prozess wird durch die Reaktionsgleichung

$$(1) \qquad a \cdot C_6H_{12}O_6 + b \cdot O_2 \to c \cdot CO_2 + d \cdot H_2O$$

mit den Unbekannten a, b, c, d beschrieben:

a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten a, b, c, d auf, in dem Sie jeweils für C, O und H die Anzahl der auftretenden Atome auf beiden Seiten der Reaktionsgleichung vergleichen.
b) Lösen Sie das System im $\mathbb{R}^4$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus und geben Sie die Lösungsmenge an.
c) Vervollständigen Sie mit Hilfe von b) die Reaktionsgleichung (1), indem Sie geeignete Werte für $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ angeben.

Aufgabe 115. (Zur Wiederholung)
Untersuchen Sie die durch $f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 6y + 1$ definierte Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf lokale Maxima und lolale Minima.

Aufgabe 116. (Von A. Pack) Wir haben eine LKW-Ladung mit einer Mischung aus verschiedenen Bodensorten (Ton, Lehm, Sand), 8 Gew.% Wasser und Kies. Wir kennen die Trockenmassenverhältnisse von Ton/Lehm, Ton/Sand und Ton/Kies. Nun möchten Sie den Kies rauswaschen und verkaufen. Der LKW ist mit 18 t beladen, wieviel Kies bekommen Sie raus? Setzen Sie selbst Zahlen für die Verhältnisse ein.

Aufgaben aus dem Kurs 2004/05

Aufgabe 117. Man untersuche das Schnittverhalten der beiden Geraden L_1 und L_2 , falls

a) $L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 6x + 3y = 10 \right\}$, $L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 7x - 2y = -1 \right\}$

b) $L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 4x + 6y = 8 \right\}$, $L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 5x + \tfrac{15}{2}y = 10 \right\}$

c) $L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \sqrt{3}\,x - 3y = 0 \right\}$, $L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x - \sqrt{3}\,y = 1 \right\}$.

Aufgabe 118. Gegeben seien die Matrix A und der Vektor $\vec{b}$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zur Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ benutze man

a) die Cramersche Regel, b) den Gaussschen Algorithmus.

Aufgabe 119. Man bestimme für die Matrix A aus Aufgabe 118 die inverse Matrix A^{-1} und verifiziere die Gleichung $A^{-1}\,\vec{b} = \vec{x}$ für die in Aufgabe 118 gewonnene Lösung $\vec{x}$.

Aufgabe 120. Man bestimme die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 121. Man ermittle den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = 2x + 3 \right\} \quad \text{und} \quad L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 122. Zur Lösung der folgenden Aufgabe, die Anwärtern auf einen höheren Beamtenposten im alten China gestellt wurde, ist ein passendes Gleichungssystem mit drei Gleichungen in drei Unbekannten aufzustellen und zu lösen:
Verkauft man auf dem Markt 2 Büffel, 5 Hammel und kauft dafür 13 Schweine, so bleiben 1000 Münzen übrig.
Verkauft man 3 Büffel und 3 Schweine, so kann man dafür genau 9 Hammel kaufen.
Um 5 Büffel zu kaufen, muss man 6 Hammel und 8 Schweine verkaufen und noch 600 Münzen darauflegen.
Wieviel kosten die Tiere jeweils?

Aufgabe 123. Man bestimme mit Hilfe des Gaussschen Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & -1 \\ x_1 & - & x_2 & & & - & 2x_4 & = & -3\,. \end{array}$$

Aufgabe 124. Man bestimme für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Menge

$$\left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{v} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix},\ \vec{v} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \ \text{und}\ \vec{v} \perp \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Fortsetzung Analysis

11 DGL-Systeme

Ein *explizites System* von n DGLen 1. Ordnung hat die Form

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\ldots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

wobei $f_k \colon D \to \mathbb{R}$ für $k = 1, \ldots, n$ stetige Funktionen auf einer Menge $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sind. Eine *Lösung des Systems* ist ein n-tupel von Funktionen $y_k \colon I \to \mathbb{R}$ für $k = 1, \ldots, n$, die auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert sind und die jeweils alle n Gleichungen des Systems erfüllen.
Gesucht sind nun also wieder Funktionen*!*

Interessant sind dabei auch *lineare DGL-Systeme*, da sie einige Analogien zu den linearen Gleichungssystemen, die wir in Kapitel 10 betrachtet haben, aufweisen. Zum Beispiel hat für $n = 2$ ein *lineares DGL-System* die Gestalt

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + b_1(x) \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + b_2(x) \end{aligned}$$

mit stetigen Funktionen $a_{ij}(x)$ und $b_j(x)$ für $i, j = 1, 2$, und man hat dafür auch eine Matrizenschreibweise, nämlich $\vec{y}\,' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$.

Beispiel 1. Man löse für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ das *lineare DGL-System*

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{1}{x}\, y_1 + e^{-\sin(x)}\, y_2 \\ y_2' &= \cos(x)\, y_2\,. \end{aligned}$$

Dieses System wird *homogen* genannt, da $b_1(x)$ und $b_2(x)$ beide Null sind. Wie lautet das System in Matrizenschreibweise?

Es ist $\boxed{\vec{y}\,' = A(x)\,\vec{y}}$ mit $\vec{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ und $A(x) := \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & e^{-\sin(x)} \\ 0 & \cos(x) \end{pmatrix}$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Das System lässt sich durch „Rückwärtseinsetzen“ lösen:

Die zweite DGL $y_2' = \cos(x)\,y_2$ ist vom Typ II in Tabelle 7.5, denn es ist $y_2' = a(x)\,y_2$ mit $a(x) = \cos(x)$. Eine Stammfunktion von $a(x)$ ist die Funktion $\mathcal{A}(x) := \int \cos(x)\,dx = \sin(x)$. Gemäß Typ II folgt

$$y_2(x) = c_2 e^{\mathcal{A}(x)} = c_2 e^{\sin(x)}\,.$$

Setze nun $y_2 = c_2 e^{\sin(x)}$ in die erste DGL ein. Dann folgt

$$y_1' = \frac{1}{x}\,y_1 + e^{-\sin(x)}\,y_2 = \frac{1}{x}\,y_1 + e^{-\sin(x)} c_2 e^{\sin(x)} = \frac{1}{x}\,y_1 + c_2$$

da $e^{-\sin(x)}e^{\sin(x)} = e^{-\sin(x)+\sin(x)} = e^0 = 1$ nach (1) in Kapitel 4 gilt.

Die DGL $y_1' = \frac{1}{x}\,y_1 + c_2$ ist vom Typ III, denn es ist $y_1' = a(x)\,y_1 + b(x)$ mit $a(x) = \frac{1}{x}$ und $b(x) = c_2$. Es folgt $\mathcal{A}(x) := \int a(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)$. Gemäß Typ III in Tabelle 7.5 folgt

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\mathcal{A}(x)} \int e^{-\mathcal{A}(x)}\,b(x)\,dx \\ &= e^{\ln(x)} \int e^{-\ln(x)} c_2\,dx \\ &= e^{\ln(x)} \int c_2\,e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\,dx = x \int c_2\,\frac{1}{x}\,dx = x\left(c_2\,\ln(x) + c_1\right) \\ &= c_2 x \ln(x) + c_1 x\,. \end{aligned}$$

Benutzt wurde hier die *Umkehrregel* $e^{\ln(y)} = y$ für alle $y \in \mathbb{R}_{>0}$ und die Regel $-\ln(x) = \ln(\frac{1}{x})$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir erhalten die Lösung

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 x + c_2 x \ln(x) \\ c_2 e^{\sin(x)} \end{pmatrix}$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Probe. Aus $\vec{y} := \begin{pmatrix} c_1 x + c_2 x \ln(x) \\ c_2 e^{\sin(x)} \end{pmatrix}$ folgt mit Produkt- und Kettenregel $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \ln(x) + c_2 \\ c_2 \cos(x) e^{\sin(x)} \end{pmatrix}$, denn es ist $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Ferner folgt nach Matrizenmultiplikation

$$\begin{aligned} A(x)\,\vec{y} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & e^{-\sin(x)} \\ 0 & \cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 x + c_2 x \ln(x) \\ c_2 e^{\sin(x)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \ln(x) + e^{-\sin(x)} c_2 e^{\sin(x)} \\ 0 + \cos(x) c_2 e^{\sin(x)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \ln(x) + c_2 \\ c_2 \cos(x) e^{\sin(x)} \end{pmatrix} \\ &= \vec{y}\,' \quad \checkmark \end{aligned}$$

Beispiel 2. Räuber-Beute-Modell

Dieses Modell der Populationsdynamik ist von A. J. Lotka (1880-1949) und V. Volterra (1860-1940) unabhängig gefunden worden und heißt auch *Lotka-Volterra-Modell*, vgl. [10], Abschnitte 59 und 64.
Eine Beutepopulation B verfüge über einen ständigen Nahrungsvorrat, und eine Räuberpopulation R lebe ausschließlich von der Beute B.
Wäre keine Beute da, würde sich R nach dem Gesetz

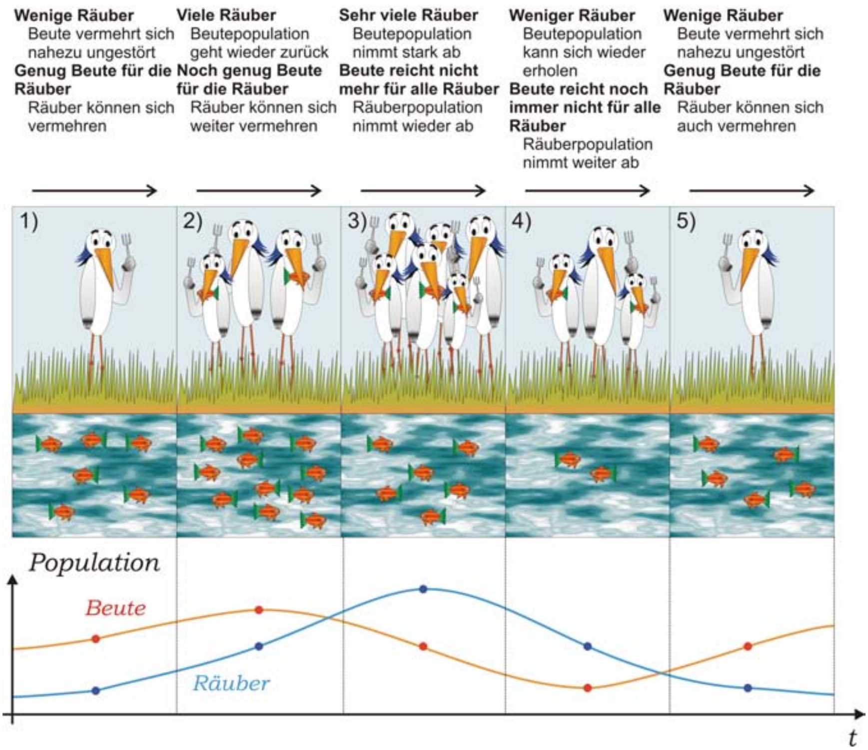
$$R'(t) := \frac{dR}{dt} = -\alpha_1\, R(t)$$

mit der Zeit t vermindern, wobei $\alpha_1 > 0$ eine Konstante ist. Wären keine Räuber da, würde B gemäß $B'(t) = \alpha_2\, B(t)$ mit einer Konstanten $\alpha_2 > 0$ wachsen.
Durch Begegnungen von B mit R kommt es aber zu einer Zunahme von R und einer Abnahme von B mit Änderungsraten, die jeweils als proportional zu RB angenommen werden können. Es ergibt sich also das (nicht-lineare) DGL-System

$$\begin{aligned} R' &= -\alpha_1\, R + \beta_1\, RB \\ B' &= \alpha_2\, B - \beta_2\, RB \end{aligned}$$

mit Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$. Man kann zeigen, dass das System stets lösbar ist, aber nicht in geschlossener Form. Man ist daher auf numerische Lösungsverfahren angewiesen, bei denen Lösungen näherungsweise berechnet werden, sowie auf qualitative Aussagen zum Verlauf von Lösungskurven.

Im Fall des Räuber-Beute-Modells erhält man folgende Vorstellung vom Verlauf von Lösungskurven. Da die Räuberpopulation R eine Verminderung der Beutepopulation B erzeugt, wird mit der Zeit nicht mehr genug Beutevorrat da sein, und es vermindert sich dann R, was wiederum zum Wachsen von B beiträgt. So ergeben sich periodische Schwankungen in der Räuber- und Beutepopulation. Dies wird durch das folgende Bild bestätigt.



Das Phänomen, dass man die Existenz einer Lösung zeigen kann, aber diese dennoch nicht in geschlossener Form (wie etwa $y_1(x) = e^{2x}$) angeben kann, tritt bei einer DGL oder einem DGL-System oft auf. Daher gibt es auch ein eigenes Gebiet der Mathematik zu numerischen Lösungsverfahren für Differentialgleichungen.

In geschlossener Form stets lösbar sind lineare Systeme, bei denen alle Koeffizienten konstant sind.

12 Nochmals der Grenzwertbegriff

Sei I_1 ein Intervall in $\mathbb{R}$, und sei $a \in I_1$. Die Menge I entstehe aus I_1 durch Herausnahme des Punktes a. Dann gibt es stets eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in I mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, d. h. die Bedingung $(*)$ aus Abschnitt 4.1 ist stets erfüllt, vgl. Aufgabe 125. (Vgl. auch den Divergenzbegriff am Ende von 4.1.)

Schreibweisen und Definitionen. Sei $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $c \in \mathbb{R}$ oder $\pm\infty$. Dann bedeutet

(1) $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = c}$: Für jede Folge $(x_n \in I)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = c$.
Ist $c \in \mathbb{R}$, so ist c der *Grenzwert* von φ an der Stelle a.

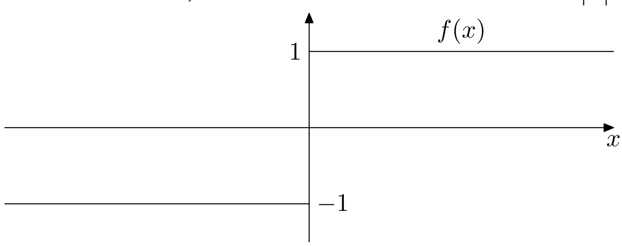
(2) $\boldsymbol{\lim\limits_{x\searrow a} \varphi(x) = c}$: Für jede Folge $(x_n \in I)_{n\in\mathbb{N}}$, die $x_n > a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = c$. Ist $c \in \mathbb{R}$, so ist c der *rechtsseitige Grenzwert von φ an der Stelle a.*

(3) $\boldsymbol{\lim\limits_{x\nearrow a} \varphi(x) = c}$: Für jede Folge $(x_n \in I)_{n\in\mathbb{N}}$, die $x_n < a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = c$. Ist $c \in \mathbb{R}$, so c ist der *linksseitige Grenzwert von φ an der Stelle a.*

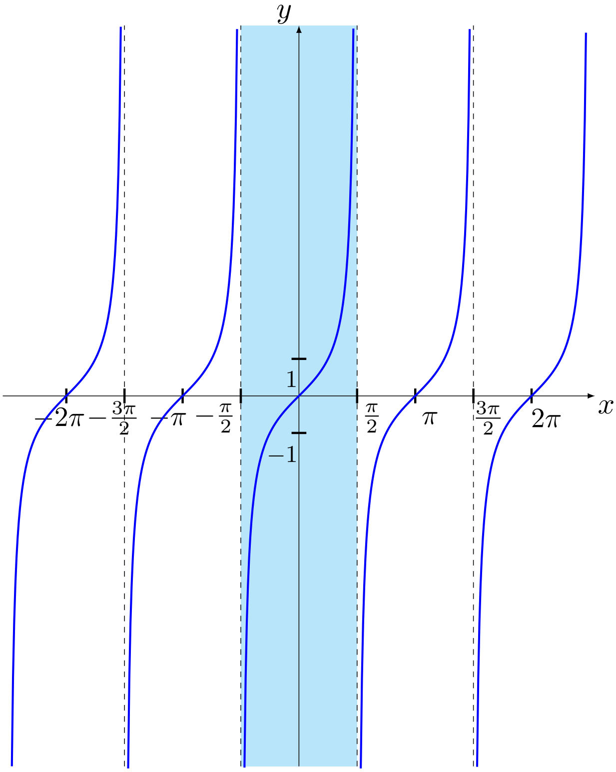
Bemerkung. Es gilt $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = c$ genau dann, wenn $\lim\limits_{x\nearrow a} \varphi(x) = c$ und $\lim\limits_{x\searrow a} \varphi(x) = c$ gilt.

(4) Sei I ein nach rechts unbeschränktes Intervall, z. B. $I = [0, \infty[$.
Dann bedeutet $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = c$, dass für jede Folge $(x_n \in I)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = c$. Ist I ein nach links unbeschränktes Intervall, so ist analog $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = c$ definiert.

Beispiel 1. Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x}{|x|}$, (vgl. 4.5 für die Definition von $|x|$).
Es gilt $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = 1$ und $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x) = -1$. Also existiert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$ nicht.



Beispiel 2. Die verschiedenen Äste der Funktion $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

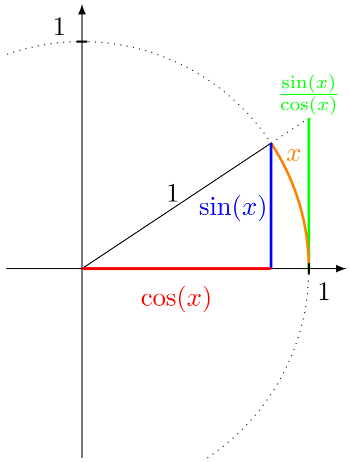


Betrachtet man das Intervall $I := \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ und die Funktion $\tan\colon I \to \mathbb{R}$, so sieht man, dass $\lim\limits_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = \quad \infty$ und $\lim\limits_{x \nearrow \frac{3\pi}{2}} \tan(x) = \infty$ gilt. Auch sieht man, dass tan periodisch mit der Periode π ist.

Beispiel 3. Besitzt die Funktion $f : \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$, für $x \to 0$ einen Grenzwert? Für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ gilt: $\underbrace{\cos(x)}_{\leqslant 1} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{\leqslant x} \leqslant 1 \cdot x \leqslant \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ und also $\cos(x) \leqslant \frac{x}{\sin(x)} \leqslant \frac{1}{\cos(x)}$. Hieraus folgt $\frac{1}{\cos(x)} \geqslant \frac{\sin(x)}{x} \geqslant \cos(x)$.

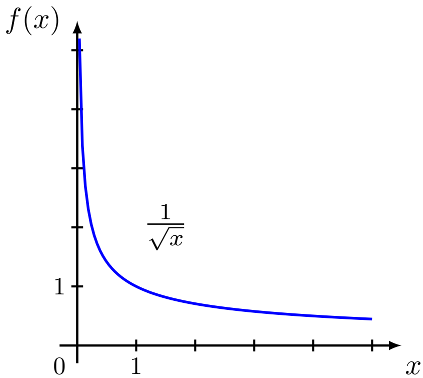
Da $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1 = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\cos(x)}$ gilt, folgt $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Da $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ eine gerade Funktion ist, also $f(x) = f(\quad x)$ für $x \neq 0$ gilt, folgt insgesamt $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.



Damit ist die Funktion $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$, stetig.

Beispiel 4. Sei $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$. Der Grenzwert für $x \to 0$ existiert nicht, denn es ist $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \infty$.



Im nächsten Abschnitt untersuchen wir, ob die Fläche unterhalb der Kurve einen Flächeninhalt $< \infty$ besitzt.

12.1 Aufgabe 125

Aufgabe 125. Sei I_1 ein Intervall in $\mathbb{R}$, und sei $a \in I_1$. Die Menge I entstehe aus I_1 durch Herausnahme des Punktes a. Zeigen Sie, dass es stets eine Folge $(x_n \in I)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gibt.

13 Uneigentliche Integrale

Mit dem bestimmten Integral erhält man den Inhalt einer Fläche, die von einer stetigen Funktion über einem Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ begrenzt wird. Nun kann es aber passieren, dass eine Funktion, deren Integral gebildet werden soll, an einer Stelle des Intervalls nicht definiert ist oder dass der Integrationsbereich bis ∞ oder $-\infty$ ausgedehnt werden soll. Man spricht in diesen Fällen von einem *uneigentlichen Integral*.

13.1 Der Integrand ist an einer Stelle nicht definiert

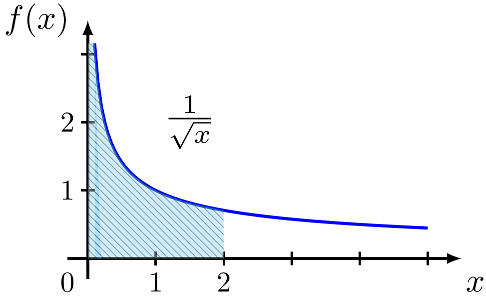
Wir betrachten zunächst den Fall, dass der Integrand an einer Integrationsgrenze nicht definiert ist.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, und sei $f\colon]a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $0 < \varepsilon < b - a$ das Riemann-Integral $\displaystyle\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$. Wenn der rechtsseitige Grenzwert $\displaystyle\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ existiert, so heißt das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *konvergent*, und man setzt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Analog: Ist $f\colon [a, b[\to \mathbb{R}$ stetig, dann existiert für ε mit $0 < \varepsilon < b - a$ das Integral $\displaystyle\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$. Wenn $\displaystyle\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ existiert, heißt das Integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *konvergent*, und man setzt $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$.

Beispiele. 1) Zu bestimmen ist das Integral $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$. Der Integrand ist an der Integrationsgrenze 0 nicht definiert.



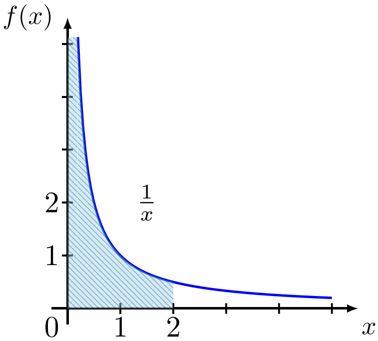
Für $0 < \varepsilon < 2$ ist $\displaystyle\int_\varepsilon^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^2 = 2\sqrt{2} \quad 2\sqrt{\varepsilon}\,.$ Daraus folgt

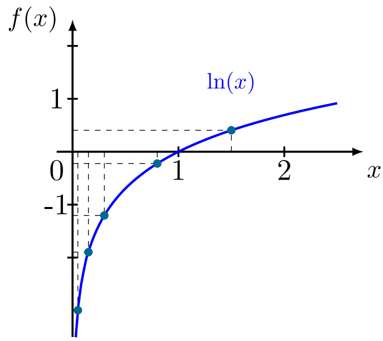
$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx := \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{0+\varepsilon}^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\; 2\sqrt{2} \quad 2\sqrt{\varepsilon}\,)= 2\sqrt{2}.$$

Das Integral ist also konvergent.

2) Für $0 < \varepsilon < 2$ ist $\displaystyle\int_\varepsilon^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)\,\Big|_\varepsilon^2 = \ln(2) \quad \ln(\varepsilon).$

Da $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\ln(\varepsilon) = \quad \infty$ ist, ist das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x}\,dx$ nicht konvergent.





3) Für $0 < \varepsilon < 1$ und $n > 1$ ist

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^n}\,dx = \frac{x^{\quad n+1}}{n+1}\,\Bigg|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1 \quad n}\cdot\frac{1}{x^{n \quad 1}}\,\Bigg|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1 \quad n}\left(1 \quad \frac{1}{\varepsilon^{n \quad 1}}\right).$$

Da $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{\varepsilon^{n \quad 1}} = \infty$ für $n > 1$ gilt, ist $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^n}\,dx$ nicht konvergent.

4) Für $0 < \varepsilon < 1$ gilt $\displaystyle\int_0^{1 \quad \varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1 \quad x^2}}\,dx = \arcsin(x)\,\Big|_0^{1 \quad \varepsilon}$, vgl. 6.2.

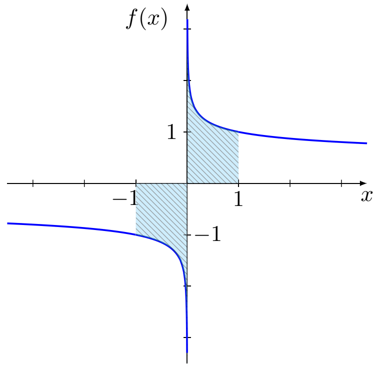
Es ist $\arcsin(0) = 0$ und $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$. Daraus folgt

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 \quad x^2}}\,dx := \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_0^{1 \quad \varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1 \quad x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

5) Hier ist der Integrand innerhalb des Intervalls nicht definiert. Es ist

$$\int_{1}^{1} \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{1}^{0\quad\varepsilon} \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\,dx + \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{0+\varepsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\,dx$$

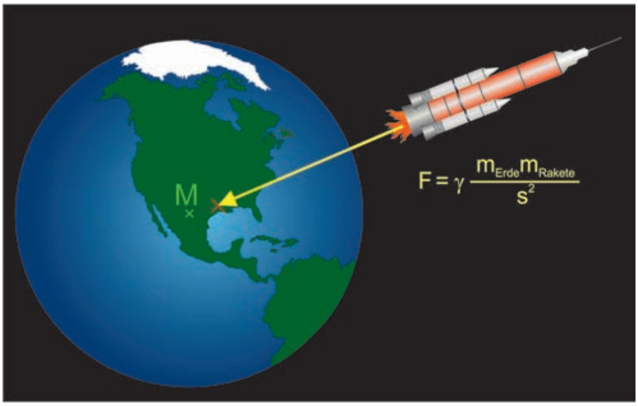
$$= \lim_{\varepsilon\searrow 0}\left(\frac{5}{4}(\varepsilon^{\frac{4}{5}}\quad 1)\right) + \lim_{\varepsilon\searrow 0}\left(\frac{5}{4}(1\quad \varepsilon^{\frac{4}{5}})\right) = \quad\frac{5}{4} + \frac{5}{4} = 0.$$



13.2 Integrale mit unendlichen Grenzen

Manchmal möchte man auch uneigentliche Integrale betrachten, bei denen eine Integrationsgrenze unendlich ist.

Zum Beispiel ist $\int_a^\infty F(s)\,ds$ die Arbeit, die nötig ist, damit eine Rakete das Schwerefeld der Erde verlassen kann, wobei $F(s)$ die notwendige Kraft an der Stelle s bedeutet.



Sei $a \in \mathbb{R}$, und sei $f : \mathbb{R}_{\geqslant a} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert für jedes $R \in \mathbb{R}_{>a}$ das Integral $\displaystyle\int_a^R f(x)\,dx$. Man setzt $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,dx$, falls der Grenzwert existiert, und nennt dann das Integral $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ *konvergent.* Analog ist $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ für eine stetige Funktion $f\colon\,]-\infty,a] \to \mathbb{R}$ definiert.

Beispiele. 1) Betrachte $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^n}\,dx$ für $n > 1$. Für $R \in \mathbb{R}_{>1}$ ist

$$\int_1^R \frac{dx}{x^n} = \frac{x^{-n+1}}{-n+1}\bigg|_1^R = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{R^{n-1}}\right).$$

Da $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{R^{n-1}} = 0$ für $n > 1$ ist, folgt

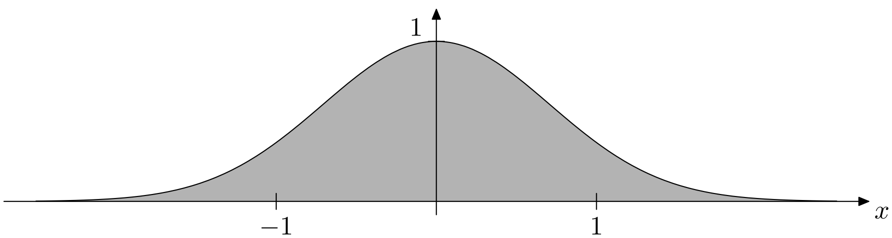
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^n}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1} \qquad \text{für } n > 1.$$

2) Für $n \leqslant 1$ konvergiert $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^n}\,dx$ nicht.

3) Für die Fläche unter der Gaussschen Glockenkurve (vgl. 4.8) gilt

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Dies zeigt man mit Hilfe der Γ-Funktion $\Gamma(x) := \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ und Substitution, vgl. [6, (20.11)].



14 Kurven im $\mathbb{R}^n$

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine *Kurve im* $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung

$$\varphi : I \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)),$$

mit stetigen Funktionen $\varphi_i : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \varphi_i(t)$, für $i = 1, \ldots, n$.

Beispiele. 1. Die Bewegung eines Massenpunktes im $\mathbb{R}^3$ wird durch eine Kurve beschrieben. Man setzt $n = 3$ und fasst t als Zeit auf. Dann ist

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) \in \mathbb{R}^3$$

der Ort im dreidimensionalen Raum, an dem sich der Massenpunkt zum Zeitpunkt t aufhält.

2. **Kreis im $\mathbb{R}^2$:** Sei $n = 2$ und $r > 0$. Ein Kreis mit Mittelpunkt (a, b) und Radius r wird zum Beispiel durch die Kurve

$$\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (a + r\cos(t), b + r\sin(t))$$

umrandet. In Vektorschreibweise wird diese Kurve durch

$$t \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

beschrieben (vergleiche 15.2 und 15.3).

3. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist die Graph-Abbildung

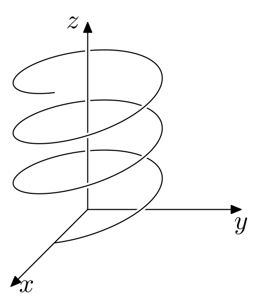
$$\varphi : I \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t, f(t))$$

eine Kurve im $\mathbb{R}^2$.

4. **Schraubenlinie im $\mathbb{R}^3$:** Seien $r > 0$ und $c \neq 0$ reelle Zahlen. Die Kurve

$$\varphi : I \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t), ct)$$

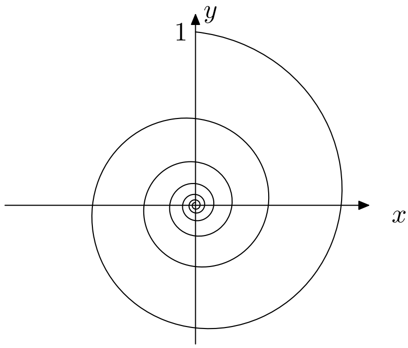
wird auch als „Schraubenlinie“ bezeichnet.



5. **Logarithmische Spirale:** Sei $n = 2$. Die Kurve

$$f : [0, 12\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2\pi}} (\sin(t), \cos(t))$$

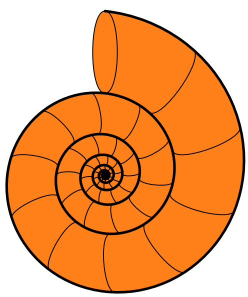
macht 6 Umdrehungen um den Punkt $(0, 0)$, wobei sie sich immer stärker an diesen Punkt annähert. Nach jeder Umdrehung hat sich der Abstand zu $(0, 0)$ halbiert.



In Vektorschreibweise wird die Kurve durch

$$f(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2\pi}} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

beschrieben. Sie inspirierte zum Titelbild des Kurses 2004/05:



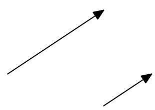
Fortsetzung Lineare Algebra (ergänzend)

15 Vektorrechnung

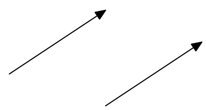
Man unterscheidet zwischen so genannten *skalaren* Größen und so genannten *vektoriellen* Größen. Skalare Größen sind bei fester Maßeinheit durch einen Zahlenwert λ eindeutig bestimmt, wie zum Beispiel:

Länge	Temperatur	Zeit	Masse
3 m	$5°$	1,4 sec	13,7891 g
$\lambda = 3$	$\lambda = 5$	$\lambda = 1{,}4$	$\lambda = 13{,}7891$

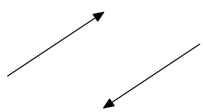
Die reelle Größe λ heißt *Skalar* (man kann sie auf einer Skala ablesen). Vektorielle Größen nennt man auch *Vektoren*. Sie sind durch einen Zahlenwert, genannt *Betrag*, und eine Richtung gegeben. Vektorielle Größen sind zum Beispiel Kraft, Geschwindigkeit, Drehmoment, elektrische und magnetische Feldstärke. Solche Größen lassen sich als Pfeile im Raum veranschaulichen. Ein Pfeil ist dann eindeutig durch seine Länge und seine Richtung festgelegt.



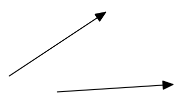
verschiedene Vektoren



gleiche Vektoren



verschiedene Vektoren



verschiedene Vektoren

Wir schreiben für Vektoren in der Regel kleine lateinische Buchstaben mit einem darüber gesetzten Pfeil:

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots \quad \text{gelesen „Vektor a“, „Vektor b“, usw.}$$

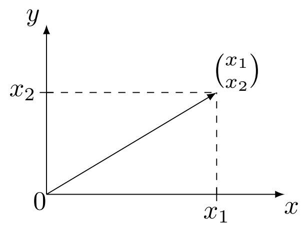
15.1 Vektoren im $\mathbb{R}^n$

Wir können die Punkte in $\mathbb{R}^n$ als Vektoren auffassen. Dabei wird jedem Punkt $P = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ der Pfeil von $(0, \ldots, 0)$ nach P zugeordnet. Man schreibt dafür auch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

und nennt $\vec{x}$ einen *Ortsvektor*. Sein *Betrag* ist der „Abstand“ von P zum Nullpunkt, also die „Länge“ des Vektors $\vec{x}$. Wir bezeichnen den Betrag eines Vektors $\vec{x}$ mit $\|\vec{x}\|$.

Für $n = 2$ sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Nach dem Satz von PYTHAGORAS ist der Abstand von $P = (x_1, x_2)$ zum Nullpunkt gleich $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.



Also ist

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,.$$

Für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ vereinbaren wir $\|\vec{x}\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\,.$

Es gilt dann $\|\vec{x}\| \geqslant 0$, und $\|\vec{x}\| = 0$ genau dann, wenn $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Außerdem gilt im Fall $n = 1$:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2} = |x_1|,$$

wobei $|\ |$ der in 4.5 definierte reelle Betrag ist.

15.2 Addition von Vektoren

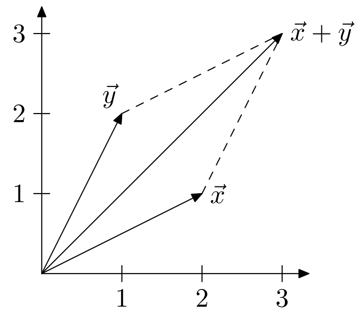
Wir addieren zwei Vektoren im $\mathbb{R}^n$ komponentenweise:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Für $n = 2$ erhält man das so genannte „Kräfteparallelogramm“.

Beispiel. Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$



Kräfte, die in einem Punkt ansetzen, addieren sich.

Den Vektor $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ nennt man *Nullvektor*. Es gilt dann $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

15.3 Multiplikation mit einem Skalar

Für einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und einen Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ erklären wir die *skalare Multiplikation* durch

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Der Betrag von $\lambda\vec{x}$ ist dann das $|\lambda|$-fache des Betrags von $\vec{x}$, denn

$$\|\lambda\vec{x}\| = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + \cdots + (\lambda x_n)^2} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)} = |\lambda|\,\|\vec{x}\|.$$

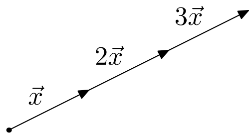
Beispiele. 1) Der physikalische Impuls $\vec{p}$ ist die skalare Multiplikation von Masse und Geschwindigkeit:

$$\vec{p} = m\,\vec{v}$$

Die Masse m ist der Skalar, mit dem multipliziert wird.

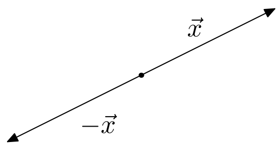
2) Sei $\lambda = 3$ und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Es gilt dann

$$3\vec{x} = \vec{x} + \vec{x} + \vec{x}.$$



3) Sei $\lambda = -1$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dann ist $\lambda\vec{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$ und

$$\vec{x} + \lambda\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_1 \\ x_2 - x_2 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$



Für beliebige Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt $\vec{x} + (-1)\,\vec{x} = \vec{0}$. Wir schreiben auch $-\vec{x}$ für $(-1)\,\vec{x}$ und $\vec{x} - \vec{y}$ für $\vec{x} + (-1)\,\vec{y}$ mit $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Geraden in Parameterform

Eine Gerade in der Ebene lässt sich durch eine Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $t \mapsto \vec{a} + t\,\vec{b}$ beschreiben. Dabei heißt $\vec{a}$ der *Aufpunkt*, $\vec{b}$ der *Richtungsvektor* und t der *Parameter* der Geraden.
Die aus der Schule bekannte Geradengleichung $y = mx + k$ mit $m, k \in \mathbb{R}$ lässt sich zum Beispiel in eine solche *Parameterform* umrechnen zu

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix},$$

denn es ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ mx + k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

15.4 Skalarprodukt

Bisher haben wir für Vektoren zwei Operationen definiert: Addition und skalare Multiplikation. In diesem Abschnitt wollen wir eine weitere Verknüpfung einführen, die bei Abstands- und Winkelbestimmung nützlich ist.

Für zwei Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^n$ definieren wir ihr *Skalarprodukt* durch

$$\vec{x} \cdot \vec{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \in \mathbb{R} \quad \text{(dies ist ein Skalar).}$$

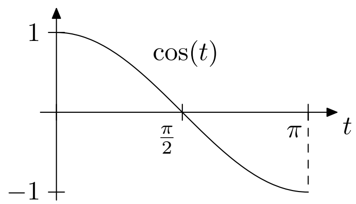
Das Quadrat des Betrags von $\vec{x}$ ist also

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \|\vec{x}\|^2.$$

Der *Winkel* $\alpha = \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$ ist für zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$ definiert durch

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|} \quad \text{und} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi.$$

Hierdurch ist α im Intervall $[0, \pi]$ eindeutig bestimmt, denn cos definiert eine bijektive Abbildung $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$



und es gilt die Cauchy-Schwarz*sche Ungleichung* $-1 \leqslant \dfrac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|} \leqslant 1.$

H. A. Schwarz 1843–1921

A. L. Cauchy 1789–1857

Folgerung. Seien zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \neq 0$ und ihr Winkel $\alpha = \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$ vorgegeben. Dann berechnet sich ihr Skalarprodukt zu

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \cos(\alpha),$$

und es ist $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ genau dann, wenn $\cos(\alpha) = 0$, wenn also $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Ist $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$, so sagen wir $\vec{x}$ steht *senkrecht* zu $\vec{y}$ oder $\vec{x}$ und $\vec{y}$ sind *orthogonal*. Wir schreiben dann auch $\vec{x} \perp \vec{y}$.

15.5 Orthonormalbasis

Definition.

1) Ein Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit Betrag $\|\vec{v}\| = 1$ heißt *Einheitsvektor*.

2) Man sagt, dass n Einheitsvektoren $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}$ eine *Orthonormalbasis* von $\mathbb{R}^n$ bilden, wenn $\vec{v_i} \perp \vec{v_j}$ für $i \neq j$.

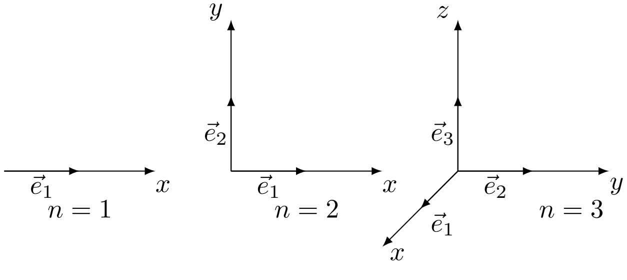
Für eine Orthonormalbasis $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}\}$ gilt dann

$$\vec{v_i} \cdot \vec{v_j} = \begin{cases} \|\vec{v_i}\|^2 = 1, & \text{für } i = j \\ 0, & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Beispiele. 1) Die *Koordinateneinheitsvektoren*

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$.



2) Die Vektoren $\vec{v_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$. Denn nach 15.3 ist

$$\|\vec{v_1}\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1^2 + 1^2} = 1$$

und

$$\|\vec{v_2}\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1^2 + (-1)^2} = 1.$$

Sie stehen senkrecht zueinander, denn

$$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = \frac{1}{2} \left(1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)\right) = 0.$$

3) Welche der folgenden Vektoren bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$?

$$\vec{v_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v_4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v_5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v_6} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gesucht sind also drei Vektoren, die jeweils Betrag 1 haben, und die paarweise senkrecht aufeinander stehen. Damit kommt $\vec{v_2}$ schon einmal nicht in Frage, denn $\vec{v_2}$ hat Betrag 5:

$$\|\vec{v_2}\| = \sqrt{3^2 + 0 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Die anderen Vektoren $\vec{v_1}$, $\vec{v_3}$, $\vec{v_4}$, $\vec{v_5}$ und $\vec{v_6}$ haben alle Betrag 1.

Es ist $\vec{v_6} = -\vec{v_5}$. Daher stehen $\vec{v_5}$ und $\vec{v_6}$ nicht senkrecht aufeinander. Die Vektoren $\vec{v_1}$, $\vec{v_3}$ und $\vec{v_5}$ bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, denn sie sind paarweise orthogonal:

$$\vec{v_1} \cdot \vec{v_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} = 0,$$

daher gilt $\vec{v_1} \perp \vec{v_3}$.

Außerdem ist $\vec{v_1} \cdot \vec{v_5} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{v_3} \cdot \vec{v_5} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$

Unabhängig davon bilden auch die Vektoren $\vec{v_1}$, $\vec{v_3}$ und $\vec{v_6}$ eine Orthonormalbasis.

15.6 Normierung auf Länge 1

Außer dem Nullvektor lässt sich jeder Vektor durch Multiplikation mit einem Skalar zu einem Einheitsvektor „normieren“.
Sei $\vec{x} \neq \vec{0}$. Dann ist $\|\vec{x}\| > 0$, und $\vec{e} := \frac{1}{\|\vec{x}\|}\vec{x}$ hat nach 15.3 den Betrag

$$\|\vec{e}\,\| = \left\| \frac{1}{\|\vec{x}\|}\vec{x} \right\| = \left| \frac{1}{\|\vec{x}\|} \right| \|\vec{x}\| = \frac{1}{\|\vec{x}\|} \|\vec{x}\| = 1.$$

Beispiele. 1) Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann hat $\vec{x}$ den Betrag

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10},$$

und $\vec{e} := \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$ ist ein Einheitsvektor.

2) Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Dann hat $\vec{x}$ den Betrag

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{30},$$

und $\vec{e} := \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{-2}{\sqrt{30}} \\ \frac{3}{\sqrt{30}} \\ \frac{-4}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$ ist ein Einheitsvektor.

15.7 Lineare Unabhängigkeit und Basis

Beobachtung. Für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ gilt

$$\vec{x} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man sagt $\vec{x}$ ist eine *„Linearkombination von $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$“*.

Vektoren $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_m} \in \mathbb{R}^n$ heißen *linear unabhängig*, wenn für jede Linearkombination des Nullvektors

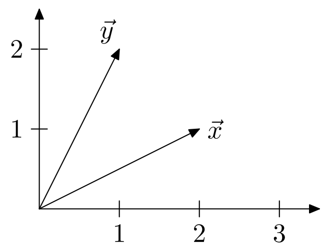
$$\lambda_1 \vec{v_1} + \cdots + \lambda_m \vec{v_m} = \vec{0}$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ folgt, dass alle λ_i gleich 0 sind. Andernfalls heißen $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_m}$ *linear abhängig.*

Beispiele. 1) Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{x} = \lambda \vec{y}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $\vec{x}$ und $\vec{y}$ linear abhängig, denn

$$\vec{x} + (-\lambda)\, \vec{y} = \vec{0}.$$

2) Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ungleich dem Nullvektor. Gilt $\vec{x} \perp \vec{y}$, so sind $\vec{x}$ und $\vec{y}$ linear unabhängig. Die Umkehrung dieser Aussage ist im Allgemeinen falsch. Betrachte zum Beispiel die Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ aus dem Beispiel in 15.2.



Sie stehen offensichtlich nicht senkrecht aufeinander. Aber $\vec{x}$ und $\vec{y}$ sind linear unabhängig. Denn sei

$$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} = \vec{0} \quad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

so folgt

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also

$$2\alpha + \beta = 0 \quad \text{und} \quad \alpha + 2\beta = 0.$$

Zieht man nun die zweite Gleichung von der ersten Gleichung ab

$$2\alpha - \alpha + \beta - 2\beta = 0 - 0 = 0,$$

so erhält man $\alpha = \beta$. Dies wiederum eingesetzt in die erste Gleichung führt uns zu $0 = 2\alpha + \beta = 3\alpha$, also $\beta = \alpha = 0$.

Man nennt eine Menge von Vektoren $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_m}\}$ eine *Basis* des $\mathbb{R}^n$, wenn $n = m$ gilt und die Vektoren $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_m}$ in $\mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind. Jeder Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ lässt sich dann als Linearkombination

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v_1} + \cdots + \lambda_n \vec{v_n}$$

mit eindeutig bestimmten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^n$ schreiben.

15.8 Vektorprodukt

Das in 15.4 diskutierte Produkt von zwei Vektoren ordnet diesem einen Skalar zu. Im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ gibt es noch eine weitere Möglichkeit der Produktbildung, die je zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ jeweils einen dritten Vektor zuordnet.

Für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ definieren wir das *Vektorprodukt*

$$\vec{x} \times \vec{y} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Beispiel. Für die ersten beiden Koordinateneinheitsvektoren $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt

$$\vec{e_1} \times \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \vec{e_3}$$

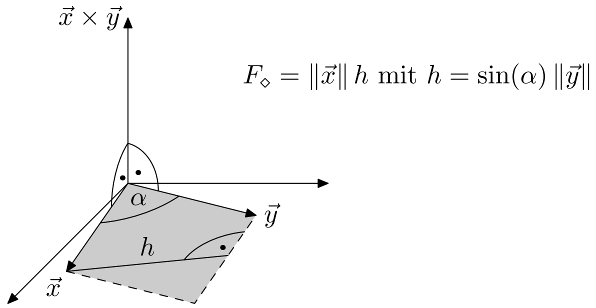
und

$$\vec{e_2} \times \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = -\vec{e_3}.$$

Eigenschaften des Vektorprodukts

1) Ist $\vec{x} \times \vec{y} \neq 0$, so steht $\vec{x} \times \vec{y}$ senkrecht auf $\vec{x}$ und senkrecht auf $\vec{y}$.

2) Der Betrag $\|\vec{x} \times \vec{y}\|$ ist der Flächeninhalt $F_\diamond$ des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms, also $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = F_\diamond = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \cdot \sin(\alpha)$, wobei $0 \leqslant \alpha = \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) \leqslant \pi$.



3) **distributiv:** $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$ und $(\vec{x} + \vec{y}) \times \vec{z} = \vec{x} \times \vec{z} + \vec{y} \times \vec{z}$

4) **antikommutativ:** $\vec{x} \times \vec{y} = -(\vec{y} \times \vec{x})$

5) **bilinear:** $\lambda(\vec{x} \times \vec{y}) = \lambda\vec{x} \times \vec{y} = \vec{x} \times \lambda\vec{y}$

6) **Anwendung der Determinante:** Nach 2) ist der Flächeninhalt F des von den Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{aus } \mathbb{R}^2$$

aufgespannten Parallelogramms der Betrag einer *Determinante*, da

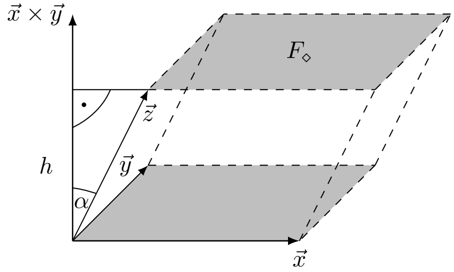
$$\begin{aligned} F &= \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{0^2 + 0^2 + (x_1y_2 - y_1x_2)^2} = |x_1y_2 - y_1x_2| \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right| \text{ gilt.} \end{aligned}$$

15.9 Spatprodukt

Mit drei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ lässt sich das gemischte Produkt

$$\vec{z} \cdot (\vec{x} \times \vec{y}) \in \mathbb{R}$$

bilden. Dabei bezeichnet „$\cdot$“ das Skalarprodukt und „$\times$“ das Vektorprodukt. Wenn $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$ linear unabhängig sind, dann heißt $\vec{z} \cdot (\vec{x} \times \vec{y})$ *Spatprodukt.* Es stimmt bis auf Vorzeichen mit dem Volumen V_{Spat} des von den drei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ aufgespannten Spats überein.



Es ist $V_{\text{Spat}} = h \cdot F_\diamond$, wobei für die Höhe h gilt:

$$h = \begin{cases} \|\vec{z}\| \cos(\alpha), & \text{für } 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2} \\ -\|\vec{z}\| \cos(\alpha), & \text{für } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases}$$

mit $\alpha = \sphericalangle(\vec{x} \times \vec{y}, \vec{z})$. Also ist $h = \|\vec{z}\| \, |\cos(\alpha)|$, und es folgt

$$\begin{aligned} V_{\text{Spat}} &= (\|\vec{z}\| \, |\cos(\alpha)|) \cdot F_\diamond \overset{15.8}{=} (\|\vec{z}\| \, |\cos(\alpha)|) \cdot \|\vec{x} \times \vec{y}\| \\ &= |\, \|\vec{z}\| \, \|\vec{x} \times \vec{y}\| \, \cos(\alpha) \,| \overset{15.4}{=} |\, \vec{z} \cdot (\vec{x} \times \vec{y}) \,| \end{aligned}$$

15.10 Aufgaben 126 − 133

Aufgabe 126. Man zeichne die Geraden $L_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \vec{a}_i + t\,\vec{b}_i$, (mit $i = 1, 2, 3$), für $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, für $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, sowie für $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Wie drückt sich Parallelität für Geraden in Parameterform aus?

Aufgabe 127. Für Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ zeige man die *Parallelogrammgleichung*

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2.$$

Aufgabe 128. Die Atome des CH_4-Moleküls befinden sich im $\mathbb{R}^3$ in den folgenden Punkten:
C-Atom: $C = (0, 0, 0)$
H-Atome:

$$H_1 = (1, 1, 1),\ H_2 = (-1, -1, 1),\ H_3 = (1, -1, -1),\ H_4 = (-1, 1, -1)$$

a) Man zeichne das CH_4-Moleküls mit allen Atomen in einem Koordinatensystem.

b) Man bestimme die Abstände $\|C - H_i\|$ für $i = 1, \ldots, 4$ des C-Atoms zu jedem H-Atom, sowie die Abstände $\|H_i - H_j\|$ mit $i \neq j$ zwischen je zwei H-Atomen.

Aufgabe 129. Im $\mathbb{R}^3$ seien die Punkte

$$P_1 = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\, 0\,,\, \frac{-1}{2\sqrt{6}}\Big),\ P_2 = \Big(\frac{-1}{2\sqrt{3}}\,,\, \frac{1}{2}\,,\, \frac{-1}{2\sqrt{6}}\Big),\ P_3 = \Big(\frac{-1}{2\sqrt{3}}\,,\, -\frac{1}{2}\,,\, \frac{-1}{2\sqrt{6}}\Big)$$

und $P_4 = \Big(0, 0, \frac{3}{2\sqrt{6}}\Big)$ gegeben.
Man berechne den *Abstand* $\|P_i - P_j\|$ für $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $i < j$, sowie die Winkel, die die zu P_1, P_2, P_3, P_4 gehörigen Ortsvektoren miteinander bilden.

Aufgabe 130. Man ermittle, welche der drei Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

senkrecht aufeinander stehen, und normiere $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ jeweils auf die Länge 1.

Aufgabe 131. Man zeige, dass die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_3 = \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bilden und dass $\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) = 1$ gilt.

Aufgabe 132. Man berechne für die Vektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die beiden Vektorprodukte $\vec{e}_1 \times (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)$ und $(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) \times \vec{e}_2$.

Aufgabe 133. Man zeichne den von den Vektoren

$$\vec{v_1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \vec{v_2} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v_3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Spat und berechne sein Volumen.

16 Lineare Abbildungen

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt *linear,* falls $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ und $f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Das bedeutet, eine lineare Abbildung ist mit Addition und Skalarmultiplikation verträglich.

Bemerkung. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, so gilt

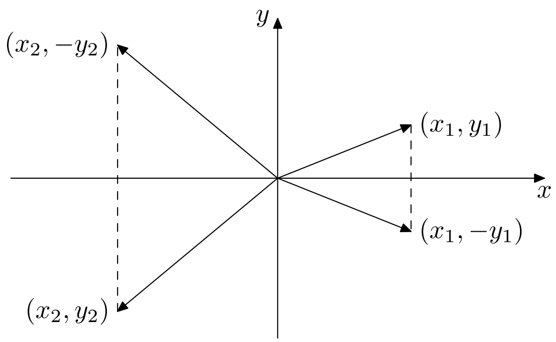
$$f(\vec{0}) = \vec{0}.$$

Begründung. Es ist $f(\vec{0}) = f(\vec{0} + \vec{0}) = f(\vec{0}) + f(\vec{0})$, da f linear ist. Subtrahiere auf beiden Seiten $f(\vec{0})$, dann folgt $\vec{0} = f(\vec{0})$.

16.1 Beispiele für lineare Abbildungen

1. **Spiegelung an der x-Achse**

$$\mathrm{sp}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$



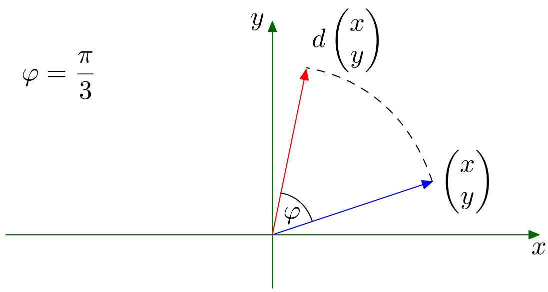
Benutzt man Matrizenmultiplikation, so ist

$$\mathrm{sp}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

2. **Drehung um $\vec{0}$ mit Drehwinkel φ**

$$\mathrm{dr}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\cos(\varphi) - y\sin(\varphi) \\ x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Speziell beschreibt dr für $\varphi = \frac{\pi}{3}$ eine positive Drehung (gegen den Uhrzeigersinn) um $60°$.



Mit Matrizenmultiplikation gilt

$$\mathrm{dr}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

3. **Drehspiegelung.** Auch das Kompositum von Drehung und Spiegelung ist eine lineare Abbildung:

$$(\mathrm{dr} \circ \mathrm{sp})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \mathrm{dr}\left(\mathrm{sp}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \mathrm{dr}\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\varphi) + y\sin(\varphi) \\ x\sin(\varphi) - y\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Man erhält die Drehspiegelungsmatrix durch Matrizenmultiplikation der Drehmatrix mit der Spiegelungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

16.2 Darstellung durch Matrizen

Für jede Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ist

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad \vec{x} \mapsto A \cdot \vec{x},$$

eine lineare Abbildung.
Umgekehrt gibt es zu jeder linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ genau eine Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, für die $f = f_A$ gilt. Als Spalten von A nimmt man einfach die Bilder der Koordinateneinheitsvektoren

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{aus } \mathbb{R}^n :$$

Schreibe

$$f(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad f(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad f(\vec{e_n}) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

und setze

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} =: A(f).$$

Sind $f : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ lineare Abbildungen, so gilt

$$A(f \circ g) = A(f) \cdot A(g).$$

Dem Kompositum von linearen Abbildungen entspricht das Produkt der zugehörigen Matrizen (vergleiche Aufgabe 107).

Beispiele

1. Betrachte

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y - 3z \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix},$$

und man erhält als zugehörige Matrix

$$A(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Mit dieser Matrix kann man für $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ bequem durch Matrizenmultiplikation den Funktionswert $f(\vec{x})$ berechnen. Zum Beispiel:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{liefert} \quad f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

2. Zur Identität $\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto \vec{x}$, gehört die Einheitsmatrix

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

16.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Ein Element $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt *Eigenwert von f*, wenn es einen Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ aus $\mathbb{R}^n$ gibt mit

$$f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}.$$

Jeder solche Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ heißt *Eigenvektor zum Eigenwert λ.*

Wie ermittelt man Eigenwerte und Eigenvektoren?

Betrachte die gemäß 16.2 zu f gehörige Matrix $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\begin{aligned} \lambda \text{ ist Eigenwert von } f &\iff \text{es gibt } \vec{x} \neq \vec{0} \text{ mit } A\vec{x} = \lambda\vec{x} \\ &\iff \text{das System } (A - \lambda E_n) \cdot \vec{x} = \vec{0} \\ & \text{ hat eine Lösung } \vec{x} \neq \vec{0} \\ &\iff \det(A - \lambda E_n) = 0 \end{aligned}$$

vergleiche 16.2, sowie den homogenen Fall in 10.4.

Fazit

- Die Eigenwerte von f sind die Nullstellen des *„charakteristischen Polynoms“* von A:
$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E_n).$$
- Die Eigenvektoren zu einem Eigenwert λ sind die Lösungen $\vec{x} \neq \vec{0}$ des Gleichungssystems
$$(A - \lambda E_n) \cdot \vec{x} = \vec{0}.$$

Landkartenprojektion

Vernachlässigt man die Erdkrümmung, so kann man die Erstellung einer Landkarte durch eine lineare Abbildung vom $\mathbb{R}^3$ auf die xy-Ebene im $\mathbb{R}^3$ beschreiben. Ein Punkt (x, y, z) in der Landschaft ist durch seinen Längengrad x, seinen Breitengrad y und seine Höhe z über dem Meeresspiegel eindeutig gegeben.
Der Punkt (x, y, z) wird durch die Landkartenprojektion f auf den Punkt $(\mu x, \mu y, 0)$ auf der Landkarte abgebildet, wobei $\mu \in \mathbb{R}$ der Maßstab der Karte ist. Die darstellende Matrix entsteht aus den Bildern der Koordinateneinheitsvektoren:

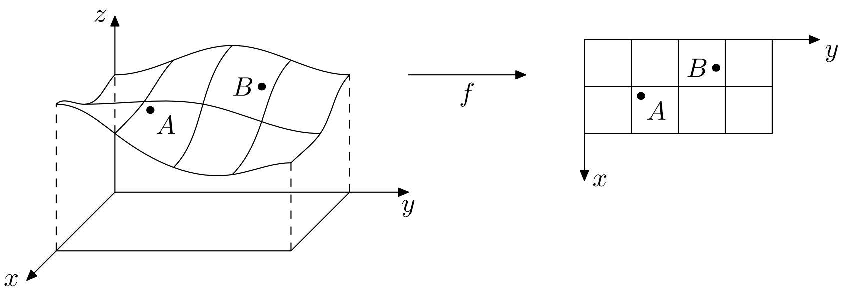
$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet leicht, dass die Eigenwerte 0 und μ sind. Die Eigenvektoren zum Eigenwert 0 sind von der Form

$$\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \neq 0.$$

Und die Eigenvektoren zum Eigenwert μ haben die Form

$$\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } (s, t) \neq (0, 0).$$



16.4 Aufgaben 134 – 138

Aufgabe 134. Bei welchen der folgenden Abbildungen handelt es sich um lineare Abbildungen?

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 3x + y$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 135. Seien $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}$ die Koordinateneinheitsvektoren im $\mathbb{R}^4$ (siehe 15.5). Dann wird durch $f(\vec{e_1}) := 1$, $f(\vec{e_2}) := 0$, $f(\vec{e_3}) := \pi$ und $f(\vec{e_4}) := \sqrt{2}$ eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definiert. Bestimmen Sie die zugehörige Matrix $A(f)$.

Aufgabe 136. Sei $\vec{v}$ ein fester Vektor in $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie:

a) die durch das Skalarprodukt gegebene Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\vec{w} \mapsto \vec{v} \cdot \vec{w}$ ist linear,

b) die durch das Vektorprodukt gegebene Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{w} \mapsto \vec{v} \times \vec{w}$ ist linear.

Aufgabe 137. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E_2)$$

für die Drehmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Für welche Drehwinkel φ besitzt p Nullstellen in $\mathbb{R}$? Wie sehen dann die Eigenwerte der Drehung aus?

Aufgabe 138. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der linearen Abbildung $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diskrete Mathematik (ergänzend)

17 Kombinatorik

Die *Kombinatorik* beschäftigt sich mit Abzählproblemen in *endlichen Mengen,* also in Mengen mit endlich vielen Elementen wie zum Beispiel $\{1, 2, 3\}$. Gezählt werden „Ereignisse“, die sich aus den Elementen der Menge zusammensetzen, etwa

$$(*) \qquad 3, 1, 1, 1, 2 \qquad \text{oder} \qquad 1, 3, 1, 1, 2.$$

Legt man Wert auf die Reihenfolge der Elemente, so kann man die Ereignisse ähnlich wie in 1.6 durch *Tupel* beschreiben. Zu den Ereignissen aus $(*)$ gehören dann die 5-Tupel $(3, 1, 1, 1, 2) \neq (1, 3, 1, 1, 2)$. Kommt es hingegen nicht auf die Reihenfolge an, so stehen $3, 1, 1, 1, 2$ und $1, 3, 1, 1, 2$ für dasselbe Ereignis.
Weitere interessante Probleme erhält man, wenn man voraussetzt, dass jedes Element der Menge höchstens einmal in dem Ereignis auftreten darf. Man spricht dann von Ereignissen ohne Wiederholung.
Diese kombinatorischen Grundprobleme wollen wir in den folgenden Abschnitten untersuchen. Ein Ereignis, das sich aus k Einträgen zusammensetzt, nennen wir dabei geordnetes *Tupel* oder *k-Tupel,* wenn es auf die Reihenfolge der Einträge ankommt. Spielt die Reihenfolge keine Rolle, so sprechen wir von einer *Kombination* oder *k-Kombination.*

17.1 Anzahl geordneter k-Tupel ohne Wiederholung

Sei $\mathcal{M}$ eine Menge mit n Elementen, zum Beispiel $\mathcal{M} = \{1, 2, \ldots, n\}$, und sei $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten k-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ mit $x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{M}$

ohne Wiederholung. Also gilt

$$x_i \neq x_j \quad \text{für } i \neq j.$$

Es muss dann notwendig $k \leqslant n$ gelten. Wie viele solcher k-Tupel gibt es? Für x_1 gibt es n Möglichkeiten, ein Element aus $\mathcal{M}$ zu wählen. Hat man x_1 bereits gewählt, bleiben für x_2 noch $(n-1)$ Möglichkeiten. Sind x_1, x_2 festgelegt, so kann man x_3 auf $(n-2)$ Weisen wählen. Führt man dies fort, so hat man bei x_k angelangt, $(n-k+1)$ Möglichkeiten x_k festzulegen. Zählt man nun alle Möglichkeiten zusammen, so ergeben sich

$$(1) \qquad n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$$

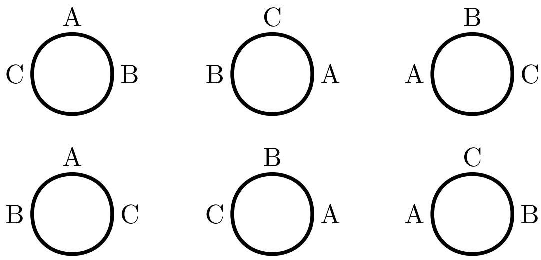
geordnete k-Tupel ohne Wiederholung.
Ist beispielsweise $k = n$, dann ist die Anzahl der geordneten k-Tupel ohne Wiederholung gleich

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 =: n\,!,$$

gesprochen *„n Fakultät"*.

Beispiele. 1) Ein runder Tisch sei für 10 Personen gedeckt. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Sitzordnung?
Es gibt $10! = 10 \cdot 9 \cdots 2 \cdot 1 = 3.628.800$ Möglichkeiten.

Die möglichen Sitzordnungen für drei Personen sind hier aufgezeichnet:



2) Wie viele Wörter mit k Buchstaben kann man aus einem Alphabet mit n Buchstaben bilden, wenn jedes Wort jeden Buchstaben höchstens einmal enthalten darf?
Genauso viele wie in (1) angegeben.

Nun kann es sein, dass in einem Wort Buchstaben mehrfach auftreten. Wie verändert sich die Anzahl der Möglichkeiten unter dieser Voraussetzung?

17.2 Anzahl geordneter k-Tupel mit Wiederholung

Auch hier wird nach Reihenfolge der Buchstaben in einem Wort unterschieden. Da nun Buchstaben in einem Wort wiederholt auftreten dürfen, muss nicht zwingend $k \leqslant n$ sein. Sei also $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Aus den n Elementen in $\mathcal{M}$ lassen sich nun genau n^k geordnete k-Tupel bilden.

Beispiele. 1) Sei $\mathcal{M} = \{a, b\}$, also $n = 2$. Für $k = 3$ gibt es $2^3 = 8$ mögliche 3-Tupel:

$$\begin{array}{cccc} (a,a,a) & (a,a,b) & (a,b,a) & (b,a,a) \\ (a,b,b) & (b,a,b) & (b,b,a) & (b,b,b) \end{array}$$

2) Sei $\mathcal{M} = \{a, b, c\}$, also $n = 3$. Für $k = 2$ gibt es $3^2 = 9$ Möglichkeiten:

$$\begin{array}{ccc} (a,a) & (a,b) & (a,c) \\ (b,a) & (b,b) & (b,c) \\ (c,a) & (c,b) & (c,c) \end{array}$$

3) Unser Alphabet besteht aus 26 Buchstaben. Man kann damit 26^8 verschiedene Passwörter der Länge 8 bilden.

17.3 Anzahl von k-Kombinationen mit Wiederholung

Wir betrachten nun Kombinationen von k Elementen aus $\mathcal{M}$, wobei nicht nach der Reihenfolge unterschieden wird. Zusätzlich dürfen Elemente mehrfach vorkommen. Sei wieder n die Anzahl der Elemente von $\mathcal{M}$.
Schreibe für eine Kombination $abc\ldots$ oder $a, b, c, \ldots$. Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig.

Beispiele. 1) Sei $\mathcal{M} = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Für $k = 1$ gibt es n Kombinationen der Länge 1, nämlich

$$a_1 \qquad a_2 \qquad \ldots \qquad a_{n-1} \qquad a_n.$$

2) Sei $\mathcal{M} = \{a, b, c\}$, also $n = 3$. Für $k = 2$ reduziert sich Beispiel 2) in 17.2 auf 6 Möglichkeiten

$$aa \qquad ab \qquad ac \qquad bb \qquad bc \qquad cc.$$

Es ist $6 = \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{n \cdot (n+1)}{k!}$.

3) Sei $\mathcal{M} = \{a, b\}$, also $n = 2$. Für $k = 3$ reduziert sich Beispiel 1) in 17.2 auf 4 Möglichkeiten

$$aaa \qquad aab \qquad abb \qquad bbb.$$

Es ist $4 = \frac{2\cdot3\cdot4}{6} = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{k!}$.

4) Sei $\mathcal{M} = \{a, b, c\}$, also $n = 3$. Für $k = 4$ gibt es die 15 Möglichkeiten

$$\begin{array}{ccccc} aaaa & aaab & aaac & aabb & aabc \\ aacc & abbb & abbc & abcc & accc \\ bbbb & bbbc & bbcc & bccc & cccc. \end{array}$$

Es ist $15 = \frac{3\cdot4\cdot5\cdot6}{4!} = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{k!}$.

Als Ergebnis halten wir fest: Es lassen sich aus den n Elementen von $\mathcal{M}$ genau

$$\frac{n\cdot(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}$$

Kombinationen der Länge k bilden.

17.4 Anzahl von k-Kombinationen ohne Wiederholung

Es sollen wieder k Elemente aus $\mathcal{M}$ kombiniert werden, wobei nicht nach der Reihenfolge unterschieden wird. Diesmal ist aber die Wiederholung von Elementen nicht zugelassen. Es muss also $k \leqslant n$ gelten. Wir fragen uns nach der Anzahl der Teilmengen von $\mathcal{M}$ mit k Elementen, wobei $\mathcal{M}$ wie oben eine Menge mit n Elementen sei.
Sei $a(k)$ die gesuchte Anzahl. Da man jede Teilmenge mit k Elementen auf $k!$ verschiedene Weisen anordnen kann, vgl. 17.1, folgt

$$k!\cdot a(k) \overset{17.1}{=} n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1),$$

und also

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \\ &=: \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Man nennt $\binom{n}{k}$ *Binomialkoeffizient* und sagt „n über k".
Eine Menge mit n Elementen besitzt demnach genau $\binom{n}{k}$ Teilmengen mit k Elementen.

Beispiel. Beim Zahlenlotto „6 aus 49“ gibt es

$$\binom{49}{6} = 13.983.816 \text{ Möglichkeiten.}$$

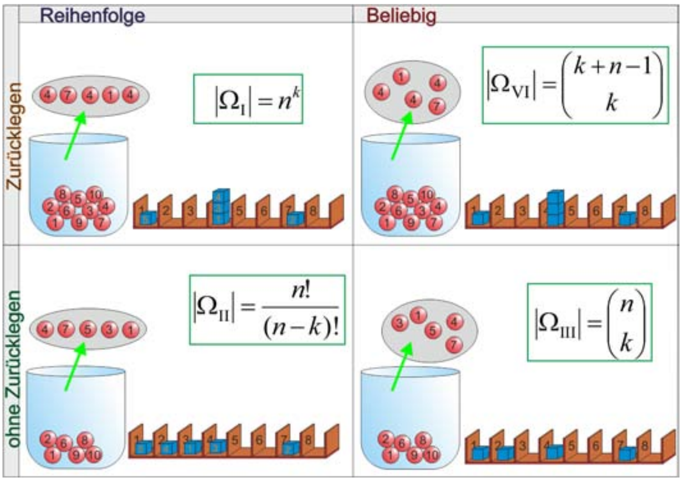
17.5 Zusammenfassung der Ergebnisse

Folgende Tabelle fasst die vorangegangenen Abschnitte zusammen: Wie viele Ereignisse mit k Einträgen können aus einer Menge mit n Elementen gebildet werden?

	mit Reihenfolge	ohne Reihenfolge
ohne Wdh., $k \leqslant n$	$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$	$\binom{n}{k}$
mit Wdh., $k \in \mathbb{N}$	n^k	$\frac{n \cdot (n+1) \cdots (n+k-1)}{k!}$

17.6 Urnenmodell

Gegeben sei eine Urne mit n unterscheidbaren Kugeln. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es k Kugeln zu ziehen? Es sei Ω jeweils die *Ergebnismenge* und $|\Omega|$ die Anzahl der Elemente von Ω.



Modell ohne Zurücklegen Lege bei der Ziehung von k Kugeln keine der Kugeln wieder zurück in die Urne. Betrachte dann die folgenden Fälle.

i.) Es kommt nicht auf die Reihenfolge des Ziehens an. Wie in 17.4 gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten Kugeln zu ziehen. Es ist also $|\Omega| = \binom{n}{k}$.

ii.) Es kommt auf die Reihenfolge des Ziehens an. Wie in 17.1 gibt es $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$ Möglichkeiten Kugeln zu ziehen. Es ist also $|\Omega| = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Modell mit Zurücklegen Lege bei der Ziehung von k Kugeln jede gezogene Kugel wieder zurück in die Urne. Betrachte dann die folgenden Fälle:

i.) Die Reihenfolge des Ziehens sei nicht relevant. Wie in 17.3 gibt es dann $\frac{n\cdot(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}$ Möglichkeiten für die Ziehung.
Es ist also $|\Omega| = \binom{n+k-1}{k}$.

ii.) Nach Reihenfolge des Ziehens wird unterschieden. Nach 17.2 gibt es n^k Möglichkeiten. Es ist also $|\Omega| = n^k$.

17.7 Binomialkoeffizienten

Für $n, k \in \mathbb{N}$ und $k \leqslant n$ ist der *Binomialkoeffizient* wie in 17.4 definiert als

$$\binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!},$$

wobei $k! = k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1$ für „k Fakultät“ steht. Er hat folgende Eigenschaften:

(1) Es ist $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(2) Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leqslant n$ folgt $\displaystyle\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$ aus (1)

Zum Beispiel: Für $n = 8$, $m = 5$ ist $\binom{8}{5} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 8 \cdot 7 = 56$ und $n - m = 3$, also $\binom{n}{n-m} = \binom{8}{3} = \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1} = 8 \cdot 7 = 56$.

(3) Man setzt $0! := 1$. Damit gilt $\binom{n}{0} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie für $n = 0$. Das sogenannte PASCALsche Dreieck ist dann so definiert, dass der $(k+1)$-te Eintrag in der $(n+1)$-te Zeile gerade $\binom{n}{k}$ für $k = 0, \ldots, n$ ist:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

Blaise Pascal,
1623-1662

Man sieht, dass jede Zahl Summe der beiden oberen Nachbarn ist, d.h. es gilt folgende Formel $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ für $k = 1, \ldots, n$.

(4) Die Summe der Einträge der $n+1$-ten Zeile im Pascalschen Dreieck ist gleich $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$.

(5) Für $n, k \in \mathbb{N}$ und $k \leqslant n$ gilt

$$\binom{n}{k} \in \mathbb{N}.$$

Es ist $\binom{n}{k}$ die Anzahl der Teilmengen mit k Elementen einer Menge mit n Elementen, vergleiche 17.4.

17.8 Anzahl der Teilmengen einer endlichen Menge

Eine Menge $\mathcal{M}$ mit n Elementen hat genau 2^n Teilmengen, wie folgende Tabelle zeigt.

k	Anzahl der Teilmengen von $\mathcal{M}$ mit k Elementen
0	$\binom{n}{0} = 1$ Teilmenge mit 0 Elementen, nämlich die leere Menge
n	$\binom{n}{n} = 1$ Teilmenge mit n Elementen, nämlich $\mathcal{M}$ selbst
$1 \leqslant k \leqslant n-1$	$\binom{n}{k}$ nach 17.4

Nach (4) in 17.7 ergibt ein Aufsummieren $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ Teilmengen.

17.9 Binomialsatz

Für $a, b \in \mathbb{C}$ gelten

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2 \\ &= \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3 \\ &= \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} b^3.\end{aligned}$$

Allgemein gilt für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ der *Binomialsatz*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

17.10 Ein weiteres kombinatorisches Problem

Sei $\mathcal{M} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Menge mit n Elementen.
Wie viele geordnete k-Tupel kann man mit den Elementen von $\mathcal{M}$ bilden, wenn a_1 genau k_1 mal, a_2 genau k_2 mal,..., a_n genau k_n mal auftreten soll. Die Zahlen $k_1, \ldots, k_n$ seien dabei so vorgegeben, dass $k_1 + \cdots + k_n = k$ gilt. Wird nach Reihenfolge unterschieden, so gibt es genau

$$\frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_{n-1}! \cdot k_n!}$$

Möglichkeiten.

Beispiel. Wie viele verschiedene Passwörter mit sechs Buchstaben kann man aus dem Wort **RIFIFI** bilden?
Wende die Formel mit folgenden Zahlen an:

- $n = 3$, da die Menge $\{\mathbf{R}, \mathbf{I}, \mathbf{F}\}$ 3 Elemente hat,
- $k = 6$, da nach Wörtern mit 6 Buchstaben gefragt ist,
- $k_1 = 1$, da R im Wort **RIFIFI** einmal vorkommt,
- $k_2 = 3$, da I im Wort **RIFIFI** dreimal vorkommt,
- $k_3 = 2$, da F im Wort **RIFIFI** zweimal vorkommt.

Es gibt also folgende Möglichkeiten:

$$\begin{aligned}\frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3!} &= \frac{6!}{1! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 6 \cdot 2} = 3 \cdot 20 \\ &= 60\,.\end{aligned}$$

17.11 Aufgaben 139 – 146

Aufgabe 139. An einem Pferderennen nehmen 10 Pferde teil. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es für die ersten drei Plätze? Das Ergebnis ist zu begründen.

Aufgabe 140. Wie viele verschiedene Würfe sind beim Würfeln mit 4 gleichen sechsseitigen Würfeln möglich?

Aufgabe 141. Ein Gewichtssatz besteht aus den Gewichten

$$1\,\mathrm{g},\ 2\,\mathrm{g},\ 5\,\mathrm{g},\ 10\,\mathrm{g},\ 20\,\mathrm{g},\ 50\,\mathrm{g},\ 100\,\mathrm{g},\ 250\,\mathrm{g},\ 500\,\mathrm{g}.$$

Wie viele verschiedene Zusammenstellungen mit jeweils 3 Gewichten sind möglich?

Aufgabe 142. Wie viele verschiedene fünfstellige natürliche Zahlen kann man mit den beiden Zahlen 1 und 2 bilden?

Aufgabe 143. Für Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gilt $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k := a_1 + \cdots + a_n$, vgl. 3.2. Berechnen Sie

$$\sum_{k=1}^{4} \binom{4}{k} 2^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{3} \binom{81}{78+k}.$$

Aufgabe 144. Wieviele verschiedene fünfstellige natürliche Zahlen kann man mit den beiden Zahlen 1 und 2 bilden, wenn dabei stets 1 zweimal und 2 dreimal vorkommen soll?

Aufgabe 145. Wieviele Möglichkeiten gibt es, die 11 Buchstaben des Wortes MISSISSIPPI anzuordnen?

Aufgabe 146. Wieviele Möglichkeiten gibt es, lauter verschiedene Bücher an die Personen Ahrens, Müller und Schmidt zu verteilen, wenn

a) 4 Bücher zur Verfügung stehen und davon Ahrens 2 Bücher, Müller 1 Buch und Schmidt 1 Buch erhalten soll,

b) 15 Bücher zur Verfügung stehen und davon Ahrens 4 Bücher, Müller 7 Bücher und Schmidt 4 Bücher erhalten soll?

18 Rekursionsprobleme

Mit der Formel $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ kann man rekursiv die *Fibonacci-Zahlen* a_m für alle $m \in \mathbb{N}$ bestimmen, indem man $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ als Anfangswerte nimmt und dann sukzessive

$$a_2 = a_1 + a_0 = 1\,, \quad a_3 = a_2 + a_1 = 2\,, \quad a_4 = a_3 + a_2 = 3 \quad \text{und so weiter}$$

ausrechnet, (vgl. Abschnitt 3.4) Um zum Beispiel a_{100} auszurechnen, ist diese Methode aber etwas mühselig. Deshalb lernen wir nun noch eine andere Methode kennen.

18.1 Fibonacci-Rekursion

Die Formel $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ mit $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ schreiben wir um zu

$$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Hierbei bezeichnet $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge, die aus der Null und allen natürlichen Zahlen besteht.
Man möchte nun eine Abbildungsvorschrift

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}, \quad m \mapsto f(m),$$

ermitteln, die folgende zwei Eigenschaften hat:

(1) $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ „Anfangsbedingung“

(2) $f(n+2) - f(n+1) - f(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ „Rekursionsbedingung“

Wenn dies gelingt, kann man $f(m)$ sofort für jedes $m \in \mathbb{N}$ ausrechnen, ohne die Werte von $f(m-1)$ und $f(m-2)$ kennen zu müssen.
Als ersten Ansatz nimmt man dafür $f(m) = x^m$, wobei x eine Lösung der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ ist. (Diese Gleichung ist uns schon beim Goldenen Schnitt in Abschnitt 3.4 begegnet.) Es gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Rekursionsbedingung (2)

$$\begin{aligned} f(n+2) - f(n+1) - f(n) &= x^{n+2} - x^{n+1} - x^n \\ &= x^n(x^2 - x - 1) = 0. \end{aligned}$$

Aber die Anfangsbedingung (1) muss nicht erfüllt sein.
Für die *allgemeine Lösung* setzt man daher

$$f(m) = c_1 x_1^m + c_2 x_2^m.$$

Dabei sind $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ die beiden Lösungen der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$, und $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ sind Konstanten, deren genauer Wert noch bestimmt werden muss.
Dieser Ansatz erfüllt ebenfalls die Rekursionsbedingung (2):

$$\begin{aligned} f(n+2) - f(n+1) - f(n) &= c_1 x_1^{n+2} + c_2 x_2^{n+2} - c_1 x_1^{n+1} - c_2 x_2^{n+1} \\ &\quad - c_1 x_1^n - c_2 x_2^n \\ &= c_1 x_1^n \underbrace{(x_1^2 - x_1 - 1)}_{=0} + c_2 x_2^n \underbrace{(x_2^2 - x_2 - 1)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Die Werte der Konstanten c_1 und c_2 bestimmt man nun aus der Anfangsbedingung (1):

$$0 = f(0) = c_1 x_1^0 + c_2 x_2^0 = c_1 + c_2 \quad \Longrightarrow \quad c_2 = -c_1$$

und

$$\begin{aligned} 1 = f(1) &= c_1 x_1 + c_2 x_2 = c_1 x_1 - c_1 x_2 \\ &= c_1 (x_1 - x_2) = c_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \right) \\ &= c_1 \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Also ist $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ und $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Die Fibonacci-Rekursion wird demnach durch die Abbildung

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}, \quad m \mapsto \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^m - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^m,$$

gelöst.

18.2 Weitere Rekursionen

Wir beginnen mit einem Beispiel. Gesucht ist eine Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$, $m \mapsto f(m)$, die $f(0) = 3$, $f(1) = 7$ und

$$f(n+2) - f(n+1) - 30 f(n) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

erfüllt.

Die *charakteristische Gleichung* lautet $x^2-x-30=0$ und hat die Lösungen $x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+30}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{121}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{11}{2}$, also $x_1=6$ und $x_2=-5$. Die *allgemeine Lösung* lautet demnach

$$f(m)=c_1 6^m+c_2(-5)^m.$$

Es ist $f(0)=c_1+c_2\overset{!}{=}3$ und also $c_2=3-c_1$. Hieraus folgt $f(1)=6c_1-5c_2=6c_1-15+5c_1=11c_1-15\overset{!}{=}7$. Dies ergibt $11c_1=22$ und damit $c_1=2$ sowie $c_2=3-2=1$. Die gesuchte Abbildung ist also

$$f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{C},\quad m\mapsto 2\cdot 6^m+(-5)^m.$$

Diese Methode lässt sich auf ähnliche Probleme verallgemeinern. Man erhält so die folgende Liste mit allgemeinen Lösungen zu Rekursionsaufgaben:

Rekursionsbedingung	Charakter. Gleichung	Allgemeine Lösung
$f(n+2)+pf(n+1)$ $+qf(n)=0$ mit $p,q\in\mathbb{C}$ (in 18.1: $p=q=-1$)	$x^2+px+q=0$ Lösungen: $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$	$f(m)=c_1x_1^m+c_2x_2^m$, falls $x_1\neq x_2$, und $f(m)=(c_1+c_2m)x_1^m$, falls $x_1=x_2=-\frac{p}{2}$,
$f(n+2)+pf(n+1)$ $+qf(n)=b$ mit $p,q,b\in\mathbb{C}$ und $p+q\neq -1$	$x^2+px+q=0$	$f(m)=c_1x_1^m+c_2x_2^m$ $+\frac{b}{1+p+q}$, falls $x_1\neq x_2$, und $f(m)=(c_1+c_2m)x_1^m$ $+\frac{b}{1+p+q}$, falls $x_1=x_2=-\frac{p}{2}$
$f(n+3)+pf(n+2)$ $+qf(n+1)$ $+rf(n)=0$ mit $p,q,r\in\mathbb{C}$	$x^3+px^2+qx+r=0$ Lösungen: vgl. 18.3	$f(m)=c_1x_1^m+c_2x_2^m$ $+c_3x_3^m$, falls x_1,x_2,x_3 alle verschieden
$f(n+1)-qf(n)=b$ mit $q,b\in\mathbb{C}$ (in 3.1.5: $b=0$)	$x-q=0$ Lösung: $x=q$	$f(m)=\frac{b}{1-q}+cq^m$, falls $q\neq 1$, und $f(m)=bm+c$, falls $q=1$

Die Konstanten $c,c_1,c_2,c_3\in\mathbb{C}$ werden dabei analog wie in 18.1 aus einer entsprechenden Anfangsbedingung bestimmt.

18.3 Kubische Gleichungen

Wie aus der Tabelle in 18.2 hervorgeht, sind bei manchen Rekursionsaufgaben auch *kubische Gleichungen* der Form

$$(*) \qquad x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

mit $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ zu lösen (siehe zum Beispiel Aufgabe 148).
Sind $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ Lösungen von $(*)$, so gilt

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

für alle $x \in \mathbb{C}$. Hat man eine Lösung x_1 von $(*)$ ermittelt, zum Beispiel durch Raten oder Probieren, dann erhält man durch Polynomdivision

$$(x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) : (x - x_1)$$

eine quadratische Gleichung, deren Lösungen x_2 und x_3 ebenfalls Lösungen von $(*)$ sind.

Beispiel. Betrachte $x^3 + x^2 + 4x - 6 = 0$. Man sieht, dass $x_1 = 1$ eine Lösung ist. Bilde

$$\begin{array}{l}
\quad (x^3 + x^2 + 4x - 6) : (x - 1) = x^2 + 2x + 6 \\
-\underline{(x^3 - x^2)} \\
\qquad\quad 2x^2 + 4x \\
\qquad -\underline{(2x^2 - 2x)} \\
\qquad\qquad\quad 6x - 6 \\
\qquad\qquad -\underline{(6x - 6)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Die Gleichung $x^2 + 2x + 6 = 0$ hat nun die Lösungen $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{-5} = -1 \pm \sqrt{5}i \in \mathbb{C}$. Also sind x_1, x_2, x_3 die Lösungen von $x^3 + x^2 + 4x - 6 = 0$ und es gilt

$$x^3 + x^2 + 4x - 6 = (x - 1)(x + 1 - \sqrt{5}i)(x + 1 + \sqrt{5}i).$$

18.4 Aufgaben 147 − 150

Aufgabe 147. Gesucht ist eine Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$, $m \mapsto f(m)$, die $f(0) = 10$, $f(1) = -8$ und

$$f(n + 2) + 4\,f(n + 1) - 5\,f(n) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

erfüllt.

Aufgabe 148. Gesucht ist eine Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$, $m \mapsto f(m)$, die $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$ und

$$f(n+3) + f(n+2) - \frac{1}{4}f(n+1) - \frac{1}{4}f(n) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

erfüllt.

Aufgabe 149. Vorgegeben seien Zahlen $p, q, b \in \mathbb{C}$ und die Rekursionsbedingung

$$f(n+2) + p\,f(n+1) + q\,f(n) = b \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Es gelte $p + q = -1$. Zeigen Sie durch Einsetzen:

a) Ist $q \neq 1$, so erfüllt $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$, $m \mapsto b\frac{m}{1-q}$, die Rekursionsbedingung.

b) Ist $q = 1$, so erfüllt $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$, $m \mapsto b\frac{m(m+1)}{2}$, die Rekursionsbedingung.

Aufgabe 150. In einem Wald befinden sich 117.000 m^3 Nutzholz. Nun werden in jedem Winter 4.500 m^3 Nutzholz geschlagen. Der verbleibende Bestand vermehrt sich bis zum nächsten Winter um 4 %. Bestimmen Sie eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$, $m \mapsto f(m)$, die den Bestand an Nutzholz $f(n)$ unmittelbar vor dem $(n+1)$-ten Einschlag beschreibt.
Hinweis: Ermitteln Sie die passende Rekursionsbedingung und berücksichtigen Sie die Anfangsbedingung $f(0) = 117.000$.

Resultate der Aufgaben

Zur vollständigen Bearbeitung einer Übungsaufgabe gehört ein korrekter Lösungsweg mit nachvollziehbarer Begründung. Hier werden zur Kontrolle nur Endergebnisse aufgelistet, die Lösungswege sind selbst zu entwickeln.

Aufgabe 1: (a) $\frac{76}{99}$ und $\frac{4}{33}$ (b) $-\frac{21}{8}$ und $\frac{7}{24}$

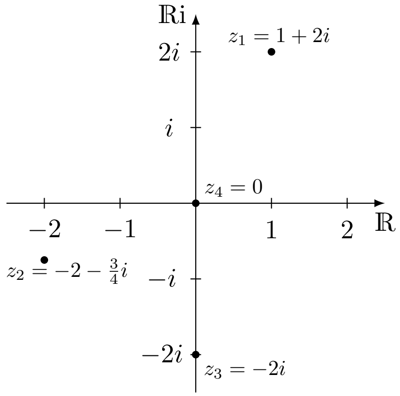
Aufgabe 2 (a) $0,37 < 0,39$ (b) $1,05 > 1,005$ (c) $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$
(d) $-7 < -6$

Aufgabe 3: (a) $y = -\frac{2}{3}$ und $y = \frac{2}{3x} - \frac{2}{3}$

(b) $y = \pm\sqrt{\frac{1}{x^2+2} - 1}$ und $y = \pm\sqrt{\frac{2}{x^2+2} - 1}$

Aufgabe 4 $\approx 1.101\,\mathrm{atm}$

Aufgabe 5



Aufgabe 6 $\frac{-7}{41} + \frac{22}{41}i$ und i sowie $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ und $-i$

Aufgabe 7 (a) $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}\,i$ (b) Probe machen

Aufgabe 8: (a) Salinität des Süßwassers $< 685.000\,\text{km}^3$, Salinität des Salzwassers $47.950.000\ \text{km}^3$ bis $54.800.000\ \text{km}^3$, Salinität des Brackwassers $822.000\ \text{km}^3$ bis $46.580.000\ \text{km}^3$

(b) 2% Cl^- und 1,5% Na^+

(c) $Cl^-_{\text{Tier}} = 6{,}9\,\text{g}$ und $Na^+_{\text{Tier}} = 4{,}05\,\text{g}$

(d) $\approx 1{,}04$.

Aufgabe 9: Die Konzentration kann mit dem Gerät zuverlässig bestimmt werden.

Aufgabe 10: $\alpha_{\text{A,B}} = \dfrac{\delta^{18}\text{O}_{\text{Probe A}} + 1000}{\delta^{18}\text{O}_{\text{Probe B}} + 1000}$

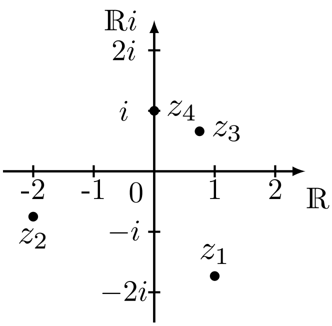
Aufgabe 11: $\frac{b+a}{ab}$ und $\frac{5b+6a}{3a^2b^2}$

Aufgabe 12: a) $\frac{3}{4} = 0{,}75$ b) $-5 < 3$ c) $\sqrt{2} < 1{,}42$ d) $-5 < -1$

Aufgabe 13: $x_{1,2} = 1 \pm 2i$

Aufgabe 14: $x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{4}$

Aufgabe 15:



Aufgabe 16: Vgl. Abschnitt 1.4

Aufgabe 17: a) Abbildung b) keine Abbildung c) Abbildung d) keine Abbildung

Aufgabe 18: a) injektiv, nicht surjektiv b) nicht injektiv, nicht surjektiv

Aufgabe 19: a) $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ b) $u : \mathbb{R}_{\neq 1} \to \mathbb{R}_{\neq 1},\ x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

Aufgabe 20: $f \circ g : \mathbb{R}_{\neq -1} \to \mathbb{R}_{>0},\ x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$ und
$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0},\ x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$.

Aufgabe 21 a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-3n+3}{3n^2-n} = \frac{2}{3}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^5-7n^2+4}{\frac{3}{2}n^5+\sqrt{3}\,n^2+n} = \frac{2}{3}$

b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt, divergiert also. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

Aufgabe 22 a) $2+4+6+8+10+12 = \sum\limits_{k=1}^{6} 2k$ und $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81} = \sum\limits_{k=0}^{4} (\frac{2}{3})^k$

b) Die Reihen konvergieren, da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ für $-1 < q < 1$ konvergiert. Es ist
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 3$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{5}{8}$

Aufgabe 23 a) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$ und $M = 1$

Aufgabe 24 (a) $x_{1,2} = \pm 4$ (b) $x_{1,2} = \pm 2$ (c) $x_{1,2} = \pm 4i$
(d) $x_1 = -4 = x_2$

Aufgabe 25 Norbert: $\approx$ 12.216,71 Euro. Bank: $\approx$ 4.740,67 Euro.

Aufgabe 26: a) 4 b) $\frac{1}{4}$ c) ∞ d) ∞ e) 0 f) 0 g) 0 h) 2

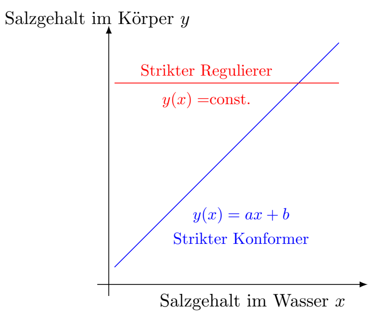
Aufgabe 27: Verwende $\frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} > \frac{1}{2}$.

Aufgabe 28: a) $1 \leqslant \frac{n+n}{n+1} = \frac{2n}{n+1} \xRightarrow{\cdot\frac{1}{n^2}} \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{2}{n(n+1)}$
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ konvergiert für jedes $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

Aufgabe 29 a) $\mathbb{R}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ und } x \neq -1\}$ c) $\mathbb{R}_{\geqslant 2}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 1\}$

Aufgabe 30 $\lim\limits_{x\to -6} \frac{x^2+4x-12}{x^2-36} = \frac{2}{3}$ und $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \frac{x^2+\frac{8}{3}x-1}{x^2-\frac{1}{9}} = 5$

Aufgabe 31 a)



b) $f_R(x) = k$ mit einer Konstanten $k > 0$ und $f_K(x) = ax + b$ mit Konstanten $a, b > 0$

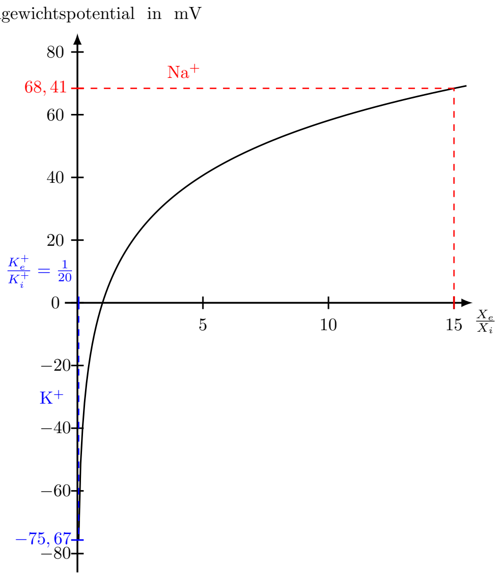
Aufgabe 32 a) 0 b) $-1 - i$ c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ d) i

Aufgabe 33 $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}\,,\ y \mapsto \frac{2}{5e^y}$

Aufgabe 34 a) ungerade b) weder gerade noch ungerade c) gerade d) ungerade

Aufgabe 35 a) $[\mathrm{K}^+]_i = 20[\mathrm{K}^+]_e$ und $[\mathrm{Na}^+]_e = 15[\mathrm{Na}^+]_i$

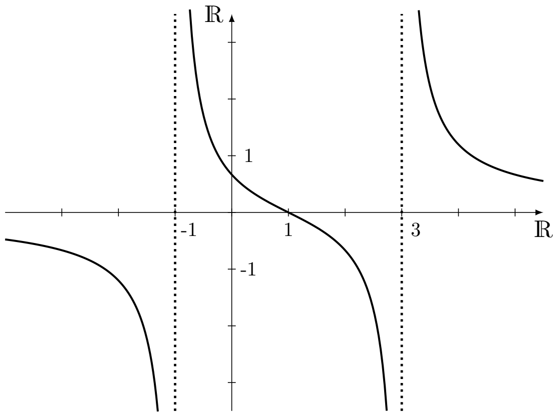
b) $$E_X = \begin{cases} 25{,}26\ \mathrm{mV} \cdot \ln(\frac{1}{20}) \approx -75{,}67\ \mathrm{mV} & \text{für } X = \mathrm{K}^+ \\ 25{,}26\ \mathrm{mV} \cdot \ln(15) \approx 68{,}41\ \mathrm{mV} & \text{für } X = \mathrm{Na}^+ \end{cases}$$



Aufgabe 36 (a) i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ ii) Da $b_n = n + 1$ gilt, ist die Folge unbeschränkt und konvergiert also nicht.

(b) Linke Seite $= \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$ und rechte Seite $= \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)^2 = 4$

Aufgabe 37:



Aufgabe 38: a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ b) $f : \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ und } x \neq \pm 1\} \to \mathbb{R}$ c) $f : \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geqslant 2\} \to \mathbb{R}$ d) $f : \mathbb{R}_{\neq \pm 2} \to \mathbb{R}$

Aufgabe 39: a) -6 b) 1 c) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 0

Aufgabe 40: f ist überall stetig

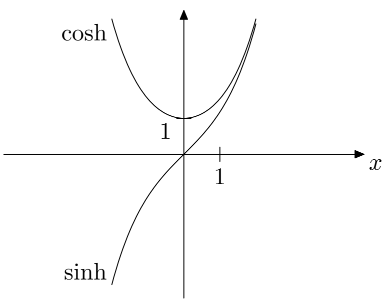
Aufgabe 41: a) nicht monoton b) streng monoton wachsend c) streng monoton wachsend d) streng monoton wachsend

Aufgabe 42: a) ungerade b) ungerade c) gerade d) gerade

Aufgabe 43: a) $u : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto \frac{1}{2x}$ b) $u : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto \frac{1}{3}x^2$

Aufgabe 44: geht so wie angegeben

Aufgabe 45: a)



b) $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ und $\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Aufgabe 46: Einsetzen

Aufgabe 47: (a) ≈ 51.833 (b) ≈ 23 Min. und 27 Sek. (c) ≈ 11 Tage, 12 Std. und 20 Min.

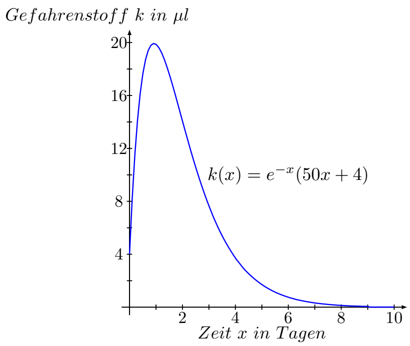
Aufgabe 48: a) $2\sin(x)e^x$ und $-\frac{2}{x^3}$ b) und c) $e^{-x}\left(\frac{1}{1+x^2} - \arctan(x)\right)$

Aufgabe 49: a) $\frac{4}{x}$ b) $-4\sin(4x)\,e^{\cos(4x)}$
c) $\frac{2}{1+e^{4x}}\,e^{2x}$ d) $-\frac{2\cos(\frac{2}{x})}{x^2}$

Aufgabe 50: a) $M'(x) = \frac{ab}{(b+x)^2}$ b) Es ist $M(x) > 0$, da $a, b, x > 0$ nach Voraussetzung. Hieraus folgt $\frac{x}{x+b} < 1$, also $\frac{ax}{x+b} < a$. c) nachrechnen
d) $u_M(y) = \frac{by}{a-y}$

Aufgabe 51: a) Mit y-Achse (0,4), kein Schnittpunkt mit der x-Achse, da $x \geqslant 0$ ist b) $k'(x) = e^{-x}(-50x + 46)$ und $k''(x) = e^{-x}(50x - 96)$ und Maximum bei (x_0, y_0) mit $x_0 = 0{,}92$ und $y_0 \approx 20$.

c)



d) Man berechne z. B. $k(0)$ und $k(0,5)$ sowie $k'(0,5)$ und interpretiere die Ergebnisse.

Aufgabe 52: (a) i) $D = [0, 1]$ ii) $D =]0, 2[$
b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3-4x^2+3x}{x^2-x} = -3$ und $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-4x^2+3x}{x^2-x} = -2$

Aufgabe 53: a) $3x^2 + \frac{2x\cos(2x)-\sin(2x)}{x^2}$
b) Definitionsbereich: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq n\pi \text{ für } n \in \mathbb{Z}\}$. Ableitung: $-\frac{1}{\sin^2(x)}$

Aufgabe 54: a) $\cosh'(x) = \sinh(x)$ und $\sinh'(x) = \cosh(x)$.
b) $\operatorname{arcosh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$ und $\operatorname{arsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$

Aufgabe 55: $u(y)' = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$ und $v(y)' = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$

Aufgabe 56: $-\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$

Aufgabe 57: Definitionsbereich: $\mathbb{R}$. Keine Nullstellen.
Maximum in $x_0 = 0$. Wendestellen in $x = \pm 1$. Es gilt $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.
f ist gerade Funktion.

Aufgabe 58: Für $b \in I$ mit $a < b$ wende man den Mittelwertsatz an auf die Funktion $h_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - \frac{f(b)}{g(b)}g(x)$. Für $c \in I$ mit $c < a$ wende man den Mittelwertsatz an auf die Funktion $h_2 : [c, a] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - \frac{f(c)}{g(c)}g(x)$.

Aufgabe 59 a) 1 b) $\frac{99}{100}e^{100} + \frac{1}{100}$

Aufgabe 60 a) $\frac{1}{29}$ b) 2

Aufgabe 61 a) $y(t) = te^{-\frac{1}{10}t} + 36,8$ b) Nach 10 Stunden war die Temperatur am höchsten und betrug $y(10) \approx 40,48$ Grad Celsius.

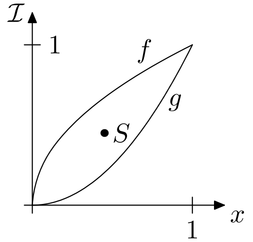
Aufgabe 62 (a) gerade und ungerade (b) gerade und nicht ungerade (c) nicht gerade und ungerade (d) nicht gerade und nicht ungerade

Aufgabe 63: 4,5 und 1,75

Aufgabe 64: 1, $-x\cos(x) + \sin(x) + C$ und
$x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) + C$

Aufgabe 65: $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}\ln(108) - 1$

Aufgabe 66: a)



und $\mathcal{F} = \frac{1}{3}$

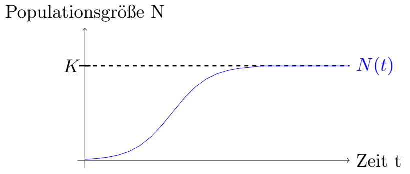
b) $x_s = 0{,}45$ und $y_s = 0{,}45$

Aufgabe 67: a) $\ln(1 - x^2) + C$ b) $-\frac{2}{3}\sqrt[4]{(1 - x^2)^3} + C$

Aufgabe 68: $y(x) = e^{x^2}\big(-\cos(x) + 2\big)$

Aufgabe 69: $y(x) = -\ln(\cos(x) + 2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, da $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$

Aufgabe 70: a) $N(t) = \frac{K}{e^{-r(t+c)}+1}$



b) $\lim\limits_{t\to\infty} N(t) = K$. Die Populationsgröße nähert sich der Umweltkapazitätsgrenze an.

Aufgabe 71: a) $N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_1-\lambda_2}\left(e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}\right)$ b) $N_2(t) = \lambda_1 N_0 t e^{-\lambda_1 t}$

Aufgabe 72: (a) $\cos(\sin(x)) \cdot \cos(x)$ (b) $-2x \cdot e^{-x^2}$
(c) $-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ (d) $\frac{(1+x)^2}{2\sqrt{1+x^2}}\, e^{\frac{x}{2}}$

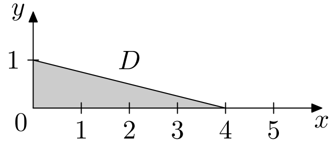
Aufgabe 73: $F(x) = 4\sin^3(x) + 8\sin^2(x) + 8\sin(x) + c$

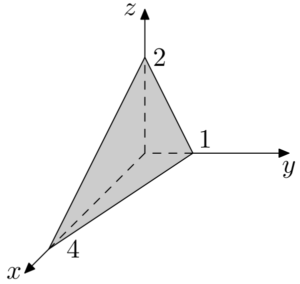
Aufgabe 74: a) $y = e^{\sin(x)}(x+c)$ b) $y = \frac{1}{\cos(x)+c}$

Aufgabe 75: $y = (-\frac{1}{3}(1-x^2) + c\sqrt[4]{1-x^2})^2$

Aufgabe 76: a) $y' = c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 x}$, $y'' = c_1{\lambda_1}^2 e^{\lambda_1 x} + c_2{\lambda_2}^2 e^{\lambda_2 x}$.
b) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$

Aufgabe 77:

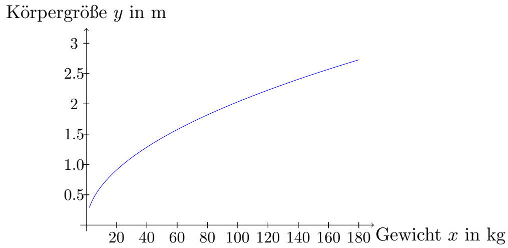




Aufgabe 78: (a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x\cos(y) + e^x\sin(y)$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^x\sin(y) + e^x\cos(y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^x\cos(y) + e^x\sin(y)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -e^x\cos(y) - e^x\sin(y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = -e^x\sin(y) + e^x\cos(y)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = -e^x\sin(y) + e^x\cos(y)$
(b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ae^{ax}\cos(ay)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -ae^{ax}\sin(ay)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = a^2 e^{ax}\cos(ay), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -a^2 e^{ax}\cos(ay),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -a^2 e^{ax}\sin(ay), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -a^2 e^{ax}\sin(ay)$$

Aufgabe 79: a)



b) $b_x := \frac{\partial b}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y^2}$, $b_{xx} := \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(x,y) = 0$,
$b_y := \frac{\partial b}{\partial y}(x,y) = \frac{-2x}{y^3}$, $b_{yy} := \frac{\partial^2 b}{\partial y^2}(x,y) = \frac{6x}{y^4}$,
$b_{yx} := \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-2}{y^3}$, $b_{xy} := \frac{\partial^2 b}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{-2}{y^3}$. Es ist $b_{yx} = b_{xy}$

Aufgabe 80: $\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{c}{P}$, $\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V}{c}$, $\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{cT}{V^2}$

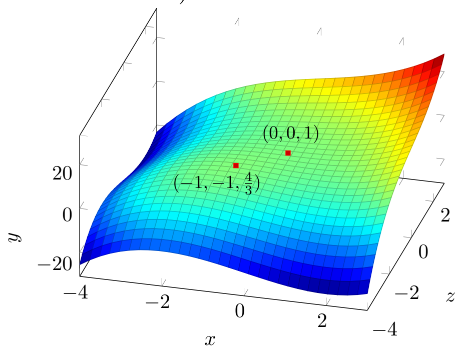
Aufgabe 81: a) i) $\frac{\pi}{18} - \frac{1}{9}$ ii) 1 (b) i) $e-1$ ii) $1-\cos(1)$

Aufgabe 82: $1\sigma\left(\frac{\mathrm{C_{MgO}}}{\mathrm{C_{SiO}}}\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{\mathrm{C_{SiO_2}}} \cdot 1\sigma_{\mathrm{MgO}}\right)^2 + \left(-\frac{\mathrm{C_{MgO}}}{\mathrm{C^2_{SiO_2}}} \cdot 1\sigma_{\mathrm{SiO_2}}\right)^2}$.
Einsetzen der Konzentrationen ergibt $\frac{\mathrm{C_{MgO}}}{\mathrm{C_{SiO_2}}} = 4{,}26 \cdot 10^{-2} \pm 6{,}41 \cdot 10^{-3}$.

Aufgabe 83: Lokales Minimum in $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$

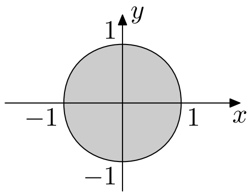
Aufgabe 84: Lokales Maximum in $(0,2)$

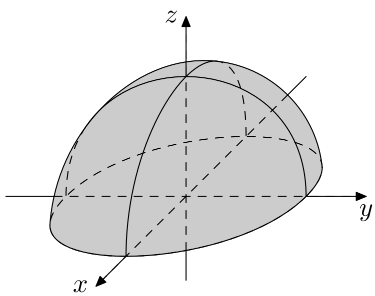
Aufgabe 85: Lokales Maximum in $(-1,-1)$.
Der Höhenunterschied ist $\approx 0{,}33\,\mathrm{km}$. (Der Graph wandert oben rechts ins Unendliche.)



Aufgabe 86: (a) $y(x) = e^x - 1$
(b) Probe bestätigt das Ergebnis aus (a). (c) Nur Typ III

Aufgabe 87:





Aufgabe 88: (a) nicht stetig (b) nicht stetig

Aufgabe 89: $f_x = \frac{1}{y}$, $f_y = -\frac{x}{y^2}$ und $f_x = \frac{2x}{y^2} e^{x^2 y^{-2}}$, $f_y = -\frac{2x^2}{y^3} e^{x^2 y^{-2}}$

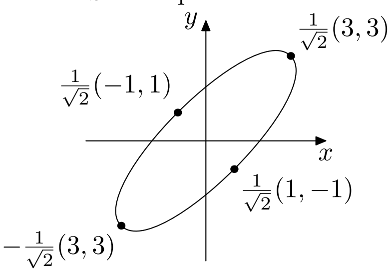
Aufgabe 90: $f_x = 5x^4 + 6x^2y^2$, $f_y = 4x^3y + 10y^4$, $f_{xx} = 20x^3 + 12xy^2$, $f_{yy} = 4x^3 + 40y^3$, $f_{xy} = f_{yx} = 12x^2y$

Aufgabe 91: $f_x = \frac{2y}{(1-xy)^2}$, $f_y = \frac{2x}{(1-xy)^2}$, $f_{xx} = \frac{4y^2}{(1-xy)^3}$, $f_{yy} = \frac{4x^2}{(1-xy)^3}$, $f_{xy} = f_{yx} = \frac{2(1+xy)}{(1-xy)^3}$

Aufgabe 92: f hat lokales Minimum in $(1, 1)$

Aufgabe 93: f hat lokales Minimum in $(2, -1)$

Aufgabe 94: Die Scheitelpunkte sind:



Aufgabe 95: f hat lokales Maximum in $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$

Aufgabe 96: $20 \cdot 20 \cdot 20$ ist maximal

Aufgabe 97: $2 \cdot |ab|$

Aufgabe 98: f hat in (x, x) für alle $x \in \mathbb{R}$ ein lokales Minimum

Aufgabe 99 $AB = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 11 \\ 5 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $\det(AB) = 400$ sowie $\det(A) = 20$ und $\det(B) = 20$

Aufgabe 100 $\det(A) = -10$ und $A^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 4 & -14 \\ 5 & 0 & -5 \\ -6 & -6 & 16 \end{pmatrix}$

Aufgabe 101 a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
(auch die transponierten Matrizen sind möglich)
b) $AB = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ und $BA = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, also $AB \neq BA$
c) $\det(A) = 0$, also A nicht invertierbar,
und $\det(B) = 1$, also B invertierbar.
d) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, also $\det(A + B) = 3$ und $\det(A) + \det(B) = 1$

Aufgabe 102 (a) $\cos\left(\frac{x}{1+y^2}\right) \cdot \frac{1}{1+y^2}$ (b) $\cos\left(\frac{x}{1+y^2}\right) \cdot \frac{-2xy}{(1+y^2)^2}$
(c) $\sin\left(\frac{x}{1+y^2}\right) \cdot \frac{2xy}{(1+y^2)^3} - \cos\left(\frac{x}{1+y^2}\right) \cdot \frac{2y}{(1+y^2)^2}$
(d) $\sin\left(\frac{x}{1+y^2}\right) \cdot \frac{2xy}{(1+y^2)^3} - \cos\left(\frac{x}{1+y^2}\right) \cdot \frac{2y}{(1+y^2)^2}$

Aufgabe 103: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 12 & -2 \\ -8 & -4 & 2 & 22 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 0 & -4 \\ 12 & 2 \\ -2 & 22 \end{pmatrix}$

Aufgabe 104: a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 105: $\begin{pmatrix} 6 & -10 \\ 9 & -15 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & -10 \\ 9 & -15 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 106: $AB \neq BA$ ${}^tA \cdot {}^tB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 0 \\ -16 & 26 & 10 & 0 \end{pmatrix}$

$$ {}^tB \cdot {}^tA = {}^t(AB) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 10 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -54 & -96 \\ 0 & 0 & 0 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} $$

$$ A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -540 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -8 & 50 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ B^3 = \begin{pmatrix} 1 & -9 & -21 & 84 \\ 0 & 1 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

Aufgabe 107: $A\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\vec{e_3} = \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix},$

$$ A\vec{x} = \begin{pmatrix} 9x_2 - 15x_3 \\ -6x_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B\vec{e_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B\vec{e_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, $$

$$ B\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 - x_3 \\ x_2 + 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (\alpha \circ \beta)(\vec{x}) = \gamma(\vec{x}) \text{ für alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^3 $$

Aufgabe 108: $\det(AB) = 200, \quad \det(A) = 10 \quad$ und $\quad \det(B) = 20$

Aufgabe 109: $\det(A) = -20$

Aufgabe 110: Geht zum Beispiel durch Entwickeln nach der ersten Spalte.

Aufgabe 111: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 112 $-A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -5 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 113 $\det(A) = -3, \quad x_1 = -5, \ x_2 = 5$ und $x_3 = 3$

Aufgabe 114 a)

$$ \begin{array}{rrcrcrcrcl} C: & 6 \cdot a & + & 0 \cdot b & - & 1 \cdot c & - & 0 \cdot d & = & 0 \\ O: & 6 \cdot a & + & 2 \cdot b & - & 2 \cdot c & - & 1 \cdot d & = & 0 \\ H: & 12 \cdot a & + & 0 \cdot b & - & 0 \cdot c & - & 2 \cdot d & = & 0 \end{array} $$

Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $b = c = d = \lambda$ und $a = \frac{1}{6}\lambda$ eine Lösung des Systems.

b) Die Lösungsmenge ist $L = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

c) Für $\lambda = 6$ sind $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Die Reaktionsgleichung lautet
$C_6\, H_{12}\, O_6 + 6\, O_2 \to 6\, CO_2 + 6H_2O$.

Aufgabe 115 Lokales Minimum in $(1, -\sqrt{2})$, lokales Maximum in $(-1, \sqrt{2})$. (Die Punkte $(1, \sqrt{2})$ und $(-1, -\sqrt{2})$ sind keine Extremalstellen.)

Aufgabe 116: Zu lösen ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{Ton} - \text{k}_1 \cdot \text{Lehm} &= 0\, t \\ \text{Ton} - \text{k}_2 \cdot \text{Sand} &= 0\, t \\ \text{Ton} - \text{k}_3 \cdot \text{Kies} &= 0\, t \\ \text{Ton} + \text{Lehm} + \text{Sand} + \text{Kies} &= \frac{18}{1,08}\, t \end{aligned}$$

Aufgabe 117: a) Mit der Cramerschen Regel findet man: L_1 und L_2 schneiden sich im Punkt $(\frac{17}{33}, \frac{76}{33})$.
b) Da $\det(A) = 0$ ist, kann man hier nicht die Cramerschen Regel anwenden. Durch eine geschickte Zeilenumformung findet man: $L_1 = L_2$
c) Das System hat keine Lösung (warum?), die Geraden L_1 und L_2 sind also parallel.

Aufgabe 118: In a) und b) ist $\vec{x} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ die Lösung.

Aufgabe 119: $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -6 & -2 & 5 \\ -5 & -5 & 5 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 120: Das Gleichungssystem besitzt keine Lösung. Die Lösungsmenge ist also gleich der leeren Menge.

Aufgabe 121 Der Schnittpunkt ist $(x, y) = (6, 15)$.

Aufgabe 122 Ein Büffel kostet 1200 Münzen, ein Hammel kostet 500 Münzen und ein Schwein kostet 300 Münzen.

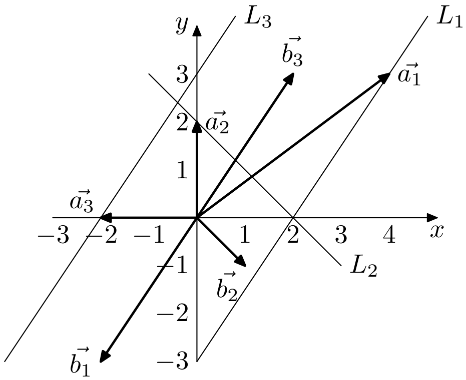
Aufgabe 123 Jede Lösung hat die Form

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 124 Für $t \neq 1, -2$ liegt nur $\vec{v} = \vec{0}$ in der Menge. Im Fall $t = 1$ besteht die Menge aus Elementen der Form
$\vec{v} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Im Fall $t = -2$ besteht die Menge aus Elementen der Form $\vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

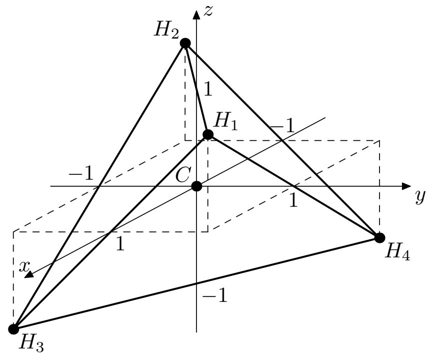
Aufgabe 125 Für genügend großes $k \in \mathbb{N}$ hat mindestens eine der beiden Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := a + \frac{1}{n^k}$ oder $x_n := a - \frac{1}{n^k}$ die gewünschten Eigenschaften. Man überlege sich also dafür, dass alle Folgenglieder in I liegen und dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt.

Aufgabe 126: Parallele Geraden können mit dem gleichen Richtungsvektor geschrieben werden.



Aufgabe 127: Einfach ausrechen.

Aufgabe 128: a) Tetraeder



b) Jedes H-Atom hat den Abstand $\sqrt{3}$ zu C. Der Abstand zwischen je zwei H-Atomen ist $2\sqrt{2}$.

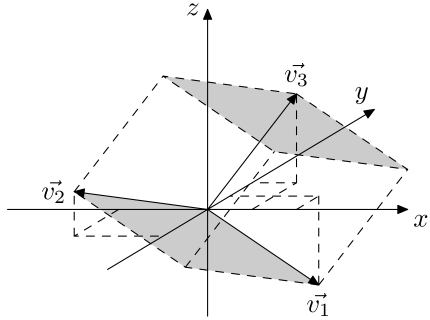
Aufgabe 129: Es gilt $\|P_i - P_j\| = 1$ für $i \neq j$. Die zu P_1, P_2, P_3, P_4 gehörenden Ortsvektoren bilden alle den gleichen Winkel φ miteinander, der durch $\cos(\varphi) = -\frac{1}{3}$ gegeben ist, also $\varphi \approx 1,9106$ (Bogenmaß).

Aufgabe 130: Die Vektoren stehen paarweise senkrecht aufeinander und $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ sind mit $\|\vec{v_1}\| = \sqrt{5}, \|\vec{v_2}\| = \sqrt{6}, \|\vec{v_3}\| = \sqrt{30}$ zu normieren.

Aufgabe 131: Einfach die orthonormale Eigenschaft aus 15.5 überprüfen. Für $\vec{v_1} \cdot (\vec{v_2} \times \vec{v_3})$ berechne $\vec{v_2} \times \vec{v_3} = \vec{v_1}$

Aufgabe 132: $\vec{e_1} \times (\vec{e_1} \times \vec{e_2}) = -\vec{e_2}, \quad (\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) \times \vec{e}_2 = \vec{0}$

Aufgabe 133: Das Volumen des Spats ist $\frac{1}{9}$.



Aufgabe 134 a) linear b) nicht linear c) linear d) nicht linear

Aufgabe 135 $(1, 0, \pi, \sqrt{2})$

Aufgabe 136 Seien $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$, $\vec{w'} = \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix}$

a) Berechne $\vec{v}\cdot(\vec{w}+\vec{w'}) = v_1(w_1+w'_1)+v_2(w_2+w'_2)+v_3(w_3+w'_3) = \cdots$ und $\vec{v}\cdot(\lambda\vec{w}) = v_1(\lambda w_1)+v_2(\lambda w_2)+v_3(\lambda w_3) = \cdots$

b) Berechne $\vec{v}\times(\vec{w}+\vec{w'}) = \begin{pmatrix} v_2(w_3+w'_3)-v_3(w_2+w'_2) \\ v_3(w_1+w'_1)-v_1(w_3+w'_3) \\ v_1(w_2+w'_2)-v_2(w_1+w'_1) \end{pmatrix} = \cdots$ und

$\vec{v}\times(\lambda\vec{w}) = \begin{pmatrix} v_2(\lambda w_3)-v_3(\lambda w_2) \\ v_3(\lambda w_1)-v_1(\lambda w_3) \\ v_1(\lambda w_2)-v_2(\lambda w_1) \end{pmatrix} = \cdots$

Aufgabe 137 $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\cos(\varphi)\lambda + 1$ für $\varphi \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist $\lambda = 1$ Nullstelle/Eigenwert und für $\varphi \in \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist $\lambda = -1$ Nullstelle/Eigenwert

Aufgabe 138 Eigenwerte 0 und 2 Eigenvektoren $t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 0 und $t\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 2 (für alle $t \neq 0$)

Aufgabe 139: 720

Aufgabe 140: 126

Aufgabe 141: 84

Aufgabe 142: 32

Aufgabe 143: 80 und 3322

Aufgabe 144: 10

Aufgabe 145: 34.650

Aufgabe 146: a) 12 b) 450.450

Aufgabe 147: $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C},\ m \mapsto 7 + 3\cdot(-5)^m$

Aufgabe 148: $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C},\ m \mapsto (-1)^m + \left(\frac{1}{2}\right)^m - \left(-\frac{1}{2}\right)^m$

Aufgabe 149: geht tatsächlich durch Einsetzen

Aufgabe 150: $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C},\ m \mapsto 117.000$

Symbolverzeichnis

$\Longrightarrow$	folgt
$\Longleftrightarrow$	genau dann, wenn
$m \in M$	m ist Element der Menge M
$M \subset N$	M ist Teilmenge von N (d.h. $m \in M \implies m \in N$)
∞	Zeichen für „unendlich“
$a \leqslant b$	a ist kleiner oder gleich b
$a < b$	a ist kleiner als b
$A := B$	A ist nach Definition gleich B

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ natürliche Zahlen, $\mathbb{N}_0$ natürliche Zahlen und 0
$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ ganze Zahlen
$\mathbb{Q}$ rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$ Reelle Zahlen
$\mathbb{R}_{>a} := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ für festes $a \in \mathbb{R}$, analog $\mathbb{R}_{<a}$, $\mathbb{R}_{\geqslant a}$, $\mathbb{R}_{\leqslant a}$ und $\mathbb{R}_{\neq a}$
$[a, b[\; := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ halboffenes Intervall mit $a, b \in \mathbb{R}$ (oder $b = \infty$)
$]a, b[\; := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ offenes Intervall mit $a, b \in \mathbb{R}$ (oder $\mp\infty$)
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ abgeschlossenes Intervall mit $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$
I Intervall in $\mathbb{R}$
$|a|$ Betrag einer Zahl $a \in \mathbb{R}$
π Kreiszahl $\approx 3{,}141592653$
e Eulersche Zahl $\approx 2{,}718281828$

$\mathbb{C}$ komplexe Zahlen
i imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$
$\Re(z)$ und $\Im(z)$ Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl z
$\bar{z} := r - si$ die zu $z = r + si$ mit $r, s \in \mathbb{R}$ konjugiert komplexe Zahl

$\rightarrow$ Abbildungszeichen oder Reaktionspfeil
$\mapsto$ wird abgebildet auf

$\frac{df}{dx}$, f' Ableitung, $\frac{\partial f}{\partial x}$ partielle Ableitung, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ Ableitung nach der Zeit t
$F(x)\big|_a^b := F(b) - F(a)$

$\vec{a}$ Vektor a, $\vec{0}$ Nullvektor

Griechisches Alphabet erstellt von Silke und Anke Pohl

Literaturverzeichnis

[1] Benno Artmann *Lineare Algebra.* Birkhäuser Skripten, 1991

[2] E. Batschelet *Einführung in die Mathematik für Biologen.* Springer-Verlag, 1980

[3] Ingrid Bauer *Mathematik für Biologen und Geologen.* Handschriftl. Manuskript, 2001

[4] Gabriel Cramer *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques.* Genf 1750

[5] H. Dallmann, K.-H. Elster *Einführung in die höhere Mathematik.* Uni-Texte, Vieweg-Verlag, 1968

[6] Otto Forster *Analysis 1.* 11. Auflage, Springer Spektrum, 2013

[7] Otto Forster *Analysis 2.* 11. Auflage, Springer Spektrum, 2013

[8] Josef Hainzl *Mathematik für Naturwissenschaftler.* Teubner, 1981

[9] Harro Heuser *Lehrbuch der Analysis, Teil 2.* Teubner, 1988

[10] Harro Heuser *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* 5. Auflage, Teubner 2006

[11] Ina Kersten *Mathematische Grundlagen in Biologie und Geowissenschaften.* Universitätsdrucke Göttingen 2003 und 2004.

[12] K. Meyberg, P. Vachenauer *Höhere Mathematik 1.* Springer, 2001

[13] Meyberg, K. & Vachenauer, P.: *Höhere Mathematik 2.* 4. korr. Auflage, Springer 2001

[14] B. Rensch (Hrg.) *Biologie 2.* Fischer Lexikon 1963

[15] A. Riede *Mathematik für Biologen.* Vieweg, 1993

[16] Winfried Scharlau *Mathematik in Biologie und Geowissenschaften.* Münsteraner Einführungen: Mathematik, Informatik 2, 2000

[17] Herbert Vogt *Grundkurs Mathematik für Biologen.* Teubner, 1994

[18] Sebastian Vollmer und Ole Riedlin *Einführung in die Hochschulmathematik.* Cuvillier Verlag Göttingen, 2002

[19] Hans-Joachim Vollrath & Hans-Georg Weigand *Algebra in der Sekundarstufe.* 3. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, 2009

[20] H. Winter *Mathematisches Grundwissen für Biologen.* Bibliogr. Institut, 1993

[21] H. Behncke *Mathematik für Biologen I.* Vorlesungsskript, 2004/05, `https://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/fileadmin/mathematik/downloads/2004-2005_bio1_behncke.pdf` (Stand: 19.02.2015)

Literatur zu den neuen Anwendungsaufgaben im Kurs 2014/2015

[22] *Ökologie · Evolution.* Taschenlehrbuch Biologie. Hrsg. Katharina Munk. Thieme Verlag, 2009

[23] Annika Schachtebeck und Anita Schöbel. *Mathematik in der Biologie.* Springer-Verlag, 2014 (Vorab-Online-Version)

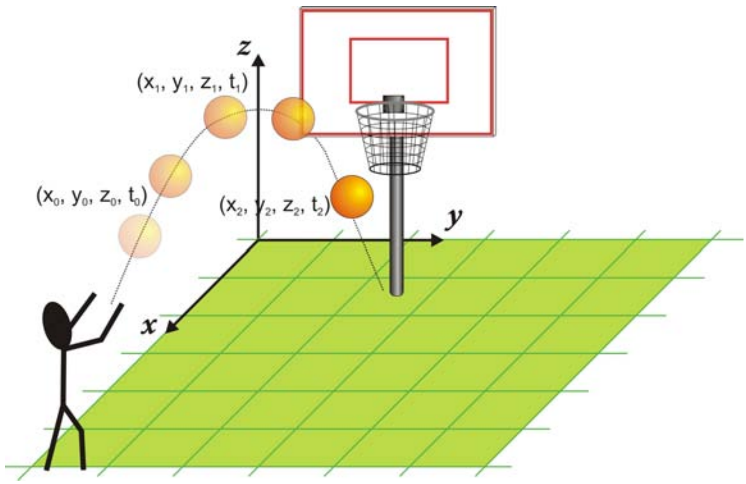
[24] Abituraufgabe (Fieberaufgabe) `http://nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/AnalysisTeil2pdf/BeschraenktesWachstum2.pdf`

Abbildungsnachweis

Die Portraits der Mathematiker CANTOR, DESCARTES, RIEMANN, GAUSS, FIBONACCI, LAGRANGE, J. BERNOULLI, RICCATI, SCHWARZ, HESSE, LAPLACE, G. CRAMER, CAUCHY und PASCAL sind der mathematikgeschichtlichen Website `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/` entnommen.
Der Kupferstich „Melencolia“ von A. Dürer ist aus Wikimedia Commons `http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Melencolia_I_(Durero).jpg` Stand: 19.02.2015

Index

Die vierte Dimension Ein Ball wird von einem bestimmten Punkt im Raum aus geworfen und bewegt sich z.B. in die Richtung eines Korbes. Seine Bahnkurve kann dann durch die Angabe von vier Variablen beschrieben werden: Den drei Raumrichtungen x, y und z und der Zeit t, zu der er sich an der Stelle (x, y, z) befindet.



Die Mathematik hat als eine der ältesten Wissenschaften in Theorie und Anwendung eine mehrtausendjährige Geschichte. Sie hat großen Einfluss auf die Naturwissenschaften. In diesem Universitätsdruck werden mathematische Grundlagen für Studierende der Biologie und der Geowissenschaften des ersten Semesters bereitgestellt. Der Umfang ist darauf zugeschnitten, dass der Stoff in einer zweistündigen Vorlesung präsentiert werden kann, aber auch in einer vierstündigen Vorlesung. Die dann zusätzlich benötigten Kapitel sind mit dem Zusatz „ergänzend" gekennzeichnet. Es werden viele Beispiele ausführlich durchgerechnet, und dazu gibt es auch viele Aufgaben zum Üben.

GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT
GÖTTINGEN

ISBN: 978-3-86395-227-3

Universitätsdrucke Göttingen