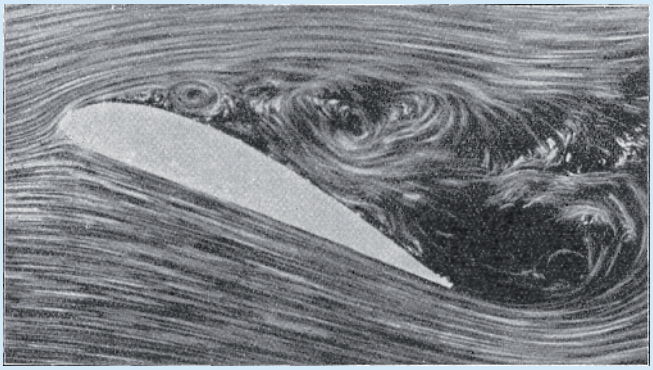
Göttinger Klassiker der Strömungsmechanik Bd. 10
herausgegeben von Andreas Dillmann

Ludwig Prandtl

Abriß der Strömungslehre



Universitätsverlag Göttingen

Ludwig Prandtl

Abriß der Strömungslehre

Dieses Werk ist lizenziert unter einer
Creative Commons
Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen
4.0 International Lizenz.

erschienen als Band 10 in der Reihe „Göttinger Klassiker der Strömungsmechanik“ im Universitätsverlag Göttingen 2017

Ludwig Prandtl

Abriß der Strömungslehre

Zweite Auflage

Universitätsverlag Göttingen
2017

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

Herausgeber der Reihe „Göttinger Klassiker der Strömungsmechanik“:
Prof. Dr. rer.nat. Dr.-Ing.habil. Andreas Dillmann
(Georg-August-Universität Göttingen und
Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt)

Schriftleitung der Reihe „Göttinger Klassiker der Strömungsmechanik“:
Prof. Dr. rer. nat. Martin Rein
(Georg-August-Universität Göttingen und
Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt)

Nachdruck der zweiten Auflage (Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1935)

Dieses Buch ist auch als freie Onlineversion über die Homepage des Verlags sowie über den Göttinger Universitätskatalog (GUK) bei der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen (http://www.sub.uni-goettingen.de) erreichbar.
Es gelten die Lizenzbestimmungen der Onlineversion.

Digitalisiert durch das Göttinger Digitalisierungszentrum (GDZ)
Titelabbildung: Gesunde und abgerissene Flügelströmung (vgl. Abb. 134 und 135)

© 2017 Universitätsverlag Göttingen
https://univerlag.uni-goettingen.de
ISBN: 978-3-86395-271-6
ISSN: 1863-1088

Vorwort

Der 1931 und 1935 in zwei Auflagen erschienene „Abriß der Strömungslehre“ ist der Vorläufer von Ludwig Prandtls weltbekanntem Lehrbuch „Führer durch die Strömungslehre“, das in zahlreiche Sprachen übersetzt wurde und bis heute permanent aktualisiert und neu aufgelegt wird (13. Auflage 2012). Warum also der Nachdruck des nunmehr 85 Jahre alten Vorläufers dieses Klassikers, wo doch der Stoffumfang viel geringer ist und die Lehrinhalte nicht an allen Stellen neuesten Standards entsprechen?

Die Antwort auf diese Frage liegt in der einzigartigen Fähigkeit Ludwig Prandtls, komplizierte physikalische Sachverhalte knapp und präzise in einer klaren, schnörkellosen Sprache darzustellen, ohne sich dabei komplizierter mathematischer Ableitungen zu bedienen. Der Leser wird so systematisch dazu angeleitet, sich zuerst die wesentlichen physikalischen Mechanismen eines strömungsmechanischen Problems anschaulich klarzumachen, bevor er an dessen mathematische Behandlung geht. Der „Abriß der Strömungslehre“, der die bis heute gültigen Grundlagen der Strömungsmechanik in unübertroffen kompakter Form darstellt, ist die geradezu perfekte Umsetzung dieses didaktischen Prinzips.

Der „Führer durch die Strömungslehre“ ist hingegen das Resultat zahlreicher Erweiterungen und Überarbeitungen, bedingt durch die Notwendigkeit, das Lehrbuch stets auf dem aktuellen Stand der Wissenschaft zu halten. Prandtl selbst hat diese Aufgabe noch für die ersten vier Auflagen zwischen 1942 und 1956 durchge-

führt, wobei es auf nahezu den doppelten Umfang angewachsen ist. Nach seinem Tod haben seine ehemaligen Mitarbeiter Klaus Oswatitsch und Karl Wieghardt bis zur 9. Auflage 1990 diese Aufgabe übernommen*, wobei sie die grundlegenden Teile des Lehrbuchs im Wesentlichen unverändert ließen und bei den neu hinzugekommenen Inhalten strikt darauf geachtet haben, Prandtls didaktischem Stil und seiner klaren Diktion so nahe wie möglich zu kommen.

Leider ist dieses erfolgreiche Prinzip in den nachfolgenden Auflagen durchbrochen worden, wofür es gute Gründe geben mag. Schlägt man jedenfalls die aktuelle Auflage des „Führers durch Strömungslehre" auf, so ist darin nur noch wenig zu finden, was aus Ludwig Prandtls Feder stammt oder wenigstens stammen könnte.

Von dem berühmten Mathematiker Niels Henrik Abel stammt das Zitat „Ich habe die vorderste Linie rasch erreicht, weil ich die Meister und nicht ihre Schüler studiert habe". Hierzu möchte der vorliegende Band der „Göttinger Klassiker" Gelegenheit geben.

Göttingen, im Dezember 2016 Andreas Dillmann

* unter Mitarbeit von Wilhelm Dettmering, Dietrich Küchemann, Hubert Ludwieg, Wilhelm Schneider, Jürgen Sündermann, Julius Rotta und Friedrich Wippermann

L. Prandtl.

Abriß der Strömungslehre

von

Dr. Ludwig Prandtl
Professor an der Universität Göttingen und Direktor
des Kaiser Wilhelm-Instituts für Strömungsforschung

Zweite Auflage

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1935

Mit 221 Abbildungen

Alle Rechte vorbehalten

Printed in Germany

Vorwort zur ersten Auflage.

Das vorliegende kleine Buch hatte einen Vorläufer in dem „Abriß der Lehre von der Flüssigkeits- und Gasbewegung", der 1913 bei Gustav Fischer in Jena als Sonderausgabe von zwei Artikeln aus dem Handwörterbuch der Naturwissenschaften erschien (Artikel „Flüssigkeitsbewegung" und „Gasbewegung" in Band IV dieses Werkes). Als dieses Büchlein, das mehr und mehr Anklang gefunden hatte, vergriffen war, und ich mit der Neubearbeitung des Textes beschäftigt war, wurde ich ersucht, für die neue Auflage des Mechanikbandes des Physiklehrbuchs von Müller-Pouillet die Kapitel über Gleichgewicht und Bewegung der Flüssigkeiten und Gase zu bearbeiten. Die Verlagsbuchhandlung Gustav Fischer, die auch die zweite Auflage des Abrisses als abseits von ihrer sonstigen Arbeitsrichtung liegend abzugeben geneigt war, genehmigte ausdrücklich die Verwendung des früheren Textes für den Beitrag zum „Müller-Pouillet". Allerdings war die Tendenz nun eine ganz andere: früher knappste Zusammenfassung des Stoffes auf engem Raum, hier möglichst leicht verständliche Darlegung ohne wesentliche Raumbeschränkung. So ergab es sich, daß doch weitaus das Meiste neu hat geschrieben werden müssen. Die „Gasbewegung mit wesentlicher Volumenänderung" trat dabei stark zurück, da sie im Wärmeband des Müller-Pouillet von einem anderen Verfasser ausführlich behandelt worden war.

Trotzdem in der Zwischenzeit eine recht reichhaltige Literatur auf dem Gebiet erwachsen war, während 1913 der alte Abriß noch allein auf weiter Flur stand, habe ich doch an dem Gedanken einer Neuherausgabe des Abrisses festgehalten, da ich denke, daß eine bequem lesbare und in ihrer Kürze übersichtliche Darstellung unter Zurückdrängung der formelmäßigen Darstellung auch weiterhin erwünscht sein mag. Der Text ist zu einem großen Teil aus dem Beitrag zum „Müller-Pouillet" übernommen, ist aber für den Abriß noch einmal von neuem bearbeitet und ergänzt worden; vor allem sind die in der Zwischenzeit neu hinzugekommenen Ergebnisse, so gut es ging, noch eingearbeitet. Die Gasbewegungen mit wesentlicher Volumenänderung sind wieder entsprechend dem früheren Umfang berücksichtigt worden.

Mathematische Ausdrucksweise läßt sich, will man bei dem vorliegenden Gegenstand sich einigermaßen klar ausdrücken, nicht ganz vermeiden. Zur Erleichterung der Leser ist im Text zwischen gewöhnlichem Druck und Kleindruck unterschieden. Die schwierigeren mathematischen

Formulierungen und andererseits auch kritische Bemerkungen sind in den Kleindruck verwiesen und können beim ersten Lesen des Buches auch ruhig überschlagen werden.

Aus Ersparnisgründen sind Figuren aus verschiedenen Quellen, so aus dem Handwörterbuch und aus den früheren Auflagen des „Müller-Pouillet", verwendet. Ich hoffe, daß die Leser sich nicht allzuviel durch die Uneinheitlichkeit der Abbildungen stören lassen. Vielleicht wird es einmal in wirtschaftlich günstigeren Zeiten möglich werden, bei einer Neuauflage das ganze Bildmaterial einheitlich zu gestalten.

Der Weg über das Physiklehrbuch hat auch sonst gewisse Spuren hinterlassen, so z. B., daß bei der Behandlung der Aufgaben über Strömung durch Rohre der Rohrradius r statt des bei den Ingenieuren üblichen Rohrdurchmessers d auftritt. Auch die Art der Zitate ist meist die bei den Physikern übliche — z. B. **29**, 367, 1925 —, während mir selbst die bei den Ingenieuren übliche — Bd. 29 (1925), S. 367 — sympathischer ist.

Dem Buch ist ein alphabetisches Namens- und Sachverzeichnis und ein Literaturführer beigegeben. Zu dem ersteren bemerke ich, daß bezüglich der Eigennamen keine Vollständigkeit angestrebt ist, im besonderen sind nur Eigennamen aus dem Text, nicht aus den Fußnoten, aufgenommen. Der Literaturführer, der sich auf Erscheinungen der letzten zehn Jahre beschränkt, beansprucht ebenfalls keine Vollständigkeit, sondern soll nur Hinweise vermitteln, welche Bücher der einzelne Leser je nach seinen Sonderwünschen nach Studium des Abrisses weiter zu Rate ziehen soll.

Göttingen, im Oktober 1931.

L. Prandtl.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die freundliche Aufnahme, die der Abriß der Strömungslehre bei der Fachwelt gefunden hat, machte eine Neuauflage nötig. Da ein Bedürfnis für größere Änderungen des Textes zur Zeit noch nicht vorzuliegen scheint, haben Verfasser und Verlag sich darauf geeinigt, einen im wesentlichen unveränderten Nachdruck der ersten Auflage zu veranstalten. Dabei ist jedoch eine Reihe von Druckfehlern ausgemerzt worden. Eine größere Berichtigung, die durch neuere Versuchsergebnisse erforderlich wurde, befindet sich auf S. 134. Das Literaturverzeichnis ist durch Angabe von in der Zwischenzeit neu erschienenen Büchern ergänzt worden.

Göttingen, im Mai 1935.

L. Prandtl.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt:

Eigenschaften der Flüssigkeiten und Gase. Gleichgewichtslehre.

		Seite
§ 1	Eigenschaften der Flüssigkeiten	1
§ 2.	Lehre vom Spannungszustand	2
§ 3.	Der Flüssigkeitsdruck	5
§ 4.	Druckverteilung in einer Flüssigkeit bei Nichtberücksichtigung der Schwere	6
§ 5.	Eigenschaften der Gase	7
§ 6.	Gleichgewicht einer schweren Flüssigkeit	10
§ 7	Gleichgewicht eines schweren Gases	13
§ 8.	Wechselwirkung von Luftdruck und Flüssigkeitsdruck. Flüssigkeitsmanometer	16
§ 9.	Unterdruck. Barometer	18
§ 10.	Flüssigkeitsgleichgewicht bei anderen Kraftfeldern	20

Zweiter Abschnitt.

Kinematik der Flüssigkeiten. Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit.

Vorbemerkung		24
§ 1.	Darstellungsmittel	25
§ 2.	Kontinuität	28
§ 3.	Kräfte in einer strömenden Flüssigkeit. Bernoullische Druckgleichung	30
§ 4.	Folgerungen aus der Bernoullischen Gleichung	35
§ 5.	Weitere Ausführungen über den Flüssigkeitsdruck	38
§ 6.	Zusammenfluß zweier Flüssigkeitsströme. Trennungsflächen. Wirbelbildung	42
§ 7.	Weiteres über Trennungsflächen. Druckmessung	45
§ 8.	Verfeinerte Betrachtungen über die Bewegungen einer homogenen reibungslosen Flüssigkeit. Potentialströmung	47
§ 9.	Weiteres über Potentialbewegung	52
§ 10.	Potentialströmung mit Zirkulation; Tragflügelauftrieb; Magnuseffekt	58
§ 11.	Drehende Bewegung einer reibungsfreien Flüssigkeit. Wirbelfäden	62
§ 12.	Impulssätze für stationäre Bewegungen	66
§ 13.	Weitere Beispiele zu den Impulssätzen	70
§ 14.	Impulssatz für Strömungen mit Geschwindigkeitsschwankungen	73
§ 15.	Wellen auf einer freien Flüssigkeitsoberfläche	74
§ 16.	Verhalten des Wassers in offenen Gerinnen	80

Dritter Abschnitt.

Bewegung zäher Flüssigkeiten; Turbulenz; Widerstände; Technische Anwendungen.

§ 1.	Zähigkeit (innere Reibung)	83
§ 2.	Mechanische Ähnlichkeit; Reynoldssche Zahl	86
§ 3.	Bewegung von Körpern in zähen Flüssigkeiten. Stokessche Formel. Grenzschichten	88
§ 4.	Turbulenz	91
§ 5.	Einzelheiten turbulenter Strömungen	95
§ 6.	Wirbelbildung	100
§ 7.	Verhütung der Wirbelbildung	103

Seite
§ 8. Strömungen mit überwiegender Zähigkeit 106
§ 9. Strömung durch gerade Röhren und Kanäle von gleichbleibendem Querschnitt 115
§ 10. Strömung durch Kanäle mit Querschnittsänderungen 121
§ 11. Widerstand von Körpern in Flüssigkeit 125
§ 12. Der Flüssigkeitswiderstand in der hydrodynamischen Theorie . . . 130
§ 13. Experimentelle Feststellungen über den Flüssigkeitswiderstand 134
§ 14. Tragflügel 139
§ 15. Tragflügeltheorie 146
§ 16. Praktische Anwendung der Tragflügeltheorie; Bestätigung durch den Versuch 150
§ 17. Propeller 154
§ 18. Weiteres über Schraubenpropeller; Windmühlen . . 160
§ 19. Strömungsmaschinen 165
§ 20. Hydrodynamisches und aerodynamisches Versuchswesen . 171

Vierter Abschnitt.

Strömung mit erheblichen Volumenänderungen (Gasdynamik).

Vorbemerkung 180
§ 1. Druckfortpflanzung. Schallgeschwindigkeit 181
§ 2. Stationäre Strömungen bei erheblichen Volumenänderungen in eindimensionaler Behandlung 185
§ 3. Energiesatz für Strömungen mit Widerständen 191
§ 4. Theorie des geraden Verdichtungsstoßes 193
§ 5. Strömung mit Widerständen 197
§ 6. Mehrdimensionale Behandlung der Überschallströmung. Strömung um eine Ecke. Gasstrahlen 199
§ 7. Allgemeines Näherungsverfahren für zweidimensionale Überschallströmungen 203
§ 8. Betrachtungen über Strömungen mit Unterschallgeschwindigkeit . 206
§ 9. Bewegung von Körpern mit Überschallgeschwindigkeit. Geschoßwiderstand 210
§ 10. Zweidimensionale Überschallströmungen an zugeschärften Körpern und Tragflügeln 213

Führer durch die neuere Literatur auf dem Gebiete der Strömungslehre 219
Namen- und Sachverzeichnis 221

Erster Abschnitt.

Eigenschaften der Flüssigkeiten und Gase. Gleichgewichtslehre.

§ 1. Eigenschaften der Flüssigkeiten. Die Flüssigkeiten unterscheiden sich von den festen Körpern durch die leichte Verschieblichkeit ihrer Teilchen. Während bei den festen Körpern endliche, zum Teil sehr erhebliche Kräfte nötig sind, um ihre Form zu ändern, verschwinden die zur Formänderung von Flüssigkeiten erforderlichen Kräfte vollständig, wenn nur für die Formänderung hinreichend viel Zeit zur Verfügung ist. Bei raschen Formänderungen zeigen auch die Flüssigkeiten einen Widerstand, der aber nach Aufhören der Bewegung sehr schnell verschwindet. Man nennt die Eigenschaft der Flüssigkeiten, gegen Formänderung Widerstand zu leisten, „Zähigkeit". Von der Zähigkeit wird im III. Abschnitt, § 1 ausführlich die Rede sein. Neben den gewöhnlichen, leicht beweglichen Flüssigkeiten gibt es auch sehr zähe Flüssigkeiten, deren Widerstand gegen Formänderung sehr beträchtlich ist (im Ruhezustand aber auch wieder verschwindet), und es gibt von hier aus alle Übergänge zum (amorphen) festen Körper. Erhitztes Glas z. B. macht diese Übergänge sämtlich durch, Asphalt und ähnliche Stoffe zeigen sie bei gewöhnlichen Temperaturen.

Versuch: Eine umgestürzte Tonne mit Asphalt läuft je nach der Temperatur in einigen Tagen oder Wochen aus; das Ausgelaufene bildet einen flachen Kuchen. Obwohl dieser in dauerndem Weiterfließen ist, kann man darauf herumtreten, ohne merkliche Eindrücke hervorzurufen. Eindrücke zeigen sich aber bei längerem Stehenbleiben. Bei Bearbeitung mit einem Hammer splittert die Masse wie Glas.

In der Lehre vom Gleichgewicht der Flüssigkeiten interessieren wir uns nur für Ruhezustände bzw. hinreichend langsame Bewegungen, hier dürfen wir daher den Widerstand gegen Formänderung genau gleich Null setzen, wir erhalten geradezu eine Definition des flüssigen Zustandes, wenn wir sagen: In einer im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit ist jeder Widerstand gegen Formänderung gleich Null.

Nach der Auffassung der kinetischen Theorie der Materie sind die kleinsten Teile aller Körper (die Atome) in beständiger Unruhe; die kinetische Energie dieser Bewegung ist das, was sich als Wärme äußert. Von diesem Standpunkt aus unterscheiden sich die Flüssigkeiten von den festen Körpern dadurch, daß die Teilchen nicht wie bei diesen feste Plätze haben, um die sie schwingen, sondern sich dauernd ungeordnet durcheinander bewegen, oder wenigstens sehr häufig ihre Plätze wechseln. Das allmähliche Erweichen von amorphen Körpern bei steigender Temperatur kann man sich so vorstellen: Erhitzt man einen festen Körper, d. h. vermehrt man die Energie der Molekelbewegung, so treten zunächst einige Platzwechsel ein, wo gerade zufällig besonders große Schwingungsamplituden auftreten; bei weiterer Erhitzung werden die Platzwechsel immer häufiger, schließlich allgemein. Durch solches freiwilliges Platzwechseln ist aber die Möglichkeit der Formänderung ohne

Widerstand gegeben. Bei kristallinischen festen Körpern, in denen bekanntlich die Teilchen völlig regelmäßig angeordnet sind, sind die Verhältnisse etwas anders; hier gibt es bei genügend hoher Temperatur Platzwechsel ohne Änderung der Gesamtanordnung, d. h. ohne Verschwinden des festen Zustandes, und der Übergang vom festen zum flüssigen Zustand pflegt unstetig durch Schmelzen, d. h. durch Einstürzen des regelmäßigen Gebäudes zu erfolgen. Doch gehören diese Dinge nicht mehr hierher.

Eine weitere Eigenschaft der Flüssigkeiten ist ihr großer Widerstand gegen Volumenveränderung. Es ist auf keine Weise möglich, 1 Liter Wasser in ein Gefäß von $^1/_2$ Liter Inhalt hineinzupressen, und wenn man dieselbe Menge in ein Gefäß von 2 Liter Inhalt bringt, so füllt es dieses nur zur Hälfte aus, auch wenn man die Luft darüber wegpumpt. Dabei ist das Wasser nicht etwa ganz unzusammendrückbar, bei hohen Drucken kann es um immerhin merkbare Beträge zusammengedrückt werden [5 v. H. Volumenverminderung bei rund 1000 Atmosphären Druck][1]). Bei anderen Flüssigkeiten liegen die Verhältnisse ähnlich.

§ 2. Lehre vom Spannungszustand. Wir wollen uns nun mit dem Spannungszustand in einer im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit näher beschäftigen. Es ist vielleicht nicht überflüssig, zu bemerken, daß man die allgemeinen Sätze über das Gleichgewicht der Kräfte an einem Körper auch auf flüssige Körper anwenden darf. Man findet gelegentlich, um dies zu rechtfertigen, ein besonderes „Erstarrungsprinzip" herangezogen, dem folgende Überlegung zugrunde liegt: „Das Gleichgewicht irgendeines beweglichen Systems kann dadurch, daß nachträglich irgendwelche beweglichen Teile festgemacht werden, nicht gestört werden; also kann man auch in einer im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit irgendeinen Teilbezirk erstarrt denken, ohne das Gleichgewicht dadurch zu stören, und man kann auf den erstarrten Teil die Sätze über das Gleichgewicht starrer Körper anwenden"[2]). Der Umweg über den starren Körper ist aber nicht unbedingt notwendig. Die Gleichgewichtssätze der allgemeinen Mechanik werden zwar vielfach unter Zuhilfenahme des „starren Körpers" abgeleitet. Ein „ruhendes Massensystem" mit inneren Bewegungsmöglichkeiten, die aber des Gleichgewichts wegen nicht ausgenutzt werden, läßt jedoch die Anwendung dieser Sätze ebenso zu. Solange es sich um den Fall wirklicher Ruhe handelt, sind beide Betrachtungsweisen ganz gleichberechtigt; handelt es sich aber um einen Fall von Bewegung, so kommt man mit dem Erstarrungsprinzip leicht in Schwierigkeiten, da hier nichts Erstarrtes vorhanden ist. Wegen der späteren Anwendung auf die Dynamik mögen die wesentlichen Überlegungen dieser Betrachtungsweise, die auch in der Festigkeitslehre üblich ist, hier kurz aufgeführt werden:

Man stellt zunächst fest, daß irgendwelche Kräfte immer Wechselwirkungen zwischen Massen sind. Zieht z. B. die Masse m_1 eine andere Masse m_2 mit einer Kraft P zu sich hin, so findet sich die Kraft P gleichzeitig

---

[1]) Über Druckmaße vgl. § 3.

[2]) Es ist hier natürlich nicht an ein physisches Erstarren gedacht, das mit Volumenänderung und mit Auskristallisieren usw. verbunden ist, sondern an ein ideelles Erstarren ohne jede Verschiebung und Volumenänderung.

auch an m_1 als Wirkung von m_2, und zwar als eine Anziehung nach m_2 hin. Beide Kräfte sind also entgegengesetzt gerichtet (Newtons Prinzip von Aktion und Reaktion). An einem System von Massen, das irgendwie gegen andere Massen abgegrenzt werden möge, unterscheidet man zweierlei Arten von Kräften, innere Kräfte, die zwischen zwei zum System gehörigen Massen wirken und daher immer paarweise entgegengesetzt vorkommen, und äußere Kräfte, die zwischen je einer Systemmasse und einer außerhalb befindlichen Masse wirken, und die daher am System nur einmal vorkommen. Summiert man alle an den Massen des Systems vorkommenden Kräfte (vektoriell oder komponentenweise), so heben sich die inneren Kräfte immer paarweise aus der Summe heraus, und nur die äußeren Kräfte bleiben stehen.

Zum Gleichgewicht des Systems ist erforderlich, daß an jeder einzelnen Masse die Summe der an ihr angreifenden Kräfte verschwindet (Vektorsumme oder drei Komponentensummen!). Summiert man diese Summen über alle Massen des Systems, so verbleibt nach obigem nur die Summe aller äußeren Kräfte, und da jede Einzelsumme des Gleichgewichts wegen verschwindet, verschwindet somit auch die Summe der äußeren Kräfte an dem System. Dieser Satz, der über das Massensystem weiter nichts voraussetzt, als daß es im Gleichgewicht ist, erweist sich für die verschiedensten Anwendungen als höchst wertvoll. Rechnet man nach der Koordinatenmethode, dann enthält er in sich die drei Aussagen

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0,$$

wo X, Y, Z Komponenten der äußeren Kräfte nach der x-, y- und z-Richtung sind.

Zu dem vorstehenden Satz gibt es einen völlig analogen für die Drehmomente der äußeren Kräfte. Auch diese müssen im Gleichgewicht verschwinden.

Sowohl bei elastisch festen wie bei flüssigen Körpern interessiert man sich für den Spannungszustand im Innern des Körpers. Dieser besteht offenbar aus den inneren Kräften, die zwischen den kleinsten Teilen des Körpers übertragen werden. Im allgemeinen begnügt man sich dabei mit Angaben über den mittleren Zustand in einem Bereich, der schon eine sehr große Anzahl von Teilchen enthält; denn das Bild der Einzelkräfte zwischen den noch dazu in lebhafter Wärmebewegung befindlichen Teilchen würde viel zu verwirrend sein. Wie aber soll man die inneren Kräfte zu fassen bekommen, da unsere Sätze nur Aussagen über äußere Kräfte liefern? Die Antwort ist: Man muß sie zu äußeren machen! Das ist möglich, und zwar so: Denken wir uns einen Körper durchgeschnitten und erklären das eine der beiden Stücke (I in Fig. 1) als unser Massensystem, dann sind alle Kräfte, die von einem Teilchen des Gebietes II auf eines des Gebietes I übertragen werden, und die bisher innere Kräfte waren, für uns zu äußeren geworden. Stand der ganze Körper unter einem äußeren Zwangszustand (in Fig. 1 ist dieser durch zwei Pfeile angedeutet), so bestehen auch innere Spannungen, und wir werden dann, wenn wir in Gedanken den Schnitt ausführen, finden, daß durch die Schnittfläche hindurch von den Teilchen rechts

vom Schnitt auf diejenigen links vom Schnitt Kräfte übertragen werden. Summieren wir alle diese Kräfte, d. h. setzen wir sie zu einer resultierenden Kraft zusammen, so hält diese den an dem Teil I angreifenden Kräften gerade

Fig. 1.

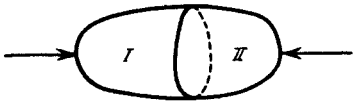
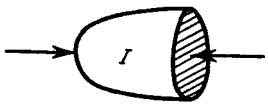


Fig. 2.

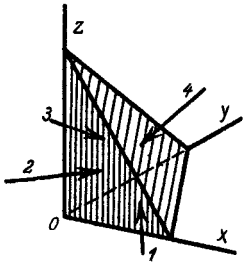


das Gleichgewicht (vgl. Fig. 2). Dies liefert eine eindeutige Aussage über die Resultierende der Kräfte im Schnitt[1]).

Unter Spannungen versteht man nun solche Kräfte in einem „Schnitt", bezogen auf die Flächeneinheit. Man erhält in obigem Beispiel offenbar die mittlere Spannung in dem Schnitt, wenn man die aus dem Gleichgewicht folgende Kraft im Schnitt durch den Flächeninhalt des Schnittes dividiert. Wir ersehen hieraus auch, daß die „Spannung auf einer Fläche" ebenso wie die Kraft ein Vektor ist.

Unser Prinzip, durch einen gedachten Schnitt aus inneren Kräften äußere zu machen, im folgenden kurz „Schnittprinzip" genannt, läßt erweiterte Anwendungen zu, indem wir durch eine Anzahl von Schnittflächen aus dem Innern des Körpers, dessen Spannungszustand wir untersuchen wollen, ein kleines Körperchen (Parallelepiped, Prisma, Tetraeder usw.) herauspräparieren und sein Gleichgewicht untersuchen. Im einfachsten Falle sind dann alle Kräfte, die an dem Körperchen ins Gleichgewicht zu setzen sind, Spannungskräfte. Aus dem Gleichgewicht solcher Körperchen lassen sich verschiedene wichtige Sätze über Spannungszustände herleiten, von denen einer hier als Beispiel mit Beweis angeführt werden mag: „Sind die Spannungsvektoren für drei Schnittrichtungen gegeben, die miteinander eine körperliche Ecke bilden, so ist damit auch für alle übrigen Schnittrichtungen der Spannungsvektor bekannt." Beweis: Wir schneiden die körperliche Ecke mit der vierten Fläche, deren Spannung ermittelt werden soll, so, daß ein Tetraeder wie in Fig. 3 entsteht. Die Kräfte 1, 2 und 3 werden erhalten, indem man die gegebenen Spannungsvektoren mit den Flächeninhalten der zugehörigen Dreiecke multipliziert. Es gibt nur eine Richtung und Größe der Kraft 4, die den Kräften $1 + 2 + 3$ das Gleichgewicht hält; diese Kraft, dividiert durch die zugehörige Dreiecksfläche, ist die gesuchte Spannung. Für die Berechnung wählt man zu den Flächen 1, 2 und 3 zweckmäßig die Koordinatenebenen, vgl. Fig. 3.

Fig. 3.



---

[1]) Man hätte die ganze Überlegung natürlich ebenso gut an die Zustände am Teil II anknüpfen können und hätte dabei eine gleich große, aber entgegengesetzte Kraft erhalten (eben die Kraft, die von dem Teil I auf den Teil II ausgeübt wird).

Von der Lehre von den Spannungzuständen sei nur noch erwähnt, daß der „Spannungszustand“, der die Gesamtheit der Spannungsvektoren zu allen möglichen Schnittrichtungen durch einen Punkt darstellt, mit einem Ellipsoid in Verbindung gebracht werden kann; er ist demnach ein „Tensor“. Nach dem vorerwähnten Satz ist der Spannungszustand in einem Punkte (und auch sein Ellipsoid) gegeben, wenn die Spannungsvektoren zu 3 eine körperliche Ecke bildenden Schnittflächen gegeben sind. Entsprechend den drei Hauptachsen, die jedes Ellipsoid besitzt, sind bei jedem Spannungszustand drei aufeinander senkrechte Schnittflächen angebbar, auf denen der Spannungsvektor senkrecht steht. Die drei auf diese Weise ausgezeichneten Spannungen heißen Hauptspannungen, die zugehörigen Richtungen Hauptrichtungen.

§ 3. Der Flüssigkeitsdruck. Der Spannungszustand in einer im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit ist besonders einfach. Ein Widerstand gegen Formänderung, also gegen Verschieben der Teile aneinander, ist etwas mit einer Reibung Verwandtes. Wenn bei zwei sich berührenden festen Körpern Reibungslosigkeit herrschen soll, so muß die Druckkraft an der Berührungsfläche der beiden Körper jederzeit senkrecht auf dieser stehen (so daß also bei einer Gleitbewegung längs der Berührungsfläche keine Arbeit geleistet wird). Ganz entsprechend drückt sich die Abwesenheit eines Widerstandes gegen Formänderung dadurch aus, daß im Innern der Flüssigkeit die Spannung, die man hier Druck zu nennen pflegt, überall senkrecht auf der Schnittfläche steht, auf der sie wirkt. Man kann geradezu das Senkrechtstehen des Druckes auf der zugehörigen Fläche als eine Definition des flüssigen Zustandes ansehen; sie ist der in § 1 angegebenen Definition völlig gleichwertig.

Aus dieser Eigenschaft des Flüssigkeitsdruckes läßt sich sofort eine andere durch eine einfache Gleichgewichtsbetrachtung herleiten. Wir denken uns dazu aus der Flüssigkeit ein kleines dreiseitiges Prisma herausgeschnitten; die Stirnflächen des Prismas mögen dabei senkrecht zu den Prismakanten stehen (wir können uns natürlich das Prisma auch innerhalb der Flüssigkeit erstarrt denken und das Gleichgewicht der Kräfte studieren, die von der übrigen Flüssigkeit auf das Prisma ausgeübt werden). Die Druckkräfte auf den Stirnseiten sind gleich groß und entgegengesetzt gerichtet und halten sich daher von selbst Gleichgewicht, so daß wir sie nicht weiter zu beachten brauchen. Die Kräfte auf den Seitenflächen sind, da sie senkrecht auf ihren Flächen stehen, in einer zu den Prismakanten senkrechten Ebene enthalten. Fig. 4 zeigt eine Stirnansicht des Prismas mit den Kräften, Fig. 5 das Dreieck, das die Kräfte bilden müssen, damit Gleichgewicht vorhanden ist. Da die Dreieckseiten von Fig. 5 je auf denen von Fig. 4 senkrecht stehen, haben beide Dreiecke dieselben Winkel und sind daher einander ähnlich. Hieraus folgt, daß die drei Druckkräfte sich verhalten wie die zugehörigen Prismenseiten. Wenn wir nun die auf die Flächeneinheit bezogenen Drucke ermitteln wollen, so müssen die Druckkräfte durch die jeweilige Prismenfläche dividiert werden.

Die Prismenflächen haben alle dieselbe Höhe und verhalten sich daher wie ihre Grundlinien, die Prismenseiten, also ebenso wie die Kräfte. Hieraus folgt, daß der Druck pro Flächeneinheit, den wir schlechthin Druck nennen, auf allen drei Prismenflächen gleich groß ist. Da das Prisma im übrigen ganz beliebig gewählt war, schließen wir, daß der Druck an ein und derselben Stelle der Flüssigkeit in allen Richtungen (noch genauer gesagt: für alle möglichen Lagen einer gedachten Schnittfläche) gleich groß ist. Das Spannungsellipsoid ist in diesem Falle eine Kugel. Für einen Spannungszustand dieser Art, den man auch hydrostatischen Spannungszustand nennt, genügt also eine einzige Zahlenangabe, die des Druckes p. Nach dem Früheren bedeutet diese Zahl offenbar die Kraft, die auf einer Flächeneinheit übertragen wird. Je nach der gewählten Krafteinheit und Flächeneinheit sind sehr verschiedene Druckmaße möglich. Technisch ist sehr gebräuchlich das kg/cm²; aber auch das kg/m² wird viel verwendet. kg bedeutet dabei Kilogramm-Gewicht. Über einige andere Druckmaße vgl. § 8 und 9.

Fig. 4.

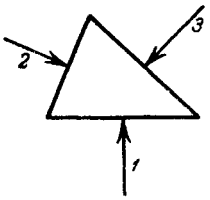
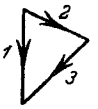
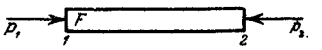


Fig. 5.



§ 4. Druckverteilung in einer Flüssigkeit bei Nichtberücksichtigung der Schwere. Jede Flüssigkeit ist schwer. In vielen Fällen, besonders wenn es sich um hohe Drucke handelt, ist es aber unnötig, auf die Wirkungen der Schwere Rücksicht zu nehmen; die Überlegungen werden dadurch sehr vereinfacht. Wir knüpfen wieder an das Kräftegleichgewicht an einem Prisma an, das wir jetzt aber von länglicher Form annehmen wollen, und betrachten das Gleichgewicht gegen Verschieben längs der Prismenachse. Wir nehmen

Fig. 6.



zunächst eine Veränderlichkeit des Druckes von Ort zu Ort an; der Querschnitt des Prismas, gleich dem Inhalt der auch hier senkrecht zur Prismenachse angenommenen Stirnfläche, sei F (Fig. 6). Wir nehmen diesen Querschnitt so klein, daß die Veränderlichkeit des Druckes innerhalb desselben unbeachtet bleiben darf. Wenn an dem einen Prismenende der Druck p_1, an dem anderen p_2 herrscht, so greifen hier die Kräfte Fp_1 und Fp_2 in entgegengesetzter Richtung parallel der Prismenachse an. Alle Druckkräfte auf den Seitenflächen des Prismas stehen aber nach unserer Grundannahme senkrecht auf diesen Flächen und damit auch senkrecht auf der Prismenachse und tragen daher zu den Kraftkomponenten parallel der Prismenachse nichts bei, gleichviel wie der Druck auf ihnen verteilt ist. Das Gleichgewicht verlangt also, daß die einzigen Kräfte in der betrachteten Richtung, Fp_1 und Fp_2, untereinander Gleichgewicht halten, also muß sein

$$Fp_1 = Fp_2 \quad \text{oder} \quad p_1 = p_2,$$

d. h., da die Lage des Prismas ja ganz willkürlich war: Bei Abwesenheit der Schwere (und anderer etwaiger eingeprägter Kräfte) ist der Druck an allen Stellen der Flüssigkeit gleich groß.

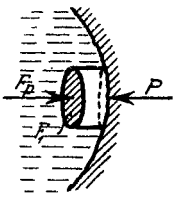
Erfüllt die Flüssigkeit etwa enge und gewundene Räume, so daß es nicht möglich ist, zwischen zwei beliebigen Punkten ein Prisma in die Flüssigkeit zu legen, so steht es immer frei, den Schluß beliebig oft zu wiederholen, von einem Punkt 1 zu einem Punkt 2, von diesem in anderer Richtung zu einem Punkt 3 usw., bis der verlangte Endpunkt n erreicht wird. Aus $p_1 = p_2$, $p_2 = p_3$ usw. folgt dann auch $p_1 = p_n$. Eine andere noch elegantere Überlegung ist die folgende: Man denke sich ein geräumiges Gefäß, in dem das wirklich vorliegende Gefäß Platz hat, vollkommen mit Flüssigkeit erfüllt, und hinterher, nachdem das Gleichgewicht eingetreten ist, so viel von der Flüssigkeit erstarrt, daß nur der wirklich vorhandene Flüssigkeitsraum übrigbleibt. Nach unserem Erstarrungsprinzip von § 2 wird hierdurch an dem Kräftezustand nichts geändert; wir haben also auch in beliebig engen Räumen im Gleichgewicht überall gleichen Druck.

Anmerkung: Bei äußerst engen Räumen kann nach einer Änderung des Flüssigkeitsdruckes, etwa durch äußere Belastung, sehr beträchtliche Zeit vergehen, bis das Gleichgewicht eingetreten ist. Bei plastischem Töpferton z. B. (bestehend aus sehr feinen festen Teilchen, deren Zwischenräume mit Wasser angefüllt sind) kann diese Zeit nach Tagen oder, wenn es sich um ganze Tonschichten im Erdboden handelt, nach Jahren zählen[1]); während dieser Zeit strömt das Wasser von den Stellen höheren zu denen niedrigeren Druckes, vgl. Abschnitt III, § 8.

Wir fassen also zusammen: Der Druck in einer im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit steht überall senkrecht auf der Fläche, auf der er wirkt, und ist — bei Abwesenheit von Schwerkräften und anderen Massenkräften — allerorts und in jeder Richtung gleich groß.

Was von dem Druck im Innern der Flüssigkeit gilt, gilt auch für den Druck auf die Wände des Gefäßes, das die Flüssigkeit einschließt. Man kann, um sich das klarzumachen, dicht vor der Wand — oder auch in einigem Abstand davor — einen ebenen Schnitt durch die Flüssigkeit führen und diesen durch eine Zylinderfläche ergänzen, die senkrecht zu dem Schnitt steht, vgl. Fig. 7. Das Gleichgewicht des auf diese Weise eingeschlossenen Wasserkörpers liefert die Kraft P, genauer die Kraftkomponente, die das Wandstück in der Richtung senkrecht zur Schnittfläche erfährt, und zwar ist diese Kraft gleich Fp[2]). Diese Betrachtungsweise hat den Vorteil, daß man sofort erkennt, daß Unebenheiten des Wandstücks, selbst grobe, an dem Ergebnis nichts ändern.

Fig. 7



§ 5. Eigenschaften der Gase.

Die Gase unterscheiden sich von den Flüssigkeiten dadurch, daß sie sich unter Anwendung entsprechender Drucke auf sehr kleinem Raum zusammendrücken lassen, und andererseits, wenn ihnen mehr Raum als im gewöhnlichen Zustand dargeboten wird, diesen immer gleichförmig ausfüllen, wobei ihr Druck entsprechend unter den Druck der

---

[1]) Vgl. etwa Terzaghi, Erdbaumechanik. Wien 1924.

[2]) In Fig. 7 ist die Kraft P in der Weise angegeben, wie sie von der Wand auf den betrachteten Flüssigkeitskörper ausgeübt wird. Die Druckkraft der Flüssigkeit auf die Wand hat die entgegengesetzte Richtung.

umgebenden Luft sinkt. Im übrigen ist ihr Verhalten dem der Flüssigkeiten sehr ähnlich, da auch bei ihnen im Ruhezustand jeder Widerstand gegen Formänderung verschwindet, und sich im übrigen bei inneren Verschiebungen auch hier eine gewisse Zähigkeit geltend macht. Solange also keine Volumenänderungen vorkommen, unterscheidet sich das Verhalten eines Gases qualitativ in nichts von dem einer Flüssigkeit, die denselben Raum, ohne eine freie Oberfläche zu haben, ausfüllt.

Das technisch wichtigste Gas ist die atmosphärische Luft. Die anderen Gase zeigen im wesentlichen dasselbe Verhalten. Wie später noch ausführlicher besprochen werden wird, steht die atmosphärische Luft am Erdboden unter einem in der Hauptsache konstanten Druck, der rund 1 kg/cm² beträgt. Der Druck von 1 kg/cm² heißt deshalb eine (technische) Atmosphäre. (Die davon etwas verschiedene „physikalische Atmosphäre" entspricht dem mittleren Luftdruck in Meereshöhe und ist zu 760 mm Quecksilber = 1,0333 kg/cm² festgesetzt worden. In höheren Lagen ist der Luftdruck geringer, vgl. § 7.)

Zur Messung des Luftdrucks (Gasdrucks) dienen verschiedene Geräte, die, soweit sie Druckunterschiede anzeigen, Manometer, soweit sie absolute Drucke des sie umgebenden Gases anzeigen, Barometer heißen. Zu beiden Arten von Geräten lassen sich Flüssigkeitssäulen verwenden, vgl. § 8 und 9; aber auch solche, bei denen der zu messende Druck auf eine Feder wirkt, werden viel angewandt. Um den absoluten Druck der Luft zu messen, kann man z. B. eine metallene Dose mit einem nachgiebigen Deckel, die luftleer gepumpt ist, so mit einer starken Feder verbinden, daß diese durch ihre Spannung den Deckel gegen das Eindrücken durch den äußeren Luftdruck stützt. Wird dieses Gerät, das noch ein Zeigerwerk zur stark vergrößerten Wiedergabe der Deckelbewegungen enthält, an einen Ort anderen Luftdrucks gebracht, oder ändert sich der Luftdruck von selbst, so ist durch den Zeiger die Druckänderung erkennbar (sogenanntes Aneroidbarometer).

Das Gesetz, nach dem sich bei gegebenen Änderungen des Volumens der Druck des Gases ändert, ist zuerst von R. Boyle 1662 und dann noch einmal unabhängig von Mariotte 1679 entdeckt worden. Man nennt es daher „Boyle-Mariottesches Gesetz". Nach ihm verhalten sich (bei ein und derselben Temperatur) die Drucke umgekehrt wie die Volumina. Wird also eine Gasmenge auf die Hälfte ihres Volumens zusammengepreßt, so verdoppelt sich ihr Druck, und umgekehrt, wird ihr das doppelte Volumen dargeboten, so sinkt der Druck auf die Hälfte. Man kann dieses Gesetz durch die Formel

$$pV = p_1 V_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ausdrücken, in der p_1 den anfänglichen Druck, V_1 das anfängliche Volumen und p und V zwei beliebige, aber zusammengehörige Werte dieser Größen sind.

Das Volumen eines Gases ist auch mit der Temperatur sehr stark veränderlich. Gay-Lussac fand 1816, daß die Ausdehnung für 1° C, falls der Druck konstant gehalten wird, immer 1/273° des Volumens bei 0° C ist, und zwar für alle Gase und Temperaturen — wenn man von Feinheiten absieht,

die gleich noch erwähnt werden sollen. Man kann dieses Verhalten durch die Formel ausdrücken:

$$V = V_0 (1 + \alpha \vartheta) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

wo V_0 das Volumen bei 0^0 C, ϑ die Temperatur nach Celsius und $\alpha = \frac{1}{273^0}$ der „Ausdehnungskoeffizient" ist.

Da die Formel (2) sich als unabhängig von dem jeweiligen Druck erwiesen hat, sofern dieser nur bei den in der Formel verglichenen Zuständen jeweils konstant war, läßt sich die Formel (2) mit der Formel (1) verbinden. Man erhält damit die für alle Drucke und Temperaturen gleich verwendbare Formel

$$p V = p_0 V_0 (1 + \alpha \vartheta) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

In dieser bedeutet p_0 einen im übrigen beliebigen, aber festgehaltenen Ausgangsdruck und V_0 das Volumen beim Ausgangsdruck p_0 und bei 0^0 C. Für die Gl. (3) findet man vielfach den Namen Mariotte-Gay-Lussacsche Gleichung. Man bezeichnet sie auch als „Zustandsgleichung", da sie die drei Zustandsgrößen Druck, Volumen und Temperatur miteinander verknüpft. Man nennt sie speziell „Zustandsgleichung der idealen Gase", weil die wirklichen Gase gewisse Abweichungen von ihr zeigen. Diese Abweichungen sind bei Gasen gewöhnlicher Dichte ziemlich unbedeutend, machen sich aber sehr bemerklich, wenn die Gase stark verdichtet werden, und besonders, wenn die Temperatur so stark erniedrigt wird, daß die Verflüssigung des Gases einsetzt.

Diese Abweichungen werden in der zur Thermodynamik gehörenden Lehre von den Zustandsgleichungen ausführlich behandelt. Hier mag nur eine der Abweichungen kurz besprochen werden. Gl. (1) würde ergeben, daß bei ungeheuer großen Drucken das Gasvolumen ungeheuer klein würde, und man kann nach der Formel ausrechnen, bei welchem Druck die Dichtigkeit des Wassers, bei welchem die des Goldes usw. erreicht würde. Dies ist aber unrichtig. Es gibt ein Grenzvolumen, über das hinaus das Gas durch keinen noch so hohen Druck zusammengedrückt werden kann, bei dem also die Teilchen die dichtest mögliche Lagerung haben. Man kann diesem Umstand durch eine Abänderung von Gl. (3) Rechnung tragen, indem man schreibt:

$$p(V - V') = p_0 (V_0 - V') (1 + a\vartheta).$$

V' bedeutet dabei das kleine Grenzvolumen. V ergibt sich offenbar für jedes endliche p noch etwas größer als V'; für Volumina V, die groß gegen V' sind, unterscheiden sich die Ergebnisse dieser Gleichung aber praktisch nicht von denen der Gl. (1).

Bei der Verdichtung eines Gases wird Wärme erzeugt; das Boyle-Mariottesche Gesetz, das nur für gleichbleibende Temperatur gültig ist, kann also nur dann wirklich beobachtet werden, wenn dem Gas während oder wenigstens nach der Verdichtung (Kompression) genügend Zeit gelassen wird, um die erzeugte Wärme abzugeben und wieder die Temperatur der Umgebung anzunehmen. Das gleiche gilt für die bei der Ausdehnung (Expansion) auftretende Abkühlung. Läßt man dem Gase keine Zeit, seine Temperaturunterschiede auszugleichen, so muß offenbar bei der Verdichtung der Druck in stärkerem Verhältnis anwachsen, als das Volumen abnimmt. Die Thermodynamik lehrt, daß in dem Falle, wo gar kein Austausch der erzeugten Wärme

stattfindet, also bei extrem rascher Verdichtung und Verdünnung, an Stelle von Gl. (1) die Formel

$$p V^{\varkappa} = p_1 V_1^{\varkappa} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

tritt, worin $\varkappa = c_p/c_v$, d. h. gleich dem Verhältnis der spezifischen Wärme bei konstantem Druck zu der bei konstantem Volumen ist. Für trockene atmosphärische Luft ist $\varkappa = 1{,}405$. Eine Kompression oder Expansion nach dem Gesetz von Gl. (4) nennt man im Gegensatz zu der nach Gl. (1), die man isothermisch nennt, eine adiabatische Kompression oder Expansion.

Mit der adiabatischen Verdichtung ist eine Erwärmung verbunden, die sich aus Gl. (3) und (4) berechnen läßt, mit der Ausdehnung natürlich eine entsprechende Abkühlung.

Anmerkung: Das in diesem Paragraphen geschilderte Verhalten eines Gases findet eine sehr gute Erklärung durch die Annahme, daß die kleinsten Teile des Gases mit großer Geschwindigkeit durcheinanderschwärmen, unter gegenseitigen Stößen und Stößen gegen die Wand. Der Druck ist die Summenwirkung dieser Stöße, die Temperatur ist gleichbedeutend mit der kinetischen Energie der Teilchen. Diese nimmt in der Tat bei der Verdichtung zu, da die Teilchen bei der elastischen Reflexion an der ihnen entgegenrückenden Wand ihre Geschwindigkeit steigern.

§ 6. Gleichgewicht einer schweren Flüssigkeit. Die Wirkung des Schwerefeldes auf irgendeine Masse m besteht darin, daß diese eine Anziehungskraft nach dem Erdmittelpunkt[1]) von der Größe mg erfährt; g ist dabei die Beschleunigung des freien Falles und in unseren Gegenden gleich rund 9,81 m/s². Die Kraft mg wird das Gewicht der Masse m genannt. Da Flüssigkeitsmengen vielfach nach dem Volumen gemessen werden, wird zweckmäßig für die Masse der Volumeneinheit ein besonderer Name eingeführt. Man nennt sie die Dichte und bezeichnet sie mit ϱ. Irgendeine Flüssigkeitsmenge vom Volumen V und der Dichte ϱ hat also eine Masse ϱV und ein Gewicht $g\varrho V$. Das Produkt $g\varrho$ ist somit das Gewicht der Volumeneinheit. Es wird vielfach, besonders in der technischen Literatur, mit einem besonderen Buchstaben bezeichnet: $g\varrho = \gamma$, und heißt Raumgewicht. Vielfach findet man dafür auch den Namen „spezifisches Gewicht". Dieses bedeutet aber Raumgewicht bezogen auf Wasser als 1 oder, was dasselbe ist, Dichte bezogen auf Wasser als 1. Das Raumgewicht stimmt damit nur bei besonderer Wahl der Einheiten (cm und g_{Gewicht}; dm und kg_{Gewicht}; m und t) überein. Für m und kg z. B. ist das Raumgewicht des Wassers $\gamma_W = 1000\,\text{kg/m}^3$ [2]).

Da die Stärke der Erdanziehung g nicht an allen Orten genau dieselbe ist, ist die Größe des Raumgewichts auch von Ort zu Ort etwas veränderlich. Die Physiker ziehen deshalb den Begriff der Dichte, der von der Stärke der Erdanziehung unabhängig ist, vor. Für hydrostatische Rechnungen ist jedoch die Zusammenfassung des Produkts ϱg zu dem Raumgewicht γ bequem.

---

[1]) Dies ist nicht ganz genau, es träfe nur dann zu, wenn die Erde nicht abgeplattet wäre und nicht rotierte. In Wirklichkeit schneidet die Lotrichtung für die Bewohner der nördlichen Halbkugel die Erdachse etwas südlich vom Erdmittelpunkt.

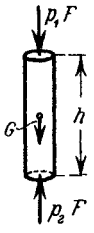
[2]) Neuerdings wird für „Raumgewicht" auch „Wichte" vorgeschlagen, als Gleichklang zu „Dichte".

Die Grundaufgabe der Hydrostatik, d. h. der Lehre vom Gleichgewicht schwerer Flüssigkeiten, ist die Bestimmung der Druckverteilung (des „Druckfeldes") in einer homogenen schweren Flüssigkeit.

Wir betrachten wieder das Gleichgewicht eines in der Flüssigkeit abgegrenzten Prismas gegen Verschieben in der Achsenrichtung und verwenden zunächst eines nach Fig. 6, dessen Achse wagrecht, also im rechten Winkel zur Richtung der Erdschwere (zur „Lotrichtung") liegt. Das Gewicht des Prismas hat also keine Komponente nach der Achsenrichtung, deshalb lassen sich alle einschlägigen Überlegungen von § 4 wiederholen; sie liefern auch hier $p_1 = p_2$; durch Wiederholung der Schlüsse für beliebige aneinandergereihte Prismen mit wagerechter Achse findet man, daß an allen Punkten einer wagerechten Ebene der Druck denselben Wert haben muß.

Eine Beziehung zwischen verschiedenen wagerechten Ebenen erhält man nun durch Betrachtung des Gleichgewichts eines Prismas oder Zylinders mit senkrechter Achse gegen Verschieben in senkrechter Richtung. Hier finden wir das Gewicht des Prismas am Zustandekommen des Gleichgewichts beteiligt. Abwärts wirkt das Gewicht $G = \gamma V = \gamma F h$, ferner — gemäß Fig. 8 — die Druckkraft auf die obere Endfläche $p_1 F$, aufwärts die Druckkraft auf die untere Endfläche $p_2 F$. Das Gleichgewicht erfordert also, daß

Fig. 8.



$$\gamma F h + p_1 F = p_2 F$$

ist, woraus

$$p_2 - p_1 = \gamma h \quad \cdots \quad (1)$$

folgt. (Druckunterschied zwischen den Stellen 1 und 2 gleich dem Gewicht der dazwischenliegenden senkrechten Flüssigkeitssäule vom Querschnitt 1.) Wiederholte Anwendung dieser Überlegung liefert das Ergebnis, daß der Druck nach unten zu fortwährend zunimmt, und zwar so, daß er für jede Längeneinheit um den Betrag γ steigt. In jeder wagerechten Ebene ist er dabei konstant.

Führt man ein xyz-System ein, dessen z-Achse senkrecht nach oben weist, und ist p_0 der Druck in der Horizontalebene $z = 0$, so ist der Druck p an irgendeiner anderen Stelle

$$p = p_0 - \gamma z \quad \cdots \quad (2)$$

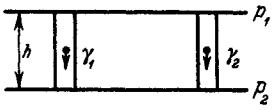
Wie das mehrfach angewandte Erstarrungsprinzip lehrt (vgl. § 4), gilt diese Beziehung ebenso in großen, von der Flüssigkeit erfüllten Räumen, wie auch in beliebigen Röhrensystemen, in den Zwischenräumen einer Kies- oder Sandmasse usw. Voraussetzung ist nur eine homogene in sich zusammenhängende ruhende Flüssigkeit.

Handelt es sich um eine inhomogene Flüssigkeit (an verschiedenen Stellen verschieden temperierte Flüssigkeit, Salzlösung von an verschiedenen Stellen verschiedenem Salzgehalt usw.), so läßt sich zunächst die Überlegung mit dem Prisma mit wagerechter Achse ohne jede Änderung übertragen, es ergibt sich also auch hier in jeder wagerechten Ebene derselbe Druck. Wir greifen nun zwei solche wagerechten Ebenen mit dem (nicht zu großen) Ab-

stand h heraus, Fig. 9, von denen die obere unter dem Druck p_1, die untere unter dem Druck p_2 steht, und betrachten zwei senkrechte Prismen von der Höhe h und dem mittleren Raumgewicht γ_1 beim linken und γ_2 beim rechten Prisma.

Das Gleichgewicht erfordert, daß $p_2 - p_1 = \gamma_1 h$ links und $p_2 - p_1 = \gamma_2 h$ rechts sei. Das ist aber nur nebeneinander möglich, wenn $\gamma_1 = \gamma_2$ ist. Anders käme kein Gleichgewicht zustande, die Flüssigkeit würde sich in Bewegung setzen. Wir können die Betrachtung verfeinern, indem wir die Höhe h sehr klein nehmen und die Betrachtung für beliebig viele Paare von benachbarten Horizontalebenen wiederholen. Wir erhalten also das Ergebnis: In einer inhomogenen schweren Flüssigkeit ist Gleichgewicht nur so möglich, daß in jeder wagerechten Schicht die Dichte konstant ist. In diesem Resultat ist gleich die Frage nach dem Gleichgewicht zweier übereinandergeschichteter, sich nicht mischender Flüssigkeiten verschiedener Dichte mit entschieden. Deren Gleichgewicht erfordert gemäß unserem Satz, daß die Trennungsfläche eine horizontale Fläche sei. Man kann natürlich die Betrachtung von Fig. 9 auch unmittelbar auf zwei übereinandergeschichtete homogene Flüssigkeiten anwenden, deren Trennungsfläche in zunächst unbekannter Weise zwischen unseren beiden Horizontalebenen verläuft und kommt so zum selben Ergebnis.

Fig. 9.



Bezüglich der Stabilität einer solchen Flüssigkeitsschichtung ist noch zu bemerken, daß sich immer die weniger dichte Flüssigkeit über der dichteren befinden muß. Die umgekehrte Schichtung ist labil; die geringste Störung bringt sie zum Umsturz.

Über den Beweis hierfür sei kurz bemerkt, daß man ihn wieder an Fig. 9 anknüpfen kann; man nimmt dabei eine gestörte, also z. B. etwas geneigte Trennungsschicht zwischen den beiden Horizontalebenen an und berechnet die dabei auftretenden Druckunterschiede. Im stabilen Falle suchen diese die Neigung der Trennungsschicht zu verkleinern, im labilen zu vergrößern.

Für stetig veränderliche Dichte gilt genau Entsprechendes. Stabilität ergibt sich, wenn die Dichte nach oben zu überall abnimmt. Im Gegensatz zu der stabil geschichteten inhomogenen Flüssigkeit stellt die homogene Flüssigkeit den Fall des indifferenten Gleichgewichts dar. Bei ihr können beliebige Teile willkürlich verschoben werden, ohne daß dadurch irgendwelche das Gleichgewicht störende Kräfte entstünden.

Was die Druckverteilung in der inhomogenen Flüssigkeit betrifft, so gilt für jede Schicht, in der die Dichte noch genügend homogen ist, die Gl. (1) dieses Paragraphen in der differentiellen Form:

$$dp = -\gamma\, dz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1a)$$

Ist γ als Funktion der Höhe z gegeben, so führt eine Integration zu der Beziehung

$$p = p_0 - \int_0^z \gamma\, dz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

§ 7. Gleichgewicht eines schweren Gases. Die Bedingungen für das Gleichgewicht einer schweren Gasmasse stimmen in allem Grundsätzlichen mit denen für das Gleichgewicht einer Flüssigkeit überein; die Gleichungen des vorigen Paragraphen können daher ohne weiteres auch hier übernommen werden. In vielen Fällen, so bei mäßiger Höhenausdehnung einer Gasmasse, kann das Raumgewicht der Gasmasse als räumlich konstant angesehen werden. Dann lassen sich Gl. (1) und (2) des vorigen Paragraphen anwenden, d. h. das Gas darf als eine homogene Flüssigkeit wie irgendeine andere angesehen werden. Bei großer, z. B. nach Kilometern zählender Höhenausdehnung ist dies aber nicht mehr zulässig. Die Druckunterschiede sind hier so groß, daß sich infolge der Zusammendrückbarkeit merklich verschiedene Dichten oben und unten ergeben. Auch Temperaturverschiedenheiten spielen vielfach eine Rolle. Hier muß also mit der Formel für inhomogene Flüssigkeiten gerechnet werden. Diese wird aber hier zweckmäßig etwas anders geschrieben, da γ nicht von vornherein als Funktion der Höhe z bekannt ist, sondern durch den Druck p bestimmt wird. Wir dividieren Gl. (1a) durch γ und integrieren. Das gibt

$$\int_p^{p_0} \frac{dp}{\gamma} = z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Dieses Integral gibt je nach dem Gesetz, nach dem die Temperatur verteilt ist, noch verschiedenen Wert. Wir wollen uns hier darauf beschränken, als wichtigstes Beispiel den Fall konstanter Temperatur zu behandeln. Das Raumgewicht γ, das als Gewicht der Volumeneinheit dem Volumen einer bestimmten abgegrenzten Gasmenge umgekehrt proportional ist, ist gemäß dem Boyle-Mariotteschen Gesetz dem Druck proportional, also

$$\gamma = \gamma_0 \cdot \frac{p}{p_0},$$

damit wird

$$\int_p^{p_0} \frac{dp}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma_0} \int_p^{p_0} \frac{dp}{p} = \frac{p_0}{\gamma_0} \ln \frac{p_0}{p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$\frac{p_0}{\gamma_0}$ ist dabei, wie leicht aus Gl. (1) zu entnehmen ist, die Höhe einer Flüssigkeitssäule von dem konstanten Raumgewicht γ_0, an deren unterem Ende der Druck p_0 und an deren oberem Ende der Druck Null herrscht. Man nennt diese Höhe die „Höhe der gleichförmigen Atmosphäre". In bezug auf die wirkliche Atmosphäre stellt sie nichts weiter als eine bequeme Rechengröße dar. Wir wollen sie hier als Beispiel zahlenmäßig ermitteln. Dazu benötigen wir eine Zahlenangabe über γ_0. Man kann solche Zahlenangaben gewinnen, indem man ein mit einem Hahn versehenes Gefäß, das vorher luftleer gepumpt ist, auf einer empfindlichen Waage wägt und es dann, nachdem man den Hahn geöffnet und den Temperaturausgleich [1])

[1]) Die Luft im Gefäß ist zunächst durch die Arbeitsleistung der äußeren Atmosphäre beim Eindringen in das Gefäß erwärmt.

abgewartet hat, zum zweitenmal wägt. Da es vorher leer war und jetzt mit Luft gefüllt ist, ist es notwendigerweise um das Gewicht G seines Luftinhalts schwerer geworden. Ermittelt man noch den Volumeninhalt V des Gefäßes, etwa dadurch, daß man es noch einmal luftleer pumpt und den Hahn unter Wasser öffnet, und das mit Wasser gefüllte Gefäß von neuem wägt, dann ergibt sich daraus das zu dem Druck p_0 am Boden gehörige $\gamma_0 = \frac{G}{V}$. Für jeden anderen Bodendruck p_0 wäre γ_0 proportional umzurechnen. Wir wollen der einfacheren Rechnung wegen annehmen, daß p_0 gerade $= 1\,\mathrm{kg/cm^2}$ beträgt. Dann ist für mittelfeuchte Luft von der Temperatur ϑ

$$\gamma = \frac{1{,}245}{1 + \alpha\vartheta}\,\mathrm{kg/m^3}$$

zu setzen. (Für einen Druck p_0 gleich einer physikalischen Atmosphäre $= 1{,}0333\,\mathrm{kg/cm^2}$ wäre statt 1,245 die Zahl 1,286 für mittelfeuchte und 1,293 für künstlich getrocknete Luft einzusetzen.)

Um nun $\frac{p_0}{\gamma_0}$ zu berechnen, muß man p_0 im gleichen Maßsystem wie γ_0 ausdrücken. Es ist $1\,\mathrm{kg/cm^2} = 10\,000\,\mathrm{kg/m^2}$, also ist

$$\frac{p_0}{\gamma_0} = \frac{10\,000}{1{,}245}(1 + \alpha\vartheta) = 8030\ (1 + \alpha\vartheta).$$

Die Dimension ist $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^2}} : \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} = \mathrm{m}$. Die Höhe der gleichförmigen Atmosphäre für mittelfeuchte Luft ist also (unabhängig vom Druck, aber abhängig von der Temperatur) $= 8030 \,.\, (1 + \alpha\vartheta)\,\mathrm{m}$. Wir setzen sie gleich H_0. Die Gl. (4) liefert dann zweimal angewandt:

$$z_1 = H_0 \ln \frac{p_0}{p_1}; \quad z_2 = H_0 \ln \frac{p_0}{p_2},$$

also

$$z_1 - z_2 = H_0 \ln \frac{p_2}{p_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

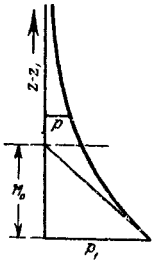
Dies ist die sogenannte barometrische Höhenformel (sie heißt so, weil die Drucke mit dem Barometer gemessen werden, vgl. § 9). Durch Umkehrung von Gl. (6) erhalten wir die Abhängigkeit des Druckes von der Höhe:

$$p = p_1 \,.\, e^{-\frac{z - z_1}{H_0}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Durch eine Betrachtung analog derjenigen, die an Fig. 8 angeknüpft wurde ist leicht zu erkennen, daß das Gewicht einer Luftsäule von der Grundfläche F, die von der Stelle z sich nach oben bis an die Grenze der Atmosphäre erstreckt, gleich Fp ist. p ist demnach unmittelbar gleich dem Gewicht der über der Stelle z befindlichen Luftsäule vom Querschnitt 1. Fig. 10 stellt den Inhalt von Formel (7) graphisch dar. Der Druck nimmt mit wachsender Höhe dauernd, aber immer schwächer ab. Er wird dabei für unendlich große Höhe gleich Null. Die Druckabnahme mit der Höhe läßt sich in der freien Atmosphäre leicht messend verfolgen, wenn man mit einem Druckmeßgerät

(Barometer) einen Turm oder Berg besteigt. Auch in einem mehrstöckigen Hause ist sie bereits bequem nachweisbar. Man kann die beobachteten Druckunterschiede, wenn die Lufttemperaturen mit festgestellt werden, zu einer (recht zuverlässigen) Bestimmung der Höhenunterschiede verwenden. Für Luftfahrzeuge ist dies die allgemein verwandte Methode der Höhenermittlung (bei bekannter Höhendifferenz läßt sich die Methode natürlich auch zur Bestimmung des mittleren Raumgewichts der zwischenliegenden Luftschicht verwenden).

Fig. 10.



Druckverteilung in einer Atmosphäre konstanter Temperatur.

Ist die Temperatur in der Luftmasse nicht konstant, so kann die Höhenformel immer noch für Höhenabschnitte angewendet werden, innerhalb denen die Temperaturunterschiede nicht mehr groß sind. Die zu jedem Höhenabschnitt gehörige Atmosphärenhöhe H_0 wird dann für den Mittelwert der Temperatur in dem Höhenabschnitt berechnet.

Es ist nun noch die Frage zu entscheiden, wann das Gleichgewicht einer geschichteten Gasmasse stabil ist und wann nicht. Daß die oberen Schichten leichter sind als die unteren, genügt nicht, und zwar deshalb nicht, weil eine Gasmasse bei einer Auf- oder Abwärtsbewegung unter anderen Druck kommt und dabei ihre Dichte ändert. Die richtige Antwort auf unsere Frage ist die folgende: Stabilität herrscht, wenn ein Gasteil, der in die Höhe gehoben wird, unter dem neuen Druck dichter ist als seine neue Umgebung, und wenn ein Gasteil, der herabgedrückt wird, unter dem neuen Druck weniger dicht ist als seine neue Umgebung. Denn in diesem Falle wird der Gasteil nach seiner alten Lage zurückstreben. Es gibt eine Schichtung (Temperaturverteilung) in einer Gasmasse, die in diesem Sinne der homogenen Flüssigkeit entspricht, die also indifferentes Gleichgewicht der Gasmasse bedeutet. Damit dies zutrifft, muß jeder Gasteil, der irgendwo weggenommen wird, nach der Verschiebung so in die neue Umgebung hineinpassen, als ob er ihr immer schon angehört hätte. Nun verhält sich der Gasteil bei der Druckänderung, solange Gelegenheit zu Wärmeaustausch fehlt, adiabatisch. Ist die Schichtung nun derart, daß Druck und Dichte sich nach der adiabatischen Zustandsänderung [vgl. § 5, Gl. (4)] verhalten (also p proportional γ^k, da γ sich dem Volumen reziprok verhält), so kommt tatsächlich jeder gehobene oder gesenkte Gasteil immer wieder in eine Umgebung von der Temperatur, die er durch seine eigene adiabatische Zustandsänderung selbst erhalten hat, und er hat dadurch auch gar keine Gelegenheit, Wärme auszutauschen. Diese „adiabatische Schichtung“ hat, wie man zeigen kann, auch das mit der homogenen Flüssigkeit gemein, daß sie durch kräftige Durchmischung aus einer ursprünglich anders gearteten Schichtung entsteht, ebenso, wie z. B. eine ursprünglich inhomogene geschichtete Salzlösung durch Umrühren homogen gemacht wird.

In atmosphärischer Luft ist die adiabatische Schichtung dadurch gekennzeichnet, daß die Temperatur für rund 100 m Höhe um 1° C abnimmt. Eine

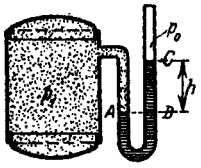
geringere Temperaturabnahme als dieser Betrag bedeutet bereits Stabilität, Temperaturzunahme nach oben also eine noch stärkere Stabilität. Eine stärkere Temperaturabnahme als 1° auf 100 m Höhe wird in der freien Atmosphäre im allgemeinen nicht gefunden, da sie labilen Zuständen entspräche. Man findet sie allerdings in der Nähe des Erdbodens, wenn dieser heißer ist als die Luft. Diese ist dann allerdings nicht im Gleichgewicht, sondern ist von vertikalen auf- und absteigenden Strömen durchsetzt.

§ 8. Wechselwirkung von Luftdruck und Flüssigkeitsdruck; Flüssigkeitsmanometer. Den Druckunterschied der Luft in einem Gefäß gegenüber der äußeren atmosphärischen Luft kann man, solange er nicht zu groß ist, sehr gut durch ein teilweise mit einer Flüssigkeit gefülltes U-förmiges Rohr messen, vgl. Fig. 11. Sieht man von dem Eigengewicht der Luft ab, so ergeben sich dabei folgende Beziehungen. An der Stelle A ist der Flüssigkeitsdruck gleich dem Luftdruck im Gefäß, p_1. In dem anderen Schenkel des „U-Rohres" ist in gleicher Höhe, also bei B, derselbe Druck vorhanden (kommunizierende Gefäße!); der freie Flüssigkeitsspiegel in diesem Gefäß sei bei C; dort ist der Flüssigkeitsdruck gleich dem Druck der Atmosphäre, p_0. Nach den Beziehungen von § 6 ist nun, wenn die Höhe $\overline{BC} = h$ gesetzt wird,

$$p_1 = p_0 + \gamma h.$$

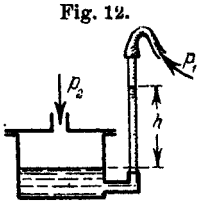
Das mit Flüssigkeit gefüllte U-Rohr ist also zum Messen solcher Druckunterschiede sehr geeignet. Es wird in verschiedenen Abänderungen praktisch angewandt. Um nicht an zwei Stellen (A und C in Fig. 11) Flüssigkeitshöhen ablesen zu müssen, gestaltet man häufig den einen Schenkel zu einem weiten Topf um, in dem dann die Spiegelbewegung sehr klein wird (vgl. Fig. 12). Für Ausführung der „Nullablesung" muß man hier beide Öffnungen mit der Atmosphäre verbinden. Für sehr kleine Druckunterschiede wendet man eine verfeinerte Höhenablesung (mit einer Art Kathetometer oder mit Beobachtung einer auf Berührung der Flüssigkeitsoberfläche einzustellenden Spitze mit einer Lupe) an, oder man verwendet geneigte Glas-

Fig. 11.



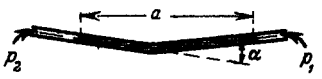
Hydrostatische Druckmessung (U-Rohr).

Fig. 12.



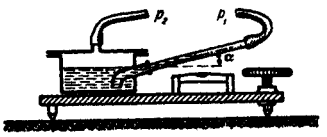
Flüssigkeitsmanometer.

Fig. 13.



Töplersche Drucklibelle.

Fig. 14.



Mikromanometer.

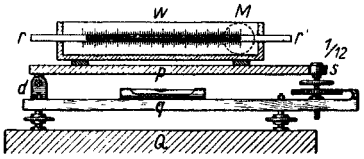
röhren wie bei der Töplerschen Drucklibelle (Fig. 13), oder bei dem Krellschen „Mikromanometer" (Fig. 14). Einer Verschiebung der Flüssigkeitssäule in dem Rohr um den Betrag x entspricht bei beiden Instrumenten eine

Spiegelhöhenänderung von $h = x \sin \alpha$ und daher ein Druckunterschied $p_2 - p_1 = \gamma x \sin \alpha$. Dabei ist es aber nicht leicht, die kleine Neigung α genügend genau zu bestimmen; man kann sich auch nicht ohne Prüfung auf die unbedingte Geradheit der Röhren verlassen. Deshalb empfiehlt sich für genauere Messungen eine Eichung.

Beim Krellschen Mikromanometer kann diese so vorgenommen werden, daß man zunächst den Durchmesser d des genau zylindrisch ausgedrehten Topfes mißt, und dann, nachdem die auf dem Grundbrett des Instruments angebrachte Libelle sorgfältig eingestellt ist, mehrmals passende abgewogene Mengen der Flüssigkeit in den Topf nachgießt und den jeweils zugehörigen Stand der Flüssigkeit im Rohr an der Skala abliest. Die zugegossenen Mengen breiten sich in dem Topfe aus und belasten so den ursprünglichen Flüssigkeitsspiegel mit einem Druck gleich dem abgewogenen Gewicht dividiert durch die Kreisfläche $\frac{\pi}{4} d^2$. Das Gleichgewicht des ursprünglichen Flüssigkeitssystems ist dabei dasselbe, als wenn ein gleicher Druck von der Luft ausgeübt worden wäre. Daß in Wirklichkeit die zugegossene Flüssigkeit sich mit der bereits im Topfe befindlichen mischt, ist für unsere Überlegung belanglos. Aus den zusammengehörigen Drucken und Flüssigkeitsständen läßt sich dann eine „Eichkurve" oder Eichtabelle ableiten.

Die Töplersche Drucklibelle läßt sich als äußerst empfindliches Gerät für kleinste Druckdifferenzen ausgestalten, wenn man die von Töpler selbst[1]) angegebenen Feinheiten beachtet. Die Röhre rr' in Fig. 15 enthält einen etwa 25 cm langen Faden einer nicht flüchtigen, leicht beweglichen Flüssigkeit (Xylol) und befindet sich in einem Wasserbade W mit Glaswänden unmittelbar vor einer Millimeterteilung. Das Bad selbst ruht auf einer Metallplatte p, deren Neigung mittels der Schraube s verstellt werden kann; die Verdrehung der Schraube kann an einem Index abgelesen werden. Da die Ganghöhe der Schraube bekannt ist, kann hiermit auch die Neigung der Platte p ermittelt werden. Ein an der Platte p befestigtes Mikroskop M gestattet die rechtsseitige Kuppe der Flüssigkeit in ihren Bewegungen zu beobachten. Ist die Nullstellung der Drucklibelle abgelesen (gleicher Druck bei r und r'), so läßt sich eine eintretende Druckdifferenz durch die Verschiebung der Flüssigkeitskuppe oder durch die Schraubendrehung, die sie rückgängig macht, messen. Die für die erstere Beobachtungsart erforderliche Eichung wird dadurch erhalten, daß die bei Verdrehung der Schraube s ohne Druckdifferenz erfolgende Kuppenverschiebung beobachtet und mit dem Neigungswinkel φ, der durch die Schraubenbewegung hervorgerufen wird, in Beziehung gebracht wird. Ist die Entfernung der beiden Enden des Flüssigkeitsfadens $= a$, so ist die hydrostatisch wirksame Höhendifferenz $h = a \sin \varphi$. Töpler konnte bei besonders empfindlicher Einstellung (sehr kleinem Knickwinkel ε) noch Druckdifferenzen von 10^{-8} kg/cm² $= 10^{-4}$ kg/m² nachweisen. (Der Knick ist in Fig. 15 in der Gegend des Buchstaben W zu denken; er ist nicht gezeichnet.)

Fig. 15.



Töplersche Drucklibelle.

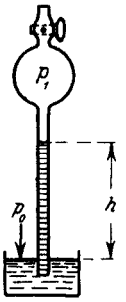
Die Verwendung der Flüssigkeitsmanometer hat zu einer besonderen Art von Druckeinheiten geführt, die praktisch sehr viel verwendet werden. Es liegt nahe, den Druck durch die Höhe der Flüssigkeitssäule selbst zu messen; man spricht deshalb, da die verschiedenen Flüssigkeiten ihres verschiedenen Raumgewichts wegen unterschieden werden müssen, von „Millimeter Wassersäule", „Millimeter Quecksilber", abgekürzt mm WS, mm QS usw. Es ist 1 mm WS $=$ 1 kg/m² $= 10^{-4}$ kg/cm², wie leicht durch Nachrechnen zu bestätigen ist (eine Wassermenge von 1 m² Grundfläche und 1 mm Höhe hat gerade 1 Liter Inhalt und wiegt 1 kg). Die erstere Beziehung ist besonders bequem zu merken; sie hat dem Druckmaß 1 kg/m² zu einer weiten Ver-

[1]) Wiedem. Ann. **34**, 790, 1888 und **56**, 609, 1895.

breitung in der Technik (Lüftungstechnik, Flugtechnik usw.) verholfen. Dabei ist Wasser als Meßflüssigkeit sehr wenig geeignet, sobald es sich um höhere Ablesegenauigkeit handelt, da es leicht unregelmäßig an den Wänden des Glasrohres hängt. Sehr viel besser sind alle fettlösenden Flüssigkeiten (Alkohol, Toluol, Xylol usw.). Für größere Druckunterschiede empfiehlt sich Quecksilber, das in reinem Zustand sehr saubere Einstellung in einem nicht zu engen Glasrohre liefert. Wegen des spezifischen Gewichtes 13,6 (genauer 13,595 bei 0°) ist 1 mm QS = 13,6 kg/m² = 0,001 36 kg/cm². Umgekehrt ist 1 kg cm² = 735,5 mm QS. Die Druckeinheit 1 mm QS wird aus meßtechnischen Gründen von den Physikern stark bevorzugt. Neuerdings wurde für sie die Bezeichnung „1 Tor" vorgeschlagen (zu Ehren von Toricelli, siehe § 9).

§ 9. Unterdruck. Barometer. Pumpt man aus dem Gefäß von Fig. 11 etwas Luft heraus, so daß der Druck dort kleiner wird als der äußere Atmosphärendruck, so wird die Flüssigkeit in dem Schenkel A des U-Rohres höher stehen als in dem Schenkel B, sie wird, wie man sagt, „in die Höhe gesaugt". Eine etwas abgeänderte Anordnung für das gleiche Experiment zeigt Fig. 16.

Fig. 16.



Man spricht in dem Fall der Fig. 11 von „Überdruck" in dem Gefäß, in dem Fall der Fig. 16 von „Unterdruck", und zwar versteht man unter der Zahlenangabe für den Überdruck oder Unterdruck jeweils die Druckdifferenz gegen die äußere Atmosphäre, die durch die Höhe h der Flüssigkeitssäule in Fig. 11 bzw. 16 gemessen wird.

Vom physikalischen Standpunkt erhebt sich nun die Frage, wie hoch es gelingt, eine Flüssigkeit in die Höhe zu saugen. In alter Zeit machte man sich für das Ansteigen einer Flüssigkeit beim Saugen eine „Erklärung", indem man von einem „horror vacui", von einer „Scheu vor dem Leeren" sprach, und man fühlte sich mit diesem Wort, das schließlich nur die Tatsache feststellte, zufrieden. Ob der horror vacui beliebig stark war oder Grenzen hatte, darüber wurden keine Untersuchungen angestellt. Das Mißgeschick von Florentiner Pumpenmachern, die bei einer Wasserpumpe das Saugventil mehr als 10 m über dem Wasserspiegel anbrachten und dann durch alle Mühe das Wasser nicht so hoch bringen konnten, gab den Anstoß, daß Galilei sich mit der Sache befaßte. Indessen hat erst sein Schüler Toricelli auf Grund eines Experiments mit Quecksilber, das auf seine Anregung hin sein Freund Viviani 1643 gemacht hatte, den richtigen Sachverhalt erkannt.

Von unserem Standpunkt aus ist die Antwort auf die oben gestellte Frage nicht schwer. Saugen ist nichts anderes, als weniger stark drücken, als die äußere Atmosphäre drückt. Den Druck in dem Gefäß von Fig. 16 kann man nicht kleiner machen, als er wird, wenn sämtliche Luft aus dem Gefäß weggepumpt wird. Er ist dann gleich Null. Die Flüssigkeitssäule

kann also höchstens so hoch steigen, daß ihre Höhe h dem vollen Luftdruck p_0 entspricht: $h = \frac{p_0}{\gamma}$. Das erwähnte Experiment Vivianis bestand nun darin, daß er eine zwei Ellen (120 cm) lange Glasröhre mit an einem Ende angeblasener Kugel von dem anderen, offenen Ende her ganz mit Quecksilber füllte und nun dieses Ende mit dem Finger verschloß, dann die Röhre umkehrte und mit dem Ende in ein flaches Gefäß mit Quecksilber brachte. Wurde nun der Finger weggezogen, so sank das Quecksilber, einen leeren Raum zurücklassend, auf $1^1/_4$ Elle (75 cm) über dem Quecksilberspiegel. Toricelli schloß daraus richtig, daß die so beobachtete Quecksilbersäule dem äußeren Luftdruck, oder wie man auch sagen kann, dem Gewicht einer Luftsäule vom gleichen Querschnitt, die bis an die Grenzen der Atmosphäre reicht, Gleichgewicht hält. Toricelli beobachtete auch schon, daß die Quecksilbersäule nicht immer dieselbe Höhe hatte, und schloß daraus, daß der Luftdruck gewissen Schwankungen unterworfen sei. Diese Tatsache ist für die Meteorologie von großer Wichtigkeit geworden. Toricelli schloß auch bereits, daß der Luftdruck auf einem Berge geringer sein müsse als im Tal und deshalb die Quecksilbersäule dort niedriger stehen müsse als unten. Den Nachweis hierfür hat einige Jahre später Perrier auf Anregung von Pascal erbracht, indem er die Höhe der Quecksilbersäule auf dem Puy de Dome und am Fuße dieses 975 m hohen Berges maß und einen Unterschied von 3 Zoll in dem verlangten Sinne feststellte. Von Pascal stammt auch der Name Barometer für das Gerät, der sich allgemein eingebürgert hat. Dieser Name (vom griechischen barys = schwer) deutet an, daß mit diesem Instrument das Gewicht der über dem Ort lagernden Luftsäule gemessen wird.

Hier sei noch eine auf das Barometer begründete Druckeinheit erwähnt, die sogenannte „physikalische Atmosphäre". Der mittlere Barometerstand in der Höhe des Meeresspiegels beträgt rund 760 mm QS. Man ist übereingekommen, diesen Barometerstand bei 0^0 Quecksilbertemperatur als Normalzustand der Atmosphäre anzusehen und nennt den zugehörigen Luftdruck auch „eine Atmosphäre". Der Zusatz „physikalisch" wird gemacht, weil, wie bereits früher erwähnt, die von den Ingenieuren verwendete technische Atmosphäre = 1 kg/cm² daneben steht. Da das spezifische Gewicht des Quecksilbers bei 0^0 C = 13,595 ist, also 1 cm³ 13,595 g wiegt, entspricht einer Quecksilbersäule von 76 cm ein Druck von

$$76 \,.\, 13{,}596 = 1033{,}2 \text{ g/cm}^2 = 1{,}0332 \text{ kg/cm}^2.$$

Diesem Druck entspricht, wie hier angemerkt werden mag, eine Wassersäule von 10,332 m Höhe („Wasserbarometer"). Die Saughöhe von Pumpen muß also geringer sein als dieser Betrag (wegen schädlicher Räume und Undichtheiten zweckmäßig nicht über 6 bis 7 m).

Da in der vorstehenden Definition der physikalischen Atmosphäre die Erdanziehung eine Rolle spielt, und diese nicht an allen Stellen der Erde denselben Wert hat, muß für höhere Genauigkeitsbedürfnisse bei der Definition der Druckeinheiten ein bestimmter Wert der Erdbeschleunigung g zugrunde

gelegt werden. Man hat als Normalschwere den Wert 980,665 cm/s², nämlich den Wert, der dem 45. Breitengrad im Meeresniveau entspricht, festgesetzt. Unter einer anderen Schwere ($= g$) wird damit die Normalatmosphäre durch $\frac{1{,}0332 \,.\, 980{,}665}{g}$ örtliche Kilogramm auf das Quadratzentimeter gemessen. Um von diesen etwas willkürlichen Festsetzungen frei zu werden, hat man eine an das CGS-System angeschlossene Druckeinheit vorgeschlagen, und zwar wird das Millionenfache der Druckeinheit 1 Dyn/cm² als „Bar" bezeichnet. Dem Bar entspricht bei der Normalschwere eine Quecksilbersäule von 750,06 mm Höhe.

§ 10. Flüssigkeitsgleichgewicht bei anderen Kraftfeldern. Bei den Darlegungen von § 6 bis 9 ist ein homogenes Schwerefeld zugrunde gelegt worden, also eine überall gleich starke und gleich gerichtete Erdbeschleunigung vorausgesetzt worden. Dies trifft auf mäßige Räume genügend genau zu und reicht daher für die meisten Anwendungen aus. Handelt es sich aber z. B. um Anwendung auf ein Gebiet auf der Erde, das nicht mehr klein gegen den Erdradius ist, dann muß davon Rechenschaft genommen werden, daß die Erdbeschleunigung in Größe wie Richtung veränderlich ist. Bei einer relativ zu einem gleichförmig rotierenden Gefäß ruhenden Flüssigkeit hat man zur Schwere die Zentrifugalbeschleunigung hinzuzunehmen, um mit dem rotierenden Raume wie mit einem ruhenden rechnen zu können. Wir wollen deshalb ganz allgemein die Frage behandeln, wie es mit dem Gleichgewicht einer homogenen oder nicht homogenen Flüssigkeit in einem Kraftfeld allgemeiner Art steht, dessen Kraft auf die Masseneinheit (d. h. dessen Beschleunigung) von Ort zu Ort nach Stärke und Richtung veränderlich ist.

Wir knüpfen an die Erörterungen von § 6 an und stellen leicht fest, daß wie dort in jeder Richtung senkrecht auf der jeweiligen Kraftrichtung der Druck sich nicht ändern kann (Gleichgewicht eines kleinen Prismas nach Fig. 6 mit Achse senkrecht zur Kraftrichtung). Weiter stellen wir fest, daß in der Kraftrichtung der Druck zunehmen muß, und zwar so, daß

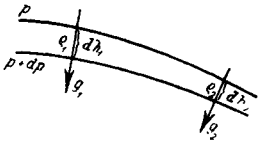
$$dp = g\varrho\, dh \quad \ldots \quad (1)$$

ist (Gleichgewicht eines kleinen Prismas entsprechend Fig. 8 mit der Höhe dh parallel der Kraftrichtung, dp Druckanstieg, g Stärke des Kraftfeldes). Aus der ersteren Beziehung folgt zunächst, wenn man die Gesamtheit der zur Kraftrichtung senkrechten Richtungen in einem Punkt zusammenfaßt, daß auf dem zur Kraftrichtung senkrechten Flächenelement der Druck konstant sein muß. Für den Fall, daß sich die aneinander angrenzenden Flächenelemente zu einer endlichen Fläche zusammenfassen lassen, wenn also, wie man sagt, das Kraftfeld Normalflächen besitzt, dann folgt aus obigem, daß längs jeder solchen Normalfläche der Druck konstant ist. Wenn ein Kraftfeld keine Normalfläche besitzt, dann ist auch kein Gleichgewicht einer Flüssigkeit in diesem Kraftfeld möglich[1]).

[1]) In diesem Falle würde eine senkrecht zu den Kraftlinien gezogene Schleifenlinie, die zu derjenigen Kraftlinie, von der sie ausging, zurückführt, nicht wieder

Wir nehmen nun an, daß das Kraftfeld Normalflächen besitzt, und betrachten zwei solche Normalflächen mit den Drucken p und $p + dp$. Wir greifen, vgl. Fig. 17, zwei Stellen 1 und 2 heraus und stellen fest, daß dp gemäß der obigen Beziehung einerseits $= g_1 \varrho_1 dh_1$, andererseits auch $g_2 \varrho_2 dh_2$ ist. In dem Falle, daß ϱ entweder konstant oder eine Funktion von p ist (homogene Flüssigkeit oder homogenes Gas, vgl. § 6 und 7), ist im letzteren Falle wegen $p_1 = p_2$, $\varrho_1 = \varrho_2$, und es bleibt $g_1 dh_1 = g_2 dh_2$. Nun ist $g dh$ die Arbeit, die von der Feldkraft beim Übergang von der einen Normalfläche zur anderen geleistet wird. Daß nun, wie unsere Betrachtung lehrt, diese Arbeit zwischen den beiden Normalflächen an allen Stellen denselben Wert hat, ist das Kennzeichen dafür, daß unser Kraftfeld ein Potential hat. Die Normalflächen sind dann Flächen konstanten Potentials: Führen wir das Potential U an einem Punkte A durch die Formel

Fig. 17



$$U = \int^{A} g dh \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ein, so erkennt man, daß

$$dp = \varrho dU \quad \text{oder} \quad dU = \frac{dp}{\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

geschrieben werden kann, woraus

$$U_A - U_B = \int_B^A \frac{dp}{\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

folgt. In dem hier angenommenen Falle einer homogenen Flüssigkeit oder eines homogenen Gases läßt sich die rechte Seite ausrechnen, und man erhält dann den Druck unmittelbar als Funktion des Potentials. Diese Ergebnisse lassen sich also wie folgt zusammenfassen:

Im Falle der homogenen Flüssigkeit bzw. des homogenen Gases ist nur Gleichgewicht möglich, wenn das Kraftfeld ein Potential hat. Die Flächen konstanten Potentials, die senkrecht zur Feldkraft verlaufen, sind gleichzeitig auch Flächen konstanten Druckes. Der Druck steigt in der Richtung der Feldkraft an, und zwar ist $dp = \varrho dU$.

Bei der inhomogenen Flüssigkeit ist der Fall denkbar, daß zwar $g_1 dh_1 \neq g_2 dh_2$ ist, aber durch geeignete Verteilung der Dichte überall

$$\varrho_1 g_1 dh_1 = \varrho_2 g_2 dh_2$$

ist. Gleichgewicht wäre dann vorhanden, aber es ist leicht zu sehen, daß das Gleichgewicht labil wäre, denn man braucht nur Verschiebungen von

an den Ausgangspunkt zurücklaufen, sondern je nach ihrem Umlaufssinn tiefer oder höher als dieser auf der Kraftlinie einmünden. Ein Beispiel eines Vektorfeldes dieser Art kann z. B. gewonnen werden, indem man zunächst zwei parallele Ebenen durch eine Schar zu ihnen senkrechter, also unter sich paralleler Geraden verbindet, nun die eine Ebene gegen die andere um eine der Geraden als Achse etwas verdreht und die jetzt schraubenartig angeordneten Geraden als Kraftlinien betrachtet.

Flüssigkeit längs der Normalfläche auszuführen, die keinerlei Arbeit erfordern, und hat dadurch, da jetzt die Verteilung der Dichte geändert ist, das Gleichgewicht gestört. Wenn man sich also auf stabile Zustände beschränken will, so kommen auch hier nur Kraftfelder in Betracht, die ein Potential besitzen. Ist aber $g_1 dh_1 = g_2 dh_2$, so muß zur Erfüllung des Gleichgewichts auch $\varrho_1 = \varrho_2$ sein. Wir stellen also fest:

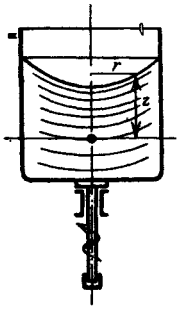
Eine stabile Lagerung einer inhomogenen Flüssigkeit ist nur möglich, wenn das Kraftfeld ein Potential besitzt. Die Flächen konstanten Potentials sind gleichzeitig Flächen konstanten Druckes und konstanter Dichte.

Die Formeln (3) und (4) sind also hier wieder verwendbar. Die Bedingungen für die Stabilität der Schichtung sind dieselben, wie sie in § 6 und 7 für das homogene Schwerefeld auseinandergesetzt wurden.

Die in der Physik vorhandenen Kraftfelder haben, wenn man von gewissen, durch elektrische Ströme in magnetischen Feldern hervorgerufenen Kräften absieht, fast immer ein Potential, so daß die obige Forderung eines Potentials praktisch kaum eine Einschränkung bedeutet. Von praktischer Bedeutung ist aber die Forderung, daß auf allen Flächen konstanten Potentials die Dichte je konstant sein muß. Diese Bedingung kann z. B. dadurch verletzt werden, daß die Flüssigkeit oder das Gas örtlich erwärmt wird, wodurch sich die Dichte dort verringert. In einem solchen Falle ist kein Gleichgewicht mehr möglich, die erwärmte Flüssigkeit setzt sich und damit auch ihre Nachbarschaft in Bewegung, und das Ganze kommt erst zur Ruhe, wenn die wärmsten Teile über den anderen geschichtet liegen.

Die freie Oberfläche einer Flüssigkeit oder die Grenze einer Flüssigkeit gegen eine andere sich nicht mit ihr mischende Flüssigkeit von anderer Dichte folgt immer einer Fläche konstanten Potentials; man findet deshalb für die Flächen gleichen Potentials („Äquipotentialflächen") auch die Bezeichnung „Niveaufläche" (freie Oberfläche oder Niveau einer gedachten Flüssigkeit). Bei der Erdvermessung bildet die Meeresoberfläche die grundlegende Niveaufläche, auf die alle Höhen bezogen werden.

Fig. 18.



Flüssigkeit in rotierendem Gefäß.

Die Anwendung der im vorstehenden dargelegten Gesetze möge an einem einfachen Beispiel erläutert werden. Es sei das Gleichgewicht einer homogenen schweren Flüssigkeit behandelt, die in einem gleichförmig um eine senkrechte Achse rotierenden Gefäß in relativer Ruhe ist. Wir stellen zunächst den Ausdruck für das Potential auf, das sich additiv aus einem durch die Schwerkraft und einem durch die Zentrifugalkraft erzeugten Anteil zusammensetzt.

Nehmen wir Zylinderkoordinaten r und z an, vgl. Fig. 18, und nehmen die z-Koordinate nach oben positiv an, dann wird der Schwereanteil des Potentials $U_1 = U_0 - gz$, wo g die Erdbeschleunigung und U_0 ein willkürlicher Anfangswert ist. Für den Anteil durch Zentrifugalkraft hat man zunächst den Wert der Beschleunigung $= \omega^2 r$ zu setzen, mit $\omega =$ der

gemeinsamen Winkelgeschwindigkeit des Gefäßes und der Flüssigkeit. Daraus folgt durch Integration in Richtung dieser Beschleunigung, also in Richtung von r, der zweite Anteil des Potentials zu

$$U_2 = \frac{\omega^2 r^2}{2}.$$

Im ganzen ist also

$$U = U_1 + U_2 = U_0 - gz + \frac{\omega^2 r^2}{2}$$

Die Flächen gleichen Potentials ergeben mit $U = const$:

$$z = const + \frac{\omega^2 r^2}{2g}.$$

Die freie Oberfläche und alle Flächen gleichen Druckes sind also Paraboloide mit dem gemeinsamen Parameter g/ω^2.

Der Druck selbst wird wieder $p = p_0 + \varrho U$, also mit $\varrho g = \gamma$

$$p = const + \gamma\left(-z + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right)$$

Zweiter Abschnitt.

Kinematik der Flüssigkeiten. Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeit.

1. Vorbemerkung.

Die strömenden Bewegungen der Flüssigkeiten und die der Gase zeigen so viel Gemeinsames, daß es zweckmäßig erscheint, ihre Behandlung nicht zu trennen. Die Gase sind zwar in viel höherem Maße zusammendrückbar als die Flüssigkeiten. Die Frage ist aber hier die, ob sie bei dem jeweils betrachteten Strömungsvorgang merkliche Zusammendrückungen erfahren oder nicht. Zu merklicher Zusammendrückung gehören beträchtliche Druckänderungen. Bei kleinen und mäßig großen Geschwindigkeiten, sowie bei mäßigen Höhenabmessungen der strömenden Gasmassen bleiben die Druckänderungen aber gering gegenüber dem im Mittel vorhandenen Druck, und die Volumenänderungen sind dann so klein, daß man sie zur Vereinfachung der Rechnung meist ganz vernachlässigt. Die Gasströmungen unterscheiden sich dann in nichts mehr von denen volumenbeständiger Flüssigkeiten. Betrachtet man Volumenänderungen von 1 v. H. als vernachlässigbar, so darf man bei Strömungen atmosphärischer Luft von gewöhnlicher Temperatur die Formeln für volumenbeständige Strömung anwenden für Geschwindigkeiten des Gases bis zu rund 50 m/sec und für Höhenausdehnungen bis zu 100 m (vgl. § 4b und I. Abschn., § 7). (Die Volumenänderungen sind rund 10 v. H. bei 160 m/sec und 1000 m Höhe). Die Volumenänderungen werden sehr beträchtlich und beeinflussen die Strömungsform in fühlbarer Weise, wenn die Strömungsgeschwindigkeiten von der Größenordnung der Schallgeschwindigkeit (rund 340 m/sec) werden. Bei Strömungsgeschwindigkeiten, die größer als die Schallgeschwindigkeit sind, ergibt sich sogar ein gegenüber dem bei gewöhnlichen Flüssigkeiten üblichen Verhalten völlig geänderter Charakter der Strömung.

In diesem und dem folgenden Abschnitt werden hauptsächlich Strömungen ohne merkliche Volumenänderung behandelt werden. Um hierbei nicht immer von „Flüssigkeiten und Gasen“ sprechen zu müssen, wird im folgenden das Wort „Flüssigkeit“ als Sammelbegriff für Flüssigkeiten und Gase gebraucht werden. Die Gase wird man im Sinne dieses Sprachgebrauchs als „zusammendrückbare Flüssigkeiten“ bezeichnen. Von den Besonderheiten der Bewegungen mit starker Volumenänderung wird im vierten Abschnitt berichtet werden.

2. Kinematik der Flüssigkeiten.

§ 1. Darstellungsmittel. Von den strömenden Bewegungen einer Flüssigkeit würde man dadurch ein erschöpfendes Bild gewinnen können, daß man von jedem Flüssigkeitsteilchen für jeden Zeitpunkt den Ort angibt, wo es sich aufhält; seine Ortsänderung in der Zeit liefert dann seine Geschwindigkeit und Beschleunigung. Mathematisch kann man zu diesem Zwecke so verfahren, daß man zunächst zur Unterscheidung der einzelnen Teilchen voneinander ein besonderes, mit den Flüssigkeitsteilchen fest verbundenes, im Raume aber bewegliches Koordinatensystem einführt. Das kann z. B. so geschehen, daß man zunächst eine Flächenschar $a = const$ betrachtet, wobei a in irgendeiner Anfangslage als Funktion der Raumkoordinaten x, y, z gegeben sein kann. Nimmt man noch zwei weitere Flächenscharen $b = const$ und $c = const$ dazu, die man so wählt, daß eine a-Fläche, eine b-Fläche und eine c-Fläche sich immer nur in einem einzigen Punkte schneiden, dann ist das Flüssigkeitsteilchen in diesem Schnittpunkt durch die Werte von a, b und c vollständig gekennzeichnet. Nach unserer Festsetzung soll nun ein Flüssigkeitsteilchen die „Flüssigkeitskoordinaten" a, b und c dauernd beibehalten, was darauf hinauskommt, daß jede Fläche $a = const$, und ebenso jede Fläche $b = const$ oder $c = const$ dauernd aus denselben Flüssigkeitsteilchen besteht. Die ursprüngliche Wahl der Flüssigkeitskoordinaten ist dabei willkürlich und nur durch Zweckmäßigkeitsgründe bestimmt. Man kann z. B. auch die gewöhnlichen Koordinaten in irgendeiner Anfangslage oder Ruhelage als Flüssigkeitskoordinaten wählen.

Die Aufgabe, die Bewegung, d. h. Ortsänderung aller Teilchen anzugeben, besteht jetzt darin, die Werte der augenblicklichen Koordinaten x, y, z des Teilchens als Funktionen der Zeit und der „Flüssigkeitskoordinaten" a, b, c des Teilchens anzugeben. Man hat also

$$\left.\begin{aligned} x &= F_1(a, b, c, t) \\ y &= F_2(a, b, c, t) \\ z &= F_3(a, b, c, t) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Zur vollständigen Beschreibung des Zustandes der strömenden Flüssigkeit gehört noch eine Aussage über den Druck p, und bei veränderlicher Dichte ϱ auch eine Aussage über diese. Die wirkliche Durchführung dieses Programms bis zum numerischen Endresultat gelingt aber nur in einigen dafür besonders geeigneten Fällen. Da es schließlich auch nicht so wichtig ist, die individuellen Schicksale der einzelnen Teilchen zu erfahren, begnügt man sich meist mit einer einfacheren Darstellungsweise, die darauf ausgeht, lediglich den an jedem Orte und zu jeder Zeit vorhandenen Strömungszustand näher zu beschreiben, ohne nach dem Verbleib der einzelnen Flüssigkeitsteilchen zu fragen. Handelt es sich um eine zeitlich gleichbleibende Strömung („stationäre Strömung"), so hat man hierzu nur für jeden Ort des durchströmten Raumes die Geschwindigkeit nach Größe und Richtung anzugeben, wozu noch entsprechende Angaben über den Druck und gegebenenfalls die Dichte hinzu-

kommen. Ändert sich aber die Strömung in der Zeit, so sind solche Angaben für jeden Zeitmoment erforderlich. Mathematisch werden diese Angaben meist in der Form geleistet, daß man die drei rechtwinkligen Komponenten u, v, w der Geschwindigkeit (und gegebenenfalls auch den Druck p und die Dichte ϱ) als Funktionen der Raumkoordinaten x, y, z und der Zeit t angibt, also für u, v, w in Formeln:

$$\left.\begin{aligned} u &= f_1(x, y, z, t) \\ v &= f_2(x, y, z, t) \\ w &= f_3(x, y, z, t) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Man pflegt das Formelsystem (1) nach Lagrange, das System (2) nach Euler zu benennen, trotzdem schon Euler beide gekannt hat.

Wenn es in einem Einzelfalle wünschenswert ist, die Bahn eines Flüssigkeitsteilchens zu verfolgen, so sind die drei simultanen Gleichungen $dx = u\,dt$, $dy = v\,dt$, $dz = w\,dt$ zu integrieren. Da die drei Integrationskonstanten unmittelbar als Flüssigkeitskoordinaten a, b, c gedeutet werden können, kommt man hiermit auf die Darstellung (1) zurück.

Um eine anschaulichere Darstellung vom augenblicklichen Strömungszustand einer Flüssigkeit zu gewinnen, hat man die sogenannten Stromlinien eingeführt, die ganz analog den „Kraftlinien" bei den Kraftfeldern sind, nämlich Linien, die überall in der Richtung der Strömung verlaufen, d. h. deren Tangente überall die Richtung des Geschwindigkeitsvektors zeigt.

Die Differentialgleichungen der Stromlinien heißen:

$$dx : dy : dz = u : v : w.$$

Bei einer stationären Bewegung stimmen die Stromlinien mit den Bahnen der Teilchen überein, bei der zeitlich veränderlichen Bewegung dagegen durchaus nicht, da die Stromlinien ein Bild der augenblicklich nebeneinander vorhandenen Geschwindigkeitsrichtungen geben, die Bahnen aber die im Laufe der Zeit von einem Teilchen nacheinander eingenommenen Geschwindigkeitsrichtungen zeigen.

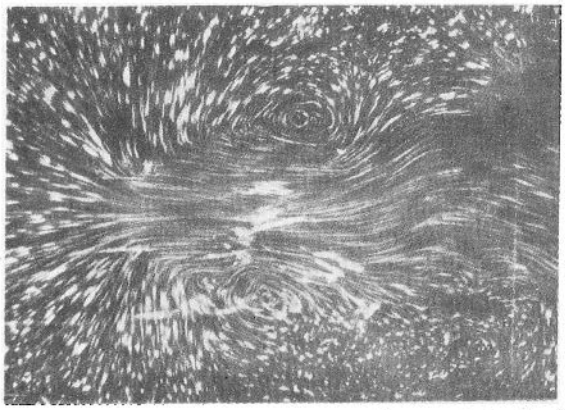
Es mag hier darauf aufmerksam gemacht werden, daß die Stromlinien ein und derselben Strömung, ebenso wie die Bahnlinien, ganz verschiedenes Aussehen haben, wenn das Bezugssystem gewechselt wird, wenn also z. B. bei der Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit der Beobachter relativ zu der ungestörten Flüssigkeit in Ruhe ist, und ein andermal sich mit dem Körper mitbewegt, so daß für ihn nun der Körper ruht und die Flüssigkeit dem Körper entgegenströmt.

Die Stromlinien können sichtbar gemacht werden, wenn man auf die Flüssigkeitsoberfläche oder in das Flüssigkeitsinnere kleine Teilchen streut, die die Bewegung der Flüssigkeit mitmachen. Bei einer kurzen Zeitaufnahme zieht jedes Teilchen auf der photographischen Platte einen kurzen Strich. Diese Striche fügen sich bei hinreichend dichter Bestreuung, wenn man die Aufnahmen betrachtet, zu einem Stromlinienbilde zusammen (Bahnlinien würde man erhalten, wenn man bei wenig dichter Bestreuung lange Zeitaufnahmen macht). Die beiden Bilder stellen gleichzeitige Aufnahmen der Bewegung einer Platte in ruhender Flüssigkeit von zwei Bezugssystemen aus dar, die eine (Fig. 19) ist von einer ruhenden Kamera, die andere (Fig. 20) von einer mit der Platte mitbewegten Kamera aufgenommen. Die Aufnahmen

stammen von Prof. Fr. Ahlborn, Hamburg, und sind mit Lykopodium als Bestreuung erhalten. Die Belichtung solcher Aufnahmen erfolgt zweckmäßig durch eine Mischung von Blitzlicht- und Zeitlichtpulver.

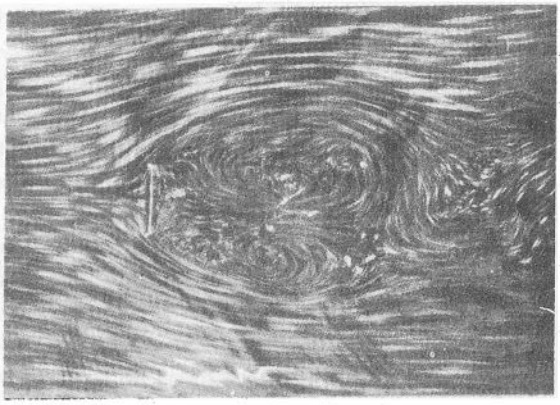
Zieht man durch alle Punkte einer kleinen geschlossenen Kurve die Stromlinien, so bilden diese, wenn das „Geschwindigkeitsfeld" überall stetig ist, auf beliebig lange Erstreckung eine Röhre; diese hat die besondere Eigen-

Fig. 19.



Strömung um eine bewegte Platte, nach Ahlborn. Ruhende Kamera.

Fig. 20.



Strömung um eine bewegte Platte, nach Ahlborn. Kamera fährt mit der Platte an.

schaft, daß die Flüssigkeit in ihr in dem betrachteten Augenblick wie in einer festen Röhre strömt (denn sie strömt definitionsgemäß parallel den Stromlinien; ein Durchdringen durch die Röhrenwand würde eine Geschwindigkeitskomponente quer zu dieser, also quer zu den Stromlinien voraussetzen, was deren Definition widerstreitet). Man nennt solche Röhren „Stromröhren", ihr flüssiger Inhalt wird als „Stromfaden" bezeichnet. Bei stationären Bewegungen bleiben die Stromröhren dauernd bestehen, und die

Teilchen in ihnen fließen dauernd darin wie in einer festen Röhre. Bei nichtstationären Bewegungen dagegen sind in einem späteren Augenblick im allgemeinen andere Teilchen miteinander durch Stromröhren verbunden als vorher. Man kann den ganzen von der Flüssigkeit erfüllten Raum in solche Stromröhren aufgeteilt denken und erhält damit ein sehr anschauliches Bild von der Flüssigkeitsströmung. Bei vielen einfacher gearteten Aufgaben, besonders Strömungen durch Röhren und Kanäle, ist es erlaubt, den ganzen von der Strömung erfüllten Raum als einen einzigen Stromfaden anzusehen. Man kümmert sich dann nicht um die Unterschiede der Geschwindigkeiten in einem Querschnitt, sondern strebt nur Aussagen über die mittlere Geschwindigkeit dortselbst an. Von diesem Verfahren machen besonders die Ingenieure bei ihren praktischen Berechnungen einen umfangreichen Gebrauch.

§ 2. Kontinuität. Bei den wirklichen Strömungen der Flüssigkeiten und Gase verschwindet nirgends Materie, noch entsteht irgendwo neue Materie. Es ergibt sich daher bei den von uns betrachteten Geschwindigkeitsfeldern die Aufgabe, dafür zu sorgen, daß sie mit der Tatsache der Konstanz der Materie im Einklang stehen. Am einfachsten wird die Formulierung bei den stationären Bewegungen, wenn die Gestalt der Stromlinien bereits hinreichend bekannt ist. Man betrachtet dann einen Stromfaden und hat nur auszudrücken, daß durch jeden Querschnitt desselben in der Zeiteinheit gleich viel Masse strömt. (Wäre diese Masse für zwei Querschnitte nicht gleich, so müßte der Masseninhalt des Stromfadens zwischen den zwei Querschnitten unbegrenzt zu- oder abnehmen, was dem stationären Zustand widersprechen würde.) Ist F der Querschnitt des Stromfadens an einer bestimmten Stelle, w [1]) die mittlere Geschwindigkeit in diesem Querschnitt und ϱ die Dichte dortselbst, so ist das in der Zeiteinheit durch den Querschnitt fließende Flüssigkeitsvolumen $= Fw$, und die in der Zeiteinheit hindurchfließende Masse $= \varrho Fw$. Die Kontinuität fordert also, daß ϱFw in allen Querschnitten desselben Stromfadens denselben Wert haben muß. Hieraus folgt auch, daß ein Stromfaden einer stationären Strömung im Innern der Flüssigkeit nirgends aufhören kann. Er kann sich von einer Grenze des betrachteten Raumes bis an eine andere Grenze dieses Raumes erstrecken, oder er kann in sich zurücklaufen.

Handelt es sich um Strömungen, bei denen keine Volumenänderungen auftreten, also z. B. um solche einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit, so gelten die im vorstehenden für die durch einen Querschnitt fließende Masse ausgesprochenen Beziehungen auch für das Volumen, und da hier keinen Augenblick lang durch einen Querschnitt eines Stromfadens mehr Volumen hindurchfließen kann als durch irgendeinen anderen, kann hier auch die Be-

---

[1]) Der Buchstabe w für Strömungsgeschwindigkeiten (statt v) ist deshalb gewählt, weil bei Rechnungen über die Strömungen von Gasen mit merklicher Volumenänderung mit v das Volumen der Masseneinheit bezeichnet zu werden pflegt, im Einklang mit der Bezeichnungsweise der Thermodynamik, die in diese Dinge mit hineinspielt.

schränkung auf stationäre Bewegungen fallen. Für volumenbeständige Strömungen gilt also allgemein

$$Fw = const \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

d. h. die Geschwindigkeit ist dem Querschnitt des Stromfadens umgekehrt proportional. Teilt man den ganzen von der Flüssigkeit durchströmten Raum in lauter Stromröhren auf, durch die sämtlich in der Zeiteinheit gleiche Flüssigkeitsmengen fließen, so werden sich da, wo die Geschwindigkeit groß, also der Stromfadenquerschnitt klein ist, viele Stromfäden zusammendrängen, da wo die Geschwindigkeit klein ist, werden sie sich entsprechend weiter ausdehnen. Die Zahl der Stromfäden, die jeweils die Flächeneinheit durchsetzen, ist proportional zu der Geschwindigkeit an diesem Orte. Das Stromröhrenbild dient also bei der volumenbeständigen Strömung nicht nur durch seine Richtung an jedem Orte, sondern auch durch seine Dichtigkeit zur Veranschaulichung der Strömung.

Die hier erörterten Beziehungen werden besonders handgreiflich in solchen Fällen, wo man die ganze Strömung als einen einzigen Stromfaden behandeln darf. Hier geben die vorgegebenen Querschnitte gleich die Stromfadenquerschnitte ab, und es läßt sich die mittlere Geschwindigkeit an jeder Stelle einer derartigen volumenbeständigen Strömung aus der Beziehung

$$Fw = Q$$

ermitteln, wobei Q das in der Zeiteinheit geförderte Volumen („Fördervolumen", „Ergiebigkeit" der Strömung) bedeutet.

Für Strömungen mit Volumenänderung gilt in gleicher Weise

$$\varrho F w = M,$$

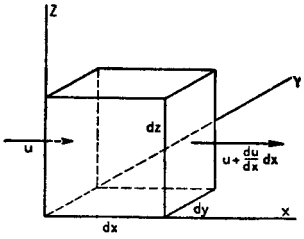
wo M die in der Zeiteinheit geförderte Masse ist. Da hier aber meist die Dichte ϱ erst im Zusammenhang mit dem Druck bestimmt werden kann, läßt sich die Geschwindigkeit nicht aus der Kontinuität allein ermitteln (vgl. hierüber § 15).

Bei solcher Art der Darstellung hat man, sowie es sich um stationäre volumenbeständige Strömungen handelt, nur noch eine unabhängige Veränderliche, nämlich die längs der Röhrenmittellinie gemessene Entfernung des betreffenden Querschnitts von irgendeinem Anfangspunkt. Man spricht in diesem Zusammenhang von „eindimensionaler Behandlung", im Gegensatz zu der dreidimensionalen Behandlung, bei der die räumliche Veränderlichkeit der Geschwindigkeit und der übrigen Größen voll berücksichtigt wird. Soweit es sich um Wasser handelt, faßt man die Gesamtheit der eindimensional behandelten Aufgaben unter dem Sammelnamen Hydraulik zusammen. Die mehrdimensional behandelten Aufgaben werden dagegen unter dem Namen Hydrodynamik zusammengefaßt. Bei Aufgaben, die aus dem Gebiet der Luftfahrt und aus anderen Anwendungsgebieten der Luftströmungen stammen, verwendet man auch gern den Namen Aerodynamik.

Bei der dreidimensionalen Behandlung, wo gewöhnlich die rechtwinkligen Komponenten u, v, w der Geschwindigkeit als Funktionen der Raumkoordinaten x, y, z berechnet werden, drückt man die Kontinuität dadurch aus, daß man verlangt, daß in ein kleines Parallelepiped mit den Seiten dx, dy

und dz ebensoviel einströmt als aus ihm ausströmt. Für volumenbeständige Strömungen, die hier allein betrachtet werden sollen, drückt sich dieses folgendermaßen aus, vgl. Fig. 21[1]): In der X-Richtung wird durch die Geschwindigkeitskomponente u in der Sekunde die Flüssigkeitsmenge $dy.dz.u$ in das Parallelepiped hineingetragen, und auf der entgegengesetzten Seite, wo u bereits in $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ geändert ist, eine Menge $dy \cdot dz \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)$ hinausgetragen. Es tritt also die Menge $dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$ mehr aus als ein. Ähnliche Beträge liefern die Y- und Z-Richtung. Die Bedingung, daß im ganzen ebensoviel ausströmt als einströmt, erhält demnach die Form

Fig. 21.



$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \ldots \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Dies ist die „Kontinuitätsgleichung" der Hydrodynamik.

Grenzt irgendwo die Flüssigkeit gegen einen festen Körper oder gegen eine andere Flüssigkeit, so verlangt hier die Kontinuität, daß weder eine Lücke entsteht, noch beide Stoffe sich durchdringen. Damit beides vermieden ist, müssen offenbar die Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zur Grenzfläche zu beiden Seiten dieser Grenzfläche übereinstimmen. Handelt es sich um ruhende Körper in der strömenden Flüssigkeit oder um feste Wände, so muß die Geschwindigkeitskomponente der Flüssigkeit senkrecht zur Körperoberfläche oder Wand an dieser verschwinden. Die zur Wand parallele Komponente kann vom Gesichtspunkt der Kontinuität aus jeden beliebigen Wert annehmen.

3. Dynamik der „idealen" reibungsfreien Flüssigkeit.

§ 3. Kräfte in einer strömenden Flüssigkeit. Bernoullische Druckgleichung. Die beiden an einer ruhenden Flüssigkeit wirksamen Kräftearten: Schwere (und andere Massenkräfte) und Druckunterschiede, die dort ein Gleichgewichtssystem bilden, finden sich auch bei der bewegten Flüssigkeit vor; zu ihnen tritt noch die Flüssigkeitsreibung, die als ein Widerstand gegen Formänderung anzusehen ist. Von ihr wird im nächsten Kapitel noch ausführlich die Rede sein, für die Betrachtungen dieses Kapitels soll sie jedoch vernachlässigt werden. Die technisch wichtigsten Flüssigkeiten (Wasser, Luft usw.) haben in der Tat eine sehr geringe Zähigkeit und zeigen deshalb unter den meist vorliegenden Verhältnissen nur sehr geringe Reibungswiderstände, so daß deren Vernachlässigung berechtigt erscheint; sie ist aber auch dringend geboten, da die Kräfteverhältnisse nur bei Ab-

[1]) Die Figuren 21—24, 26, 27, 29, 43—46, 50—65, 71—73, 75, 76, 80, 82, 84—89a, 91, 95, 110, 113—117, 121—124, 127, 149, 171—173 sind mit freundlicher Erlaubnis des Verlages Gustav Fischer (Jena) dem Artikel des Verfassers: „Über Flüssigkeitsbewegung" im Handwörterbuch der Naturwissenschaften, Bd. IV, entnommen.

wesenheit von Reibungswiderständen einfach genug werden, um übersichtliche Gesetzmäßigkeiten zu gewinnen. Es ist daher üblich geworden, die fundamentalen Gesetze der strömenden Bewegung an dem Idealbild der „reibungslosen Flüssigkeit" zu entwickeln, und erst hinterher zu fragen, welche Abänderungen von dem idealen Verhalten durch das Vorhandensein der Reibung verursacht werden. Wir legen also dem Folgenden die „ideale Flüssigkeit" zugrunde, der wir im übrigen außer der Reibungslosigkeit auch Unzusammendrückbarkeit zuschreiben wollen, so daß Volumenänderungen bei ihr nicht vorkommen.

Um die dynamische Beziehung zwischen dem Druck und der Massenkraft einerseits und dem Bewegungszustand andererseits zu entwickeln, müssen wir an die Newtonsche Gleichung Kraft = Masse × Beschleunigung anknüpfen, die das Fundament aller Dynamik ist. Zunächst ist hier die Berechnung der gleichzeitigen Zustände längs eines Stromfadens beabsichtigt; dazu braucht man die Beschleunigungskomponente in der Bewegungsrichtung, die sogenannte longitudinale Beschleunigung. Diese soll daher erst berechnet werden. Die Bogenlänge entlang der Stromlinie heiße s, die Zeit t, die Geschwindigkeit w. Die Geschwindigkeitsänderung bei gleichzeitiger Änderung von s um ds und t um dt ist dann

$$dw = \frac{\partial w}{\partial s} ds + \frac{\partial w}{\partial t} dt \text{ [1]}.$$

Bei der Beschleunigung handelt es sich um diejenige Geschwindigkeitsänderung, die ein Teilchen bei seiner Bewegung erfährt. Wir müssen daher $ds = w\,dt$ setzen; damit ergibt sich die Longitudinalbeschleunigung zu

$$\frac{dw}{dt} = w \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial t} \qquad (1)$$

Dabei bedeutet $w \frac{\partial w}{\partial s}$ den Beschleunigungsanteil, der dadurch entsteht, daß das Teilchen an Orte mit anderer Geschwindigkeit kommt, und $\frac{\partial w}{\partial t}$ den Anteil durch die zeitliche Änderung des Strömungszustands am Orte. Bei stationären Strömungen ist der zweite Anteil gleich Null. Der erste Anteil kann übrigens auch in der Form $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{w^2}{2}\right)$ geschrieben werden.

Zur Anwendung der Gleichung: Kraft = Masse × Beschleunigung trennen wir aus der strömenden Flüssigkeit wieder ein Zylinderchen mit dem Querschnitt dF und der Länge ds heraus, ähnlich wie dies bereits beim Studium des Gleichgewichts in § 6 von Abschnitt I geschehen ist. Die Achse des Zylinderchens wollen wir dabei in die Strömungsrichtung legen (vgl. Fig. 22). Die Masse des Zylinderchens ist $= \varrho\, dF . ds$.

Auf das Teilchen wirken nun, wenn die Bewegung als reibungslos angesehen wird, die folgenden Kräfte: Erstens ein Druckunterschied. Der

---

[1]) $\frac{\partial w}{\partial t}$ = partieller Differentialquotient (bei festgehaltenem s), $\frac{dw}{dt}$ = totaler Differentialquotient (bei festgehaltenem Teilchen).

Druck an dem stromaufwärts gelegenen Ende des Zylinderchens habe den Wert p, er wirkt dann auf die dortige Endfläche dF mit einer Kraft $p\,dF$. An dem stromabwärts gelegenen Ende hat er den etwas veränderten Wert $p + \frac{\partial p}{\partial s} ds$, so daß sich also die Resultierende aus den beiden Druckkräften zu $p\,dF - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds\right) dF = -\frac{\partial p}{\partial s} ds\,dF$ ergibt. Auf die Flüssigkeit wirke ferner eine Massenkraft, deren Wirkung auf die Masseneinheit $= g$ sei (z. B. die Erdschwere); schließt die Richtung der Massenkraft mit der Strömungsrichtung einen Winkel α ein, so ergibt sich an der Masse $\varrho\,dF\,ds$ in Richtung der Bewegung eine Kraftkomponente

$$= \varrho\,dF\,ds\,.\,g\cos\alpha.$$

In der Gleichung: Kraft = Masse × Beschleunigung hat jetzt jedes Glied den Faktor $dF\,.\,ds$, der infolgedessen fortgelassen werden kann (d. h. das will-

Fig. 22.

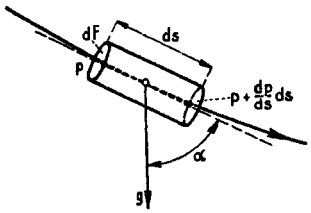
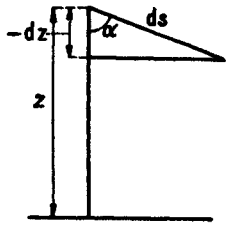


Fig. 23.



kürlich gewählte Teilchenvolumen ist für das Endergebnis ohne Belang). Dividiert man nun noch durch ϱ, so wird

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\cos\alpha = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{w^2}{2}\right) + \frac{\partial w}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Gewöhnlich handelt es sich bei der Massenkraft allein um die Schwerkraft, dann ist g nach Größe und Richtung konstant, und für $\cos\alpha$ kann, mit z = vertikale Koordinate, vgl. Fig. 23, $-\frac{\partial z}{\partial s}$ geschrieben werden.

Handelt es sich um eine stationäre Bewegung $\left(\text{für die } \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \text{ ist}\right)$, und wird noch die Dichte ϱ als konstant vorausgesetzt, so sind sämtliche Glieder Differentialquotienten nach s; die Gl. (1) kann daher in diesem Falle längs der Stromlinie integriert werden. Aus

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{w^2}{2}\right) = 0$$

wird somit

$$\frac{p}{\varrho} + gz + \frac{w^2}{2} = const \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Diese Gleichung, die den Namen „Bernoullische Gleichung“ [1]) oder „Druckgleichung“ führt, bildet die Hauptgleichung für die eindimensionale Behandlung von Strömungsaufgaben, sie ist aber auch für die ganze Hydro-

[1]) Nach Daniel Bernoulli 1738.

dynamik von fundamentaler Bedeutung. Sie bringt die Konstanz der Energie zum Ausdruck; ihre Glieder stellen nämlich Energie pro Masseneinheit dar, und zwar das erste die Druckarbeit, das zweite die potentielle Energie der Schwere, das dritte die kinetische Energie. Dividiert man alle Glieder der Gl. (3) durch g, so bekommen sie die Dimension einer Länge und erhalten die Bedeutung von Höhen. Führt man wie im vorigen Kapitel wieder das Gewicht der Volumeneinheit (Raumgewicht) $\varrho g = \gamma$ ein, so erhält die Bernouillische Gleichung die besonders von den Ingenieuren bevorzugte Form:

$$\frac{p}{\gamma} + z + \frac{w^2}{2g} = const \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3\,\mathrm{a})$$

p/γ bedeutet gemäß § 6 von Abschnitt I die Höhe einer Flüssigkeitssäule, die durch ihr Gewicht den Druck p erzeugt, und heißt deshalb „Druckhöhe", z ist die Höhe der bezüglichen Stelle über einer irgendwie festgesetzten Horizontalebene und wird „Ortshöhe" genannt; $w^2/2g$ ist die Höhe, um die ein Körper herunterfallen muß, um die Geschwindigkeit w durch den freien Fall zu erlangen, und heißt daher „Geschwindigkeitshöhe". Nach der Bernoullischen Gleichung ist also die Summe der Druckhöhe, der Ortshöhe und der Geschwindigkeitshöhe in der ganzen Erstreckung einer Stromlinie konstant. Der Wert der Konstanten kann dabei von Stromlinie zu Stromlinie verschieden sein, und ist es besonders dann, wenn die Stromlinien verschiedenen Ursprung haben. Kommen alle Stromlinien aus einem Raum, in dem statische Verhältnisse (d. h. Ruhe oder gleichförmige geradlinige Bewegung) herrschen, so ist die Konstante für alle Stromlinien dieselbe, die Bernoullische Gleichung gilt also hier auch quer über die Stromlinien weg im ganzen Raum. (Gemäß § 6 von Abschnitt I ist in einer ruhenden Flüssigkeit $p/\gamma + z = const$, was mit der Bernoullischen Gleichung für $w = 0$ oder $w = const$ übereinstimmt.) Es mag erwähnt werden, daß der hier beschriebene spezielle Strömungszustand mit der später zu behandelnden stationären Potentialbewegung identisch ist.

Für andere Massenkräfte ist, wenn sie ein Potential U besitzen, die Integration ebenfalls ausführbar, da $g \cos \alpha$ dann $= -\frac{\partial U}{\partial s}$ gesetzt werden kann. Handelt es sich um eine zusammendrückbare Flüssigkeit, so ist die Integration ebenfalls möglich, wenn die Flüssigkeit homogen ist, d. h. die Dichte nur allein vom Druck abhängt. Dann ist $\int \frac{dp}{\varrho} = P(p)$ eine Funktion des Druckes, und es kann also $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial P}{\partial s}$ geschrieben werden. Durch Integration nach s ergibt sich somit die allgemeine Form der Druckgleichung für stationäre Bewegungen

$$P + U + \frac{w^2}{2} = const \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3\,\mathrm{b})$$

Mathematische Ergänzung.

In der mathematischen Hydrodynamik geht man gewöhnlich von den drei rechtwinkligen Komponenten der Geschwindigkeit u, v, w aus. In Analogie zu unserer Gl. (1) erhält man hier für die Beschleunigungskomponente in der X-Richtung

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot u + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot v + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot w \quad \ldots \quad (4)$$

für $\frac{dv}{dt}$ und $\frac{dw}{dt}$ gelten die entsprechenden Formeln. Das Druckgefälle liefert für die Volumeneinheit die drei Komponenten $-\frac{\partial p}{\partial x}$; $-\frac{\partial p}{\partial y}$; $-\frac{\partial p}{\partial z}$; die Massenkraft (bisher g) habe die drei Komponenten X, Y, Z, die Komponenten der Kraft auf die Volumeneinheit ergeben sich also, da die Masse der Volumeneinheit $= \varrho$ ist, zu ϱX, ϱY und ϱZ. Damit werden nun für die in der Volumeneinheit enthaltene Masse als Ausdruck der (vektoriellen) Beziehung „Masse × Beschleunigung = Summe der Kräfte" die drei Gleichungen erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \varrho \frac{du}{dt} &= \varrho X - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \varrho \frac{dv}{dt} &= \varrho Y - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \varrho \frac{dw}{dt} &= \varrho Z - \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Diese Gleichungen, in denen noch die Beschleunigungen durch die Ausdrücke von Gl. (4) ersetzt werden können, heißen die Eulerschen Gleichungen der Hydrodynamik. Um zu zeigen, wie man sie verwenden kann, soll die Bernoullische Gleichung für eine Stromlinie aus ihnen hergeleitet werden.

Wir multiplizieren die Gl. (5) der Reihe nach mit dx, dy, dz und setzen gleichzeitig fest, daß

$$dx : dy : dz = u : v : w$$

sein soll, was bedeutet, daß dx, dy, dz die Komponenten eines Stromlinienelements sein sollen. Dann läßt sich $v\,dx$ durch $u\,dy$ ersetzen, $w\,dx$ durch $u\,dz$ usf.

Dadurch kann

$$\frac{du}{dt}dx = \frac{\partial u}{\partial t}dx + u\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right)$$

gesetzt werden. Der Klammerausdruck bedeutet die Änderung von u beim Fortschreiten auf der Stromlinie; wir schreiben abkürzend dafür du. Also ist

$$\frac{du}{dt}dx = \frac{\partial u}{\partial t}dx + u\,du.$$

Nimmt man zur Vereinfachung eine stationäre Bewegung an, so daß $\frac{\partial u}{\partial t}$ usw. $= 0$ wird, so geben die linken Seiten der mit dx bzw. dy und dz multiplizierten Gl. (5) durch ϱ dividiert:

$$\frac{du}{dt}dx + \frac{dv}{dt}dy + \frac{dw}{dt}dz = u\,du + v\,dv + w\,dw = d\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right).$$

Haben die Massenkräfte ein Potential U, ist also

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

so geben die entsprechenden Glieder von Gl. (5):

$$-\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) = -dU.$$

Entsprechend wird auch

$$\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) = \frac{1}{\varrho}dp,$$

so daß, immer unter Beschränkung auf Punkte einer Stromlinie, erhalten wird

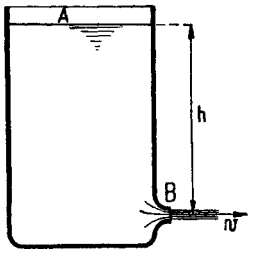
$$d\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right) + dU + \frac{dp}{\varrho} = 0,$$

was mit Gl. (3b) gleichbedeutend ist.

§ 4. Folgerungen aus der Bernoullischen Gleichung. Die Bernoullische Gleichung liefert für eine große Reihe von Anwendungen in sehr einfacher Weise eine Antwort. Drei besonders wichtige Beispiele mögen hier angeführt werden.

a) Ausfluß aus einem Gefäß unter dem Einfluß der Schwere. Verfolgt man in dem Gefäß Fig. 24 die Stromlinien von der Ausflußmündung B rückwärts, so findet man leicht, daß sie zum Wasserspiegel A hinführen, der sich unter langsamem Sinken der Wassermasse selbst mit senkt. Die Wasserteilchen bei A stehen unter dem Atmosphärendruck p_0, die in dem freien Strahl bei B ebenso[1]) (vgl. unten). Die Geschwindigkeit bei A ist, wenn die Wasserspiegelfläche groß gegen die Mündungsfläche F ist, so klein, daß ihr Quadrat gegen das der Geschwindigkeit bei B vernachlässigt werden kann. Die Bernoullische Gleichung liefert also, mit z_A und z_B = Ortshöhe von A und B,

Fig. 24.



Ausfluß aus einem Gefäß.

$$\frac{p_0}{\varrho} + g z_B + \frac{w_B^2}{2} = \frac{p_0}{\varrho} + g z_A + 0,$$

also

$$\frac{w_B^2}{2g} = z_A - z_B = h,$$

oder

$$w_B = \sqrt{2gh} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die Geschwindigkeit bei B wird damit so groß, als wenn das ausfließende Wasserteilchen die Höhe h frei durchfallen hätte. In Wirklichkeit ist es so, daß die Teilchen bei A etwas tiefer gerückt sind und die vorher an dieser Stelle befindlichen Teilchen ebenfalls tiefer gerückt sind usw., und daß sich die Arbeiten dieser Teilchen, die vermöge des inneren Mechanismus der Flüssigkeit alle auf das ausfließende Teilchen übertragen werden, geradeso addieren, als wenn ein einziges Teilchen von der Größe des ausgeflossenen die ganze Höhe durchfallen hätte. Die in Gl. (1) enthaltene Beziehung wird „Toricellisches Theorem" genannt.

Der Querschnitt des Strahles stimmt in der Regel nicht mit dem des Loches überein. Bei einem Strahl, der z. B. aus einer kreisförmigen Öffnung in dünner Wand kommt, ist der Strahlquerschnitt etwa 0,61 bis 0,64 von dem Lochquerschnitt. Diese Erscheinung, die man Kontraktion nennt, kommt daher, daß die Flüssigkeit im Innern des Gefäßes radial auf das Loch zuströmt und am Lochrand nicht plötzlich von der radialen Richtung in die Richtung der Strahlachse umlenken kann. Fig. 25 stellt eine solche Strömung dar. Im Falle einer abgerundeten Öffnung, Fig. 26, wo sich die Umlenkung der Stromfäden innerhalb der Mündung vollziehen kann, ist die obige Ziffer, die man Kontraktionsziffer nennt, allerdings ungefähr

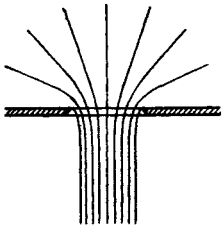
[1]) Die Schwere der Luft ist dabei vernachlässigt, was erlaubt ist, wenn es auf die dritte Dezimale nicht mehr ankommt.

gleich 1. Die durch eine Öffnung vom Querschnitt F sekundlich ausfließende Menge Q (Volumen pro Sekunde) ist

$$Q = \alpha F \sqrt{2gh},$$

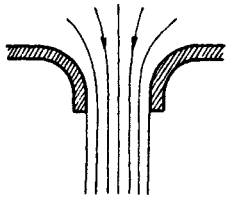
wobei α die Kontraktionsziffer ist. Bei nicht kreisförmiger Öffnung in dünner Wand ist α meist wenig von dem Wert bei einer kreisförmigen Öffnung verschieden, aber die Strahlformen, die sich hier ausbilden, sind in der Regel

Fig. 25.



Ausfluß aus einer Öffnung in ebener Wand.

Fig. 26.

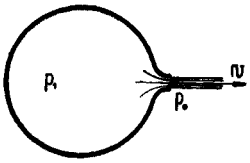


Ausfluß aus einer abgerundeten Mündung.

ziemlich verwickelt. Der Strahl, der aus einem quadratischen Loch kommt, formt sich z. B. in einen dünnen kreuzförmigen Querschnitt um, der aus einem rechteckigen Loch kommende, in ein Band, das auf der langen Rechteckseite senkrecht steht.

b) Ausfluß aus einem Gefäß unter dem Einfluß eines inneren Überdruckes. In dem Gefäß Fig. 27 herrsche ein Druck p_1, im Außenraum der Atmosphärendruck p_0. Für eine Stromlinie, die wagerecht verläuft, ist $z_A = z_B$, die Druckgleichung liefert daher, wenn wieder die Geschwindigkeit bei A als vernachlässigbar klein angesehen wird,

Fig. 27.



$$\frac{p_0}{\varrho} + \frac{w^2}{2} = p_1 + 0,$$

also

$$w = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\varrho}} = \sqrt{\frac{2g(p_1 - p_0)}{\gamma}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Bezeichnet man die Höhe $\frac{p_1 - p_0}{\gamma}$, d. i. die Höhe einer Flüssigkeitssäule vom Raumgewicht γ, zwischen deren oberen und unteren Ende der Druckunterschied $p_1 - p_0$ herrscht, mit h, so wird aus Formel (2) wieder $w = \sqrt{2gh}$. Die Formel (2) gibt uns eine Möglichkeit, die Größe derjenigen Geschwindigkeit abzuschätzen, bis zu der es noch erlaubt ist, ein Gas als volumenbeständige Flüssigkeit zu behandeln. Die Grenzgeschwindigkeit w_1 hängt natürlich von der Größe derjenigen Dichteschwankung ab, die man noch zulassen will, und ist daher um so kleiner, je höher die gestellten Ansprüche an die Genauigkeit sind. Nimmt man etwa die zulässige Dichteänderung $\frac{\Delta\varrho}{\varrho} = 1$ v. H., also 0,01, so ergibt sich für die Druckdifferenz Δp, da wegen $p v^\varkappa = const$[1]) oder

[1]) Vgl. Abschnitt I, § 5.

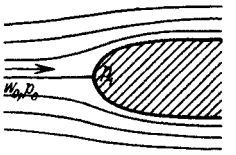
$p = const\, \varrho^{\varkappa}$ $\frac{\Delta p}{p} \approx \varkappa \frac{\Delta \varrho}{\varrho}$ ist, $\Delta p \approx \varkappa p_0 \cdot \frac{\Delta \varrho}{\varrho}$; in kg/m² ergibt dies, wenn es sich um Luft von gewöhnlichem Druck handelt, rund 1,4 . 10333 . 0,01 = 144,5 kg/m²; mit einem Mittelwert von $\varrho = 0{,}125 \frac{\text{kg sec}^2}{\text{m}^4}$ wird somit

$$w_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\varrho}} = \sqrt{2312} = \text{rund } 48 \text{ m/sec.}$$

Läßt man 10 Proz. Dichteschwankung zu, dann erhält man aus unserer Näherungsformel eine $\sqrt{10}$ mal größere Geschwindigkeit, also rund 150 m/sec. Die Wirkung der Dichteschwankung ist zweierlei Art; kinematisch ändern sich die Stromfadenquerschnitte, dynamisch wird das Maß der zu einer Beschleunigung gehörigen Druckänderung beeinflußt, vgl. § 3, Gl. (2).

c) Aufstau vor einem Hindernis. Befindet sich in einer gleichförmigen Flüssigkeitsströmung von der Geschwindigkeit w_0 ein Hindernis, so staut sich unmittelbar vor dem Hindernis die Strömung an und zerteilt sich nach allen Seiten, um das Hindernis zu umfließen, vgl. Fig. 28. Im Mittelpunkt des Staugebietes, dem „Staupunkt", kommt die Strömung völlig zur Ruhe. Die Bernoullische Gleichung liefert also für die durch den Staupunkt gezogene Stromlinie, wenn der Druck am Staupunkt p_1 und der ungestörte Druck in der gleichen Höhe p_0 heißt,

Fig. 28.



Strömung um ein Hindernis.

$$\frac{p_1}{\varrho} + 0 = \frac{p_0}{\varrho} + \frac{w_0^2}{2}, \qquad \text{also} \qquad p_1 = p_0 + \varrho \frac{w_0^2}{2}.$$

Der Druckanstieg $p_1 - p_0 = \varrho \frac{w_0^2}{2}$ führt den Namen Staudruck oder Geschwindigkeitsdruck, auch dynamischer Druck. Die Beobachtung dieses Druckanstiegs liefert ein Mittel zur Feststellung von Strömungsgeschwindigkeiten. Wird ein Körper mit der Geschwindigkeit v durch ruhende Luft (oder Flüssigkeit) bewegt, so spielt sich bezüglich eines mit ihm mitbewegten Bezugssystems die Strömung ebenso wie vorstehend beschrieben ab, wobei die Geschwindigkeit w_0 gleich und entgegengesetzt v ist. Auch in diesem Falle wird daher eine Druckerhöhung $= \frac{\varrho v^2}{2}$ beobachtet. — Weist das Hindernis am Staupunkt eine Anbohrung auf, so pflanzt sich der Druck p_1 durch diese ins Innere fort und kann zu einem Meßinstrument geleitet werden. Zur Messung des Druckes $p_1 = p + \frac{\varrho w^2}{2}$ in irgendeiner Strömung genügt als „Hindernis" ein einfaches, umgebogenes Rohr, vgl. Fig. 29, das nach seinem Erfinder Pitotrohr heißt.

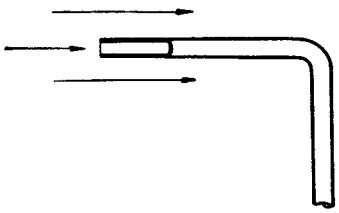
Man kann jedem Punkt der strömenden Flüssigkeit außer dem dort herrschenden Druck p (den ein mit der Flüssigkeit mitbewegtes Druckmeßgerät anzeigen würde), auch den Druck p_1 zuschreiben, den ein dort angebrachtes Pitotrohr liefern würde. Die Ingenieure nennen den Druck p

den „statischen Druck“, den Druck p_1 den „Gesamtdruck“, es ist also Gesamtdruck = statischer Druck + dynamischer Druck. Aus der Bernoullischen Gleichung

$$\frac{p}{\varrho} + g z + \frac{w^2}{2} = const$$

ergibt sich durch Einführung des Gesamtdruckes $p_1 = p + \varrho \frac{w^2}{2}$

Fig. 29.



Pitotrohr.

$$\frac{p_1}{\varrho} + g z = const,$$

oder

$$p_1 + \gamma z = const,$$

d. h. p_1 ist nach statischen Gesetzen verteilt, also in dem Falle, daß alle Stromlinien dieselbe Konstante haben, konstant in jeder Horizontalebene.

Um die vorstehenden Beziehungen zur Ermittlung von Strömungsgeschwindigkeiten zu verwerten, bedarf es neben der Bestimmung von p_1 auch der des statischen Druckes p. Diese macht viel mehr Schwierigkeiten als die von p_1, da der statische Druck durch das Einbringen einer Sonde gerade an der Stelle gestört wird, wo man ihn messen will. Über die Ausführung solcher Druckmessungen vgl. § 7.

§ 5. Weitere Ausführungen über den Flüssigkeitsdruck. Die folgenden Ausführungen sind nicht auf den Fall der reibungsfreien Flüssigkeit beschränkt, sondern gelten (unter Umständen mit geringen Abänderungen) auch für mäßig stark reibende Flüssigkeiten. Die erste Bemerkung setzt aber eine volumenbeständige Flüssigkeit von konstanter Dichte voraus.

a) Man kann den Druck in einer solchen Flüssigkeit in zwei Summanden zerspalten, von denen der eine denjenigen Druck darstellt, der sich einstellen würde, wenn die Flüssigkeit in Ruhe wäre. Dieser „Gleichgewichtsdruck“ sei mit p' bezeichnet. Offenbar ist $p' = const - \gamma z$. Setzt man nun den wirklichen Druck in der strömenden Flüssigkeit $p = p' + p^*$, so stellt p^* den Unterschied des Druckes im Bewegungsfall gegenüber dem in der Ruhe dar. Ist die Bernoullische Gleichung verwendbar, also $p + \gamma z + \varrho \frac{w^2}{2} = const$, so folgt bei Berücksichtigung des Wertes von p': $p^* + \varrho \frac{w^2}{2} = const$, d. h. p^* verteilt sich so wie bei einer zwar mit träger Masse begabten, aber schwerelosen Flüssigkeit; die Ortshöhe z hat auf p^* keinen Einfluß. Dies Ergebnis, das einfach mit dem Umstand zusammenhängt, daß jedes Teilchen einer schweren Flüssigkeit durch den Auftrieb, den es von seinen Nachbarteilchen erfährt, gerade in der Schwebe gehalten wird, läßt sich offenbar auch auf reibende Strömungen übertragen. Wir werden deshalb in den folgenden Betrachtungen stets, wenn es sich um Bewegungen unter Wasser oder in Luft

handelt, von den Wirkungen der Schwere absehen, was also darauf hinauskommt, daß wir statt des Druckes p immer den Druckunterschied p^* betrachten. Der Einfachheit halber werden wir aber statt p^* wieder p schreiben.

Wird bei einer Luft- oder Wasserströmung der Druck mittels außenliegender ruhender Druckanzeigegeräte gemessen, zu denen von der beweglichen Druckentnahmestelle (Sonde) Rohrleitungen oder Schläuche führen, so wirkt die Schwere der Flüssigkeit in den Rohrleitungen so, daß der angezeigte Druck unabhängig von der Höhenlage der Druckentnahmestelle wird. Das Gerät zeigt also einen Druck von der Art von p^* an. Ist die Sonde ein gegen die Strömung gekehrtes Pitotrohr (siehe oben), so zeigt das ruhende Gerät auf einer Stromlinie konstanten Druck an. In dem Falle, daß alle Stromlinien dieselbe Konstante haben, ist diese Druckanzeige für das ganze Gebiet dieselbe.

b) Die Bernoullische Gleichung behandelt die Drucke längs einer Stromlinie. Über die Druckunterschiede in einer Richtung quer zur Strömung läßt sich ebenfalls eine Aussage gewinnen, wenn man statt der Longitudinalbeschleunigung die Transversalbeschleunigung betrachtet. Diese hat bekanntlich die Richtung der Hauptnormale der Bahnkurve und den Betrag $\frac{w^2}{r}$, wo r der Krümmungsradius der Bahnkurve ist. Durch Betrachtung der Kräfte an einem kleinen Prisma, dessen Achse in die Richtung der Hauptnormale gelegt ist, ergibt sich für die Komponenten in der Richtung des Radius r:

$$\frac{w^2}{r} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wobei ds' ein Bogenelement in der Richtung der Hauptnormale ist und p im Sinne von p^* im vorstehenden Absatz aufzufassen ist. Die Formel bringt die Zentrifugalwirkung in einer krummlinigen Strömung zum Ausdruck. Der Druck steigt von der konkaven Seite der Stromlinie zur konvexen hin an, und zwar um $\frac{\varrho w^2}{r}$ für die Längeneinheit. Durch diese Beziehung sind also nebeneinander liegende Stromfäden miteinander verknüpft. Wichtig ist vor allem die Feststellung, daß bei geradliniger Strömung ($r = \infty$) ein Druckunterschied quer zur Strömungsrichtung nicht bestehen kann. Bei krummliniger Strömung ergibt sich ein besonders einfaches Resultat in dem bereits besprochenen Sonderfall, daß die Konstante der Bernoullischen Gleichung für alle Stromlinien denselben Wert hat. Hier läßt sich aus $\frac{p}{\varrho} + \frac{w^2}{2} = const$ durch Differentiation nach s' ein zweiter Ausdruck für $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s'}$ herleiten, nämlich $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s'} = -w\frac{\partial w}{\partial s'}$. Durch Gleichsetzen mit dem früheren Ausdruck ergibt sich

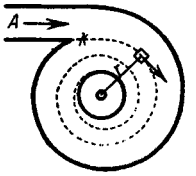
$$\frac{\partial w}{\partial s'} + \frac{w}{r} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dies drückt, wie in Vorwegnahme späterer Ergebnisse (§ 8) bemerkt werden mag, aus, daß bei der krummen Strömung die einzelnen Flüssigkeitselemente keine Drehung erfahren [„drehungsfreie Bewegung“][1]).

[1]) Es läßt sich leicht zeigen, daß die „Zirkulation“ längs eines aus zwei Radienstücken von der Länge ds' und zwei Stromlinienbögen gebildeten Rechtecks verschwindet, wenn Gl. (2) erfüllt ist. Der Beweis findet sich in § 8.

Als Beispiel sei eine Bewegung in einem Spiralgehäuse nach Fig. 30 betrachtet. Alle Stromlinien beginnen in der Parallelströmung bei A, und es mag dort die Geschwindigkeit aller Stromfäden dieselbe sein, so daß — bei der Druckgleichheit in der Parallelströmung — die Bernoullische Konstante auf allen Stromlinien dieselbe ist. Die Krümmungsradien der einzelnen Stromlinien können genähert gleich dem vom Mittelpunkt O aus gezogenen Radius r, und das Bogenelement ds' kann $= dr$ gesetzt werden. Dann ist gemäß dem Vorstehenden $\frac{dw}{dr} + \frac{w}{r} = 0$, oder $\frac{dw}{w} = -\frac{dr}{r}$, oder integriert $ln\, w = ln\, C$[1]$) - ln\, r$, also $w = \frac{C}{r}$. Die Geschwindigkeit nimmt also nach innen beträchtlich zu[2]). Der Druck ergibt sich aus der Bernoullischen Gleichung zu $p = const - \frac{\varrho C^2}{2 r^2}$. Gelangt die Flüssigkeit innen auf einem Radius r_1 ins Freie (Druck p_0), so ist der Druck an einer anderen Stelle

Fig. 30.



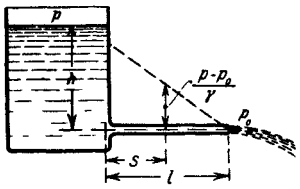
Spiralgehäuse.

$$p = p_0 + \varrho \frac{C^2}{2}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2}\right).$$

Bei einigermaßen kleinem Radius des Abflußloches können also sehr bedeutende Überdrücke bei A auftreten.

c) Bei nichtstationären Bewegungen von Flüssigkeiten kommt für die Änderung des Strömungszustandes noch ein zusätzliches Druckfeld zu den bisherigen Drücken dazu. Die Betrachtungen mögen hier auf die longitudinale Beschleunigung beschränkt werden, in der gemäß § 3, Gl. (1) hier das Glied $\frac{\partial w}{\partial t}$ (zeitliche Geschwindigkeitsänderung am festgehaltenen Ort) hinzukommt. Führt man die Rechnungen, die zur Bernoullischen Gleichung geführt haben, gemäß der vollständigen Gl. (2) von § 3 durch, so kommt in Gl. (3) von § 3 auf der linken Seite das Glied $\int_0^s \frac{\partial w}{\partial t} ds$ hinzu. Handelt es sich z. B. um eine Röhre mit konstantem Querschnitt, in der also in allen Querschnitten die Geschwindigkeit dieselbe ist (über dem Querschnitt soll sie jeweils auch konstant angenommen werden, da Reibungslosigkeit vorausgesetzt ist), so ist $\frac{\partial w}{\partial t}$ unabhängig vom Ort, das Integral kann daher $= \frac{dw}{dt} \cdot s$ gesetzt werden.

Fig. 31.



Beginn des Ausfließens.

---

[1]) Integrationskonstante.

[2]) Die Radialkomponente der Geschwindigkeit ergibt sich bei konstanter Höhe des Spiralgehäuses wegen der Kontinuität ebenfalls proportional $\frac{1}{r}$, so daß also der Winkel der Stromlinien mit den Radien überall derselbe ist, die Stromlinien also logarithmische Spiralen werden.

Beispiel: Beginn des Ausfließens durch ein Ansatzrohr von der Länge l, vgl. Fig. 31. Es ist längs der wagerecht angenommenen Röhrenachse

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{w^2}{2} + \frac{dw}{dt} \cdot s = const = \frac{p_0}{\varrho} + gh.$$

Solange $\frac{dw}{dt}$ noch von Null verschieden ist, sinkt der Druck p längs der Röhre proportional mit s ab. Ist der Druck am Röhrenende $(s = l) = p_0$, so gilt

$$\frac{p_0}{\varrho} + \frac{w^2}{2} + \frac{dw}{dt}\, l = \frac{p_0}{\varrho} + gh,$$

also

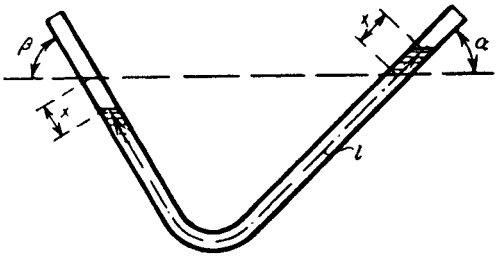
$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{l}\left(gh - \frac{w^2}{2}\right).$$

Für den ersten Moment ergibt sich, da hier $w = 0$ ist, die einfache Beziehung $\frac{dw}{dt} = g \cdot \frac{h}{l}$. Mit dem Anwachsen von w nimmt $\frac{dw}{dt}$ immer mehr ab und geht später gegen Null, d. h. die Bewegung wird stationär und w wird $= \sqrt{2gh}$. Das genaue Gesetz des zeitlichen Anwachsens von w, das an sich nicht schwierig zu berechnen ist, mag hier übergangen werden. Eine Abschätzung der Zeit, die bis zur angenäherten Erreichung des stationären Zustandes verfließt, wird gewonnen, wenn man eine bis zur Erreichung von $w_1 = \sqrt{2gh}$ konstante Beschleunigung $\frac{dw}{dt}$ annimmt und $\frac{w_1}{T}$ an Stelle von $\frac{dw}{dt}$ in die obige Formel einführt. Dies gibt

$$T = \frac{w_1 l}{gh} = \frac{2l}{w_1}.$$

Ein anderes einfaches Beispiel einer nichtstationären Bewegung einer Flüssigkeit ist die Schwingung einer Flüssigkeitssäule in einem gebogenen Rohr unter dem Einfluß der Schwere, vgl. Fig. 32. Das Rohr habe konstanten Querschnitt, die Länge der Flüssigkeitssäule, in der Rohrachse gemessen, sei l. Der Ausschlag in einem Augenblick sei x, gemessen in der Richtung der Rohrachse (der Kontinuität wegen gleich an beiden Enden und auch für jede Zwischenstelle). Die Geschwindigkeit ist überall gleich, nämlich $w = \frac{dx}{dt}$, also $w\frac{\partial w}{\partial s} = 0$, somit ist die Beschleunigung einfach $\frac{d^2x}{dt^2}$. Das eine Ende ist um $h_1 = x \sin\alpha$ gehoben, das andere um $h_2 = x \sin\beta$ gesenkt, die Ortshöhendifferenz ist also $h_1 + h_2 = x(\sin\alpha + \sin\beta)$.

Fig. 32.



Schwingung einer Wassersäule.

Der Druck ist an beiden Enden $= p_0$, so daß also die erweiterte Bernoullische Gleichung, auf die Enden angewandt, ergibt

$$g\,x(\sin\alpha + \sin\beta) + l\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

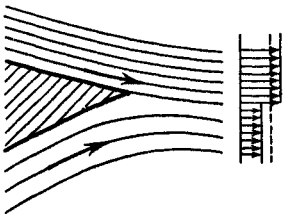
Die Lösung dieser Differentialgleichung, die mit der der elastischen Schwingung übereinstimmt, ist $x = A\cos(\omega t + \gamma)$, mit $\omega = \sqrt{\frac{g\,(\sin\alpha + \sin\beta)}{l}}$. Dies gibt eine Schwingungszeit

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\,(\sin\alpha + \sin\beta)}}.$$

Für ein senkrechtes U-Rohr ($\sin\alpha = \sin\beta = 1$) ist $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$, also gleich der Schwingungsdauer eines Pendels von einer Länge gleich der halben Länge der Flüssigkeitssäule.

§ 6. Zusammenfluß zweier Flüssigkeitsströme. Trennungsflächen. Wirbelbildung. Wenn sich zwei Flüssigkeitsströme verschiedener Herkunft hinter einer scharfen Kante vereinigen, vgl. Fig. 33, so ist im allgemeinen die Konstante der Bernoullischen Gleichung in beiden Strömen nicht dieselbe. Da längs der Fläche, die die beiden Ströme trennt („Trennungsfläche"), Druckgleichheit herrscht, ist daher die Geschwindigkeit dem Betrage nach auf beiden Seiten verschieden. Aber selbst wenn die Bernoullische Konstante beider Ströme gleich ist, kann noch die Richtung der Strömung auf beiden Seiten verschieden sein. In der Trennungsfläche wechselt also in den betrachteten Fällen die Geschwindigkeit sprungweise. In dem ersterwähnten Falle handelt es sich um einen longitudinalen Geschwindigkeitssprung, im zweiten um einen transversalen. Derartige Trennungsflächen werden vielfach beobachtet. Sie bleiben allerdings dadurch nicht lange in der ursprünglichen Form bestehen, daß sie labil sind. Sie zeigen eine starke Neigung dazu, daß irgendwelche zufällige Ausbuchtungen schnell anwachsen und sich die Geschwindigkeitsunterschiede an einigen Stellen anhäufen, an anderen vermindern. Die Trennungsfläche zerfällt dadurch in eine große Zahl meist unregelmäßiger Wirbel. Dieser für das Verständnis wirklicher Flüssigkeitsbewegungen wichtige Vorgang mag hier noch etwas näher beschrieben werden. Die Trennungsfläche von Fig. 33 möge durch irgendwelche Schwankungen im Zustrom eine leichte Wellung aufweisen, die in Fig. 34 näher gekennzeichnet ist. Die Wellen bewegen sich mit dem Mittelwert der beiden Geschwindigkeiten vorwärts, der in Fig. 33 durch eine punktierte Linie angedeutet ist. In Fig. 34 ist ein Bezugssystem gewählt, das sich mit dieser mittleren Geschwindigkeit mitbewegt, für das also die Wellenberge und -täler

Fig. 33.



Zusammenfluß.

am Orte bleiben. Die obere Flüssigkeit strömt für dieses Bezugssystem nach rechts, die untere bleibt nach links zurück. Analysiert man nun nach den Ergebnissen des vorangehenden Paragraphen die Druckverhältnisse in dieser Strömung, so gibt sowohl die Bernoullische Gleichung wie auch die Gleichung für den transversalen Druckanstieg [§ 5, Gl. (1)] den Aufschluß, daß unter der Voraussetzung, daß die Bewegung stationär wäre, in den Wellenbergen jedes einzelnen Stromes Überdruck, in den Tälern dagegen Unterdruck herrscht (in Fig. 34 durch + und — angedeutet). Diese Druckverteilung zeigt aber deutlich, daß die Bewegung nicht stationär sein kann; es wird vielmehr die Flüssigkeit in den Überdruckgebieten sich nach dem benachbarten Unterdruckgebiet hin in Bewegung setzen, was offenbar bedeutet,

Fig. 34.

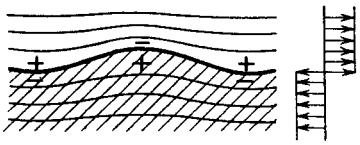
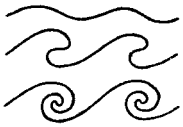


Fig. 35.



Entstehung von Wirbeln aus Wellen einer Trennungsfläche.

daß die Wellung stärker wird. Die weiteren Schicksale einer solchen Trennungsfläche sind in Fig. 35 dargestellt. Das Ende ist ein Zerfall in einzelne Wirbel. Da die ursprünglichen kleinen Störungen in Wirklichkeit meist nicht eine gleichmäßige Wellung, sondern eine unregelmäßige Verteilung zeigen, ist der Endzustand auch in der Regel ein ungeordnetes Durcheinander von größeren und kleineren Wirbeln.

Im Zusammenhang mit diesen Dingen muß noch eine andere Art von Trennungsflächen besprochen werden, bei deren Entstehung zugleich ein Wirbel gebildet wird (nebenher gesagt, wo eine Trennungsfläche neu gebildet wird, sind die Verhältnisse fast regelmäßig ähnlich wie in dem im folgenden beschriebenen Fall). Strömt eine Flüssigkeit um eine scharfe Kante, so tritt im ersten Augenblick eine Umströmung der Kante gemäß Fig. 36 ein. Die Geschwindigkeit an der Kante selbst ist dabei sehr groß, für die reibungsfreie Flüssigkeit wäre sie nach der Theorie unendlich groß. Man beobachtet nun, daß die Geschwindigkeit an der Kante unter Bildung eines Wirbels sehr bald kleiner wird. Man kann für dieses Verhalten als ein besonderes Prinzip anführen, daß die Flüssigkeit unendliche Geschwindigkeiten zu vermeiden strebe und statt dessen Trennungsflächen bilde. Später werden wir erkennen, daß hinter diesem Prinzip die Flüssigkeitsreibung steckt, die, wenn sie auch noch so klein ist, doch in der Nähe fester Wände nicht wirkungslos bleibt. Nehmen wir für den Augenblick einen Wirbel hinter der scharfen Kante an, der der

Fig. 36.

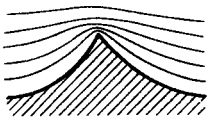
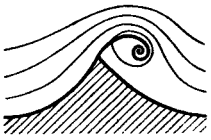
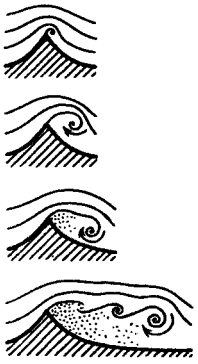


Fig. 37.



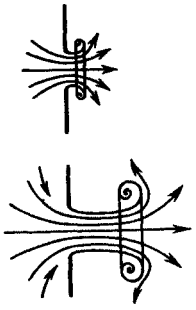
Kante in Form einer umlaufenden Strömung auch von hinten Flüssigkeit zuführt, dann sind die Bedingungen des Zusammenflusses an der Kante erfüllt, und es wird hier eine Trennungsfläche erzeugt (vgl. Fig. 37), die Trennungsfläche wiederum wird von dem Wirbel aufgewickelt und führt ihm dadurch neue Nahrung zu, so daß er wachsen kann. In Wirklichkeit sind beide, Wirbel und Trennungsfläche, eine Einheit und wachsen zusammen aus winzigen Anfängen hervor (vgl. Fig. 38). Später entfernt sich dieser „Anfahrwirbel", und die Trennungsfläche, von der an der Kante immer neue Stücke gebildet werden, zerfällt wie oben beschrieben, in einzelne Wirbel. Ganz analoge Vorgänge spielen sich an den Kanten eines runden Loches in ebener Wand ab. Der sich aufrollende vordere Rand der Trennungsfläche erzeugt einen Wirbelring, der unter Ausbildung eines gut abgegrenzten Flüssigkeitsstrahles fort wandert (vgl. Fig. 39). Man kann sehr schöne Wirbelringe erzeugen, wenn man einen Kasten mit nachgiebiger Rückwand und einem kreisförmigen Loch in der Vorderwand mit Rauch füllt und nun auf die Rückwand schlägt. Da in diesem Falle das Herausfließen sehr schnell wieder aufhört, entsteht kein Strahl, sondern nur ein Ring, der sich selbständig weiterbewegt, und, da er in sich Rauch mitführt, als Rauchring sichtbar wird. Derartige Wirbelringe sind sehr stabile Gebilde und zerfallen erst, wenn ihre Energie durch Reibung bis auf einen kleinen Rest aufgezehrt ist.

Fig. 38.



Ausbildung und Zerfall einer Trennungsfläche.

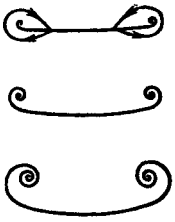
Fig. 39.



Strahlbildung.

Transversale Geschwindigkeitssprünge ergeben sich z. B. bei dem Zusammenfluß hinter einer unter kleinem Winkel gegen die Bewegungsrichtung geneigten Platte. Auf der „Druckseite" streben die Stromlinien unter der Wirkung des sich hier ausbildenden Überdrucks nach links und rechts auseinander, auf der „Saugseite" werden sie durch den Unterdruck zusammengebogen. An der Hinterkante der Platte hat die Strömung daher — von der Mitte abgesehen — auf der Druckseite eine Komponente nach dem Seitenrande zu, auf der Saugseite dagegen eine nach der Mitte zu; im stationären Fall muß wegen der Stetigkeit des Druckes und weil alle Stromlinien einheitlichen Ursprung haben, der Betrag der Geschwindigkeit auf beiden Seiten der Trennungsfläche je derselbe sein, der Geschwindigkeitssprung ist daher hier rein tangential. Erfahrungsgemäß rollen sich solche Trennungsflächen von den Seitenrändern her ein und ergeben so zwei Wirbel, die auf der ganzen von der Platte durchfahrenen Bahn zu finden sind. Fig. 40 gibt von dieser Art von Vor-

Fig. 40.



Trennungsfläche hinter einer geneigten Platte.

gängen eine Anschauung; sie stellt die Gestalt der Trennungsfläche in verschiedenen Schnitten hinter der Platte dar. Das Studium derartiger Vorgänge ist für das Verständnis der Wirkung von Flugzeugtragflügeln sehr wichtig geworden, vgl. § 14 und 15 von Abschnitt III.

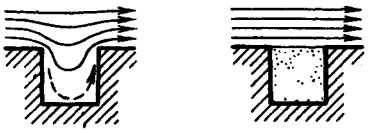
§ 7. Weiteres über Trennungsflächen. Druckmessung. In einer Flüssigkeit, deren Reibung gering genug ist, um in erster Näherung von ihr abzusehen, kann nach dem Vorstehenden als feste Regel angesehen werden, daß von jeder scharfen Kante, die quer überströmt wird, eine Trennungsfläche ausgeht. Ist die Kante ringförmig geschlossen, und findet die Strömung durch das Innere der geschlossenen Linie statt, wie bei Ausflußmündungen, bei plötzlich erweiterten Rohren usw., so bildet sich ein Strahl ähnlich den in § 4, a beschriebenen Ausflußstrahlen aus, auch bei Wasserausfluß unter Wasser, wie bei Luftausfluß in Luft. In diesen Fällen wird der Strahl allerdings nach einer gewissen Strecke durch die Wirbel, die sich aus der Trennungsfläche bilden, wieder aufgezehrt. Findet die Strömung außen um die Linie herum statt, wie z. B. beim Umströmen einer senkrecht zum Strom stehenden Scheibe, so bildet sich hinter dieser ein „Totwasser", das allerdings meist nicht gänzlich tot ist, sondern mehr oder weniger von Wirbeln erfüllt ist (vgl. Fig. 20). Doch sind dort immerhin die Geschwindigkeiten wesentlich kleiner als außerhalb.

Helmholtz[1]) hat als erster Strömungsaufgaben mit Trennungsflächen theoretisch behandelt. U. a. hat er die Gestalt eines aus einem Spalt in ebener Wand austretenden Strahls bei Abwesenheit von Schwere mit den Methoden der konformen Abbildung (vgl. § 9, c) behandelt. Über die Kirchhoffsche Berechnung einer Strömung mit Totwasser siehe § 12 des III. Abschnitts.

Trennungsflächen bilden sich übrigens unter geeigneten Bedingungen auch an runden Körperoberflächen, vgl. darüber § 6 von Abschnitt III. An abgerundeten Kanten ist daher die Strömung meist durchaus derjenigen an scharfen Kanten ähnlich.

Ein besonderes Interesse verdient der in Fig. 41 und 42 dargestellte Fall. Beim ersten Bewegungsbeginn muß hier eine Strömung nach der in Fig. 41 angedeuteten Form entstehen. An den Kanten entstehen dann zunächst Wirbel und Trennungsflächen. Nachdem die Wirbel sich aber entfernt haben, bleibt — wenigstens unter der Voraussetzung, daß die Entfernung der beiden Kanten klein genug ist, um Labilität zu vermeiden — eine Strömung nach Fig. 42 zurück. In dem Einschnitt herrscht praktisch Ruhe. Der Druck ist dort, da er in dem ruhenden Teil konstant ist und in der Trennungsfläche stetig in den der strömenden Flüssigkeit übergehen muß, offenbar gleich

Fig. 41. Fig. 42.



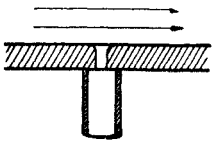
Strömung an einem Schlitz.

[1]) Ostwalds Klassiker Nr. 79.

dem Druck in der strömenden Flüssigkeit. Schließt man an das Innere des Einschnitts durch eine Rohrleitung oder einen Gummischlauch ein Druckmeßgerät an, so gelingt es damit, den Druck in der strömenden Flüssigkeit zu messen. Statt eines Einschnitts kann auch ein irgendwie gestaltetes Loch z. B. eines von kreisförmigem Querschnitt verwendet werden. Die Ränder des Loches und Schlitzes müssen gut eben sein, keinesfalls darf ein Grat in die strömende Flüssigkeit vorstehen, da dadurch der Druck in der nun gewölbten Trennungsfläche erheblich von dem der benachbarten Flüssigkeitsteile abweichen würde. Eine mäßige Abrundung der Lochränder ist zulässig. Eine zweckmäßige Anordnung für eine Druckentnahmestelle an einer Rohrwand zeigt Fig. 43. Um den Druck im Innern der strömenden Flüssigkeit zu messen, kann man in Verwendung desselben Grundgedankens eine vor das Ende eines dünnen Rohres gelötete, in der Mitte durchbohrte, sehr feine Scheibe (Sersche Scheibe, Fig. 44) verwenden. Diese ist aber gegen eine Richtungsabweichung des Luftstroms gegen die Scheibenebene sehr empfindlich. Besser ist ein Gerät nach Fig. 45, das bis zu Winkelabweichungen von etwa 5° den Druck einigermaßen genau liefert. Bei schräger Haltung zeigt es zu niedrigen Druck.

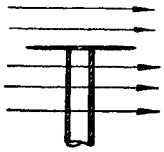
Durch Verbindung einer solchen Druckmessung mit der in § 4, c und Fig. 29 angegebenen Messung des Gesamtdrucks ist man nun in der Lage

Fig. 43.



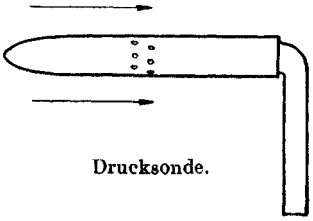
Anbohrung einer Wand zur Druckmessung.

Fig. 44.



Sersche Scheibe.

Fig. 45.



Drucksonde.

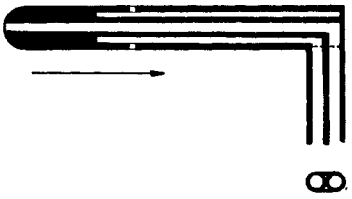
als Differenzdruck den Geschwindigkeitsdruck (dynamischen Druck oder Staudruck) $q = \frac{\varrho w^2}{2}$ zu erhalten, aus dem bei bekannter Dichte ϱ die Geschwindigkeit w berechnet werden kann. Im m-kg-sec-System ist für atmosphärische Luft $\varrho = \frac{\gamma}{g}$ ziemlich genau $= \frac{1}{8} \frac{\text{kg sec}^2}{\text{m}^4}$, dies gibt für w in m/sec und q in kg/m²: $q = \frac{w^2}{16}$ und $w = 4\sqrt{q}$, was leicht zu merken ist. Für Wasser ist in demselben Maßsystem $\varrho = \frac{\gamma}{g} = 102$; man ist aber bei Wasser mehr geneigt statt der Drücke Druckhöhen anzugeben. Mit der Druckhöhe $= h$ (in m) wird $w = \sqrt{2gh}$ wie früher.

Man kann die Drucksonde nach Fig. 45 mit dem Pitotrohr nach Fig. 29 zu einem einzigen Gerät vereinigen, wodurch ein sehr handliches Mittel für die Geschwindigkeitsmessung entsteht. Fig. 46 stellt eine Ausführungsform eines solchen „Staugeräts“ dar, die sich durch große Unempfindlichkeit gegen Neigungsabweichungen des Instruments gegen die Strömungsrichtung

auszeichnet. Bei Luftgeschwindigkeitsmessungen wird es gewöhnlich in Verbindung mit einem Mikromanometer (vgl. 1. Abschn., § 8) gebraucht.

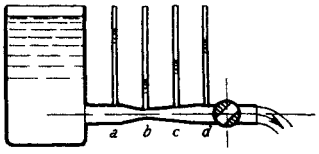
Die Druckmessung durch Anbohrung gestattet auch sonst viele nützliche Anwendungen. So kann die Druckverteilung auf der Oberfläche eines umströmten Körpers (z. B. eines Luftschiffmodells oder Flugzeugflügels) dadurch studiert werden, daß man eine Reihe von Anbohrungen nach Fig. 42 anbringt, die man nacheinander mit der einen Seite eines Druckmeßgeräts verbindet, wobei der Gegendruck konstant gehalten wird (man kann auch eine Anzahl Druckmeßgeräte gleichzeitig arbeiten lassen). Ein sehr bekannter Versuch über die Druckverteilung in einem verengten und wieder erweiterten Rohr, der zur Demonstration der Bernoullischen Gleichung verwendet wird, ist in Fig. 47 wiedergegeben. Durch den Drosselhahn am Rohrende kann der Druck dort passend eingestellt werden. Wird der Hahn voll geöffnet, so entsteht bei *b* erheblicher Unterdruck, der durch Anbringung eines nach unten führenden Rohres, das in ein Quecksilbergefäß taucht, deutlich nachgewiesen werden kann (Fig. 48). Der Rückgewinn an Druck ist im übrigen wegen

Fig. 46.



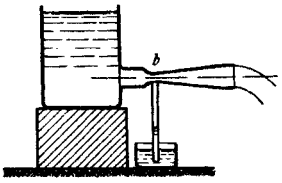
Staurohr nach Prandtl.

Fig. 47.



Druckminderung in Verengungen.

Fig. 48.



Reibungsvorgängen in dem Teil hinter dem engsten Querschnitt etwas kleiner als nach der Theorie, immerhin ist qualitativ das Verhalten so, wie es der Bernoullischen Gleichung entspricht, und in dem verengten Teil stimmt sie, falls durch genügende Abrundung Wirbelbildung vermieden wird, sogar sehr gut. Solche Druckunterschiede an Verengungen können zur Mengenmessung verwendet werden, vgl. III. Abschnitt, § 10.

§ 8. Verfeinerte Betrachtungen über die Bewegungen einer homogenen reibungslosen Flüssigkeit. Potentialströmung. Die mathematische Hydrodynamik steckt ihr Ziel weiter, als es in den vorausgehenden Paragraphen geschehen ist, sie will wirklich so, wie in § 1 angedeutet, die Geschwindigkeit an jedem Raumpunkt angeben können, und sich nicht, wie wir es bisher meist getan haben, mit Mittelwerten begnügen. Für die homogene reibungslose Flüssigkeit ist in dieser Beziehung ziemlich viel erreicht worden, doch ist zum Verständnis der einschlägigen Methoden mehr Mathematik erforderlich, als hier vorausgesetzt wird. Es müssen deshalb hier einige allgemeinere Dar-

legungen über die Eigenschaften solcher Bewegungen und einige einfache Beispiele genügen. Vorangestellt sei ein Satz von W. Thomson (Lord Kelvin), der hier zunächst ohne Beweis mitgeteilt wird. Bevor der Satz formuliert wird, müssen einige Begriffe erklärt werden.

1. Unter „flüssigen Linien" und „flüssigen Flächen" sollen solche Linien und Flächen verstanden werden, die dauernd von denselben Flüssigkeitsteilchen gebildet werden.

2. Unter einem Linienintegral längs einer gegebenen Linie zwischen den Punkten A und B soll verstanden werden das Integral über das Produkt des Linienelements ds mit der Geschwindigkeitskomponente in Richtung von ds, also

$$L = \int_A^B w\,ds \cos\alpha = \int_A^B \mathfrak{w}\,d\mathfrak{s}\,^{1)}$$

(α = Winkel zwischen w und ds). Im Falle einer nichtstationären Bewegung ist festzuhalten, daß solche Linienintegrale für einen Momentanzustand der Geschwindigkeitsverteilung zu bilden sind.

3. Der Betrag des Linienintegrals für eine geschlossene Linie heißt Zirkulation (Bezeichnung Γ), also, mit $\oint$ als Zeichen für ein Integral längs einer geschlossenen Linie

$$\Gamma = \oint \mathfrak{w}\,d\mathfrak{s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Mit diesen Erklärungen kann der Satz von W. Thomson so ausgesprochen werden: In einer reibungslosen homogenen Flüssigkeit bleibt die Zirkulation längs einer geschlossenen flüssigen Linie zeitlich konstant.

Aus diesem Satz können viele wichtige Folgerungen gezogen werden. Die erste ist die folgende:

Beginnt die Bewegung aus der Ruhe heraus, so ist der Anfang, d. h. vor Beginn der Bewegung, sicher die Zirkulation für jede geschlossene flüssige Linie gleich Null, sie bleibt daher dauernd für diese Linie gleich Null. Wenn aber das Linienintegral über geschlossene Linien in einem Gebiet gleich Null ist, so ist auch das Linienintegral von einem Punkte A nach einem anderen Punkte B vom Wege unabhängig, gleichgültig, welcher Weg innerhalb des Gebietes gewählt wird. Denn man kann ja den bisherigen Weg von B nach A zurückgehen (wodurch die Beträge von A nach B wegen umgekehrten Richtungssinnes von ds genau aufgehoben werden) und auf einem anderen Wege wieder nach B gehen. Das Ganze ist $\int_A^B$ plus einem Integral über einen geschlossenen Weg, das $= 0$ ist, also $= \int_A^B$, was zu beweisen war. Betrachtet

---

1) $\mathfrak{w}\,d\mathfrak{s}$ = skalares Produkt der Vektoren $\mathfrak{w}$ und $d\mathfrak{s}$.

man den Punkt A als fest, dann ist durch das $\int_A^B \mathfrak{w}\, d\mathfrak{s}$ jedem Punkt B ein Zahlenwert zugeordnet. Wir bezeichnen ihn mit Φ und nennen ihn Potential am Punkt B. Geht man von B nach einem um ds entfernten Punkt C weiter, dann ist, da für die Bildung von $\int_A^C$ der Weg über B genommen werden darf,

$$\int_A^C = \int_A^B + \mathfrak{w}\, d\mathfrak{s} \quad \text{oder} \quad \Phi_C = \Phi_B + w\, ds \cos\alpha = \Phi_B + w\, dh, \qquad (2)$$

wenn dh die Projektion von ds auf die Richtung von w bedeutet. Für $\alpha = 90^0$ wird $\cos\alpha = 0$ und daher $\Phi_C = \Phi_B$. Die Strecke $ds = \overline{BC}$ steht daher immer senkrecht auf der Richtung von $\mathfrak{w}$, wenn $\Phi_C = \Phi_B$ ist. Die Gesamtheit aller Punkte, für die $\Phi = \Phi_B$ ist, bildet aber eine Fläche, die durch den Punkt B geht[1]). Die Tangentialebene dieser Fläche im Punkt B steht also nach dem Vorstehenden senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{w}$ im Punkt B. Es gilt daher allgemein, daß die Stromlinien, die ja überall die Richtung des Geschwindigkeitsvektors haben, überall senkrecht auf den Flächen $\Phi = const$ stehen.

Für beliebige Werte von α ergibt sich aus Gl. (2) mit $\Phi_C - \Phi_B = d\Phi$ einmal

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = w \cos\alpha \qquad (3)$$

andererseits auch

$$\frac{d\Phi}{dh} = w \qquad (4)$$

dh steht dabei gemäß obigem senkrecht auf der Fläche $\Phi = const$. Vektoriell schreibt man

$$\mathfrak{w} = \operatorname{grad} \Phi \qquad (5)$$

(lies „Gradient von Φ") und faßt damit die Aussage (4) mit der zusammen, daß $\mathfrak{w}$ senkrecht auf den Flächen $\Phi = const$ steht, also: Geschwindigkeit nach Größe wie nach Richtung = größter Anstieg (= Gradient) von Φ.

Die geometrische Begriffsbildung des Potentials und Gradienten, wie sie hier auftritt, stimmt völlig mit der des Kräftepotentials in der Physik überein. Von dort ist auch der Name Potential entnommen. Der Gradient des Kräftepotentials ist allerdings eine Feldstärke, der unseres Potentials eine Geschwindigkeit. Man bezeichnet es deshalb als „Geschwindigkeitspotential" oder auch „Strömungspotential". Als ein Unterschied mag noch erwähnt werden, daß es üblich ist, die Feldstärke $\mathfrak{g} = -\operatorname{grad} U$ und $\mathfrak{w} = +\operatorname{grad} \Phi$ zu setzen. Man könnte unter Umkehrung des Vorzeichens von Φ Übereinstimmung herbeiführen, und es geschieht auch manchmal, hier mag aber an dem bequemen $+$-Zeichen festgehalten werden.

Aus dem weiter oben Gesagten folgt also unter Verwendung der hier entwickelten Begriffe, daß jede aus der Ruhe heraus entstandene Be-

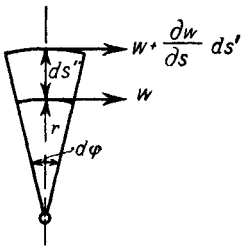
[1]) Diese Fläche scheidet das Gebiet $\Phi > \Phi_B$ von dem Gebiet $\Phi < \Phi_B$.

wegung einer homogenen reibungsfreien Flüssigkeit ein Potential besitzt. Die „Potentialströmung", wie wir solche Bewegungen nennen wollen, zeichnet sich dadurch aus, daß die Elemente keine Drehung erfahren. Als Maß für die Drehung kann nämlich immer die Zirkulation längs einer kleinen geschlossenen Kurve dienen, die hier nach dem Gesagten gleich Null ist.

Nimmt man als Gegenbeispiel eine Flüssigkeit an, die wie ein starrer Körper mit einer Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, so ist hier für einen Kreis vom Radius r, falls der Kreismittelpunkt als Nullpunkt des Bezugssystems gewählt wird[1]), die Geschwindigkeit $= \omega r$; sie hat die Richtung des Kreisumfangs. Das Linienintegral für diesen ist also $\Gamma = 2\pi r . \omega r = 2\pi r^2 \omega$. Dividiert man durch die Kreisfläche $F = \pi r^2$, so wird $\frac{\Gamma}{F} = 2\omega$; $\frac{\Gamma}{F}$ ergibt sich sonach als ein gutes Maß für die Drehung. Hat die Fläche F eine allgemeine Lage, d. h. bildet sie mit der Drehachse einen Winkel α, so ergibt sich leicht, daß dann für unsere Bewegung $\frac{\Gamma}{F} = 2\omega \sin \alpha$ wird. Die Flächenlage, die das Maximum von $\frac{\Gamma}{F}$ liefert, ist also dadurch ausgezeichnet, daß die Drehachse senkrecht zu F steht.

Bei der Potentialbewegung ist jede Zirkulation für im Innern des Gebietes verlaufende Linien gleich Null, die Bewegung daher überall im Innern „drehungsfrei". Man hat geglaubt, daraus schließen zu müssen, daß bei einer aus der Ruhe heraus entstehenden Bewegung einer homogenen reibungslosen Flüssigkeit nie ein Wirbel entstehen könne. Betrachtet man jedoch die Bewegungsvorgänge bei der Bildung einer Trennungsfläche von der in § 6 geschilderten Art näher, so zeigt sich, daß alle im Ruhezustand im Innern der Flüssigkeit gezogenen flüssigen Linien sich so bewegen und deformieren, daß sie der Trennungsfläche ausweichen und so keine von ihnen die Trennungsfläche durchsetzt. Über die gegenseitigen Beziehungen der Gebiete zu beiden Seiten der Trennungsfläche sagt demnach der Thomsonsche Satz nichts aus. Es ist daher auch kein Widerspruch gegen den Thomsonschen Satz, daß in einer praktisch reibungsfreien Flüssigkeit an scharfen Kanten Trennungsflächen und damit auch Wirbel entstehen können.

Fig. 49.



Anmerkung: Bei den wirklichen Flüssigkeiten, die immer etwas Zähigkeit besitzen, tritt an Stelle der Trennungsfläche eine Trennungsschicht, die aber häufig sehr dünn ist. Die Teilchen der Trennungsschicht stammen immer aus der unmittelbaren Nähe der Oberfläche des festen Körpers, wo die Reibungswirkungen ebenfalls auch bei noch so kleiner Zähigkeit nicht mehr vernachlässigt werden können. Die genauere Analyse der inneren Vorgänge in den Trennungsschichten muß daher die Zähigkeitswirkungen berücksichtigen. Für das Studium der äußeren Vorgänge genügt aber meist schon die Betrachtung der an Stelle der Trennungsschicht eingeführten Trennungsfläche. Über die Reibungswirkungen vgl. Abschnitt III, § 1 bis 6.

In § 5 war für die Strömung, bei der die Konstante der Bernoullischen Gleichung für alle Stromlinien eines Gebietes denselben Wert hat, aus dem Druckgefälle quer zur Stromlinie abgeleitet worden, daß

$$\frac{\partial w}{\partial s'} + \frac{w}{r} = 0$$

[1]) Eine Translationsbewegung liefert zur Zirkulation keinen Beitrag, man darf daher von ihr bei der Berechnung der Zirkulation immer absehen.

ist (r = Krümmungsradius der Stromlinie). Die Zirkulation um ein kleines Viereck aus zwei Stromlinien und zwei Normalen (vgl. Fig. 49) liefert nun, da die Normalen keine Beiträge geben:

$$w \,.\, r\,d\varphi - \left(w + \frac{\partial w}{\partial s'} \cdot ds'\right)(r + ds')\,.\,d\varphi$$
$$= -ds'\,.\,d\varphi\left(r\frac{\partial w}{\partial s'} + w + \frac{\partial w}{\partial s'}ds'\right).$$

Das letzte Glied in der Klammer ist als klein von höherer Ordnung zu streichen, der Rest ist nach der obigen Beziehung gleich Null, d. h. die obige Bewegung ist eine Bewegung mit Zirkulation gleich Null für jeden kleinen Bezirk, d. h. sie ist eine Potentialbewegung. Umgekehrt gilt in jeder stationären Potentialbewegung die Bernoullische Gleichung unabhängig von den Stromlinien (Beweis am Schluß der folgenden „mathematischen Ergänzung").

Mathematische Ergänzung.

a) Beweis des Thomsonschen Satzes. Sind u, v, w die Komponenten der Geschwindigkeit, so drückt sich das Linienintegral aus durch $\int(u\,dx + v\,dy + w\,dz)$ (jeder Schritt ds kann durch drei Schritte dx, dy, dz ersetzt werden, und u, v, w sind die Geschwindigkeitskomponenten in der Richtung von dx, dy bzw. dz). Es muß nun die zeitliche Änderung des Integrals unter der Voraussetzung berechnet werden, daß die Linie dauernd aus denselben Flüssigkeitsteilchen besteht. Das Zeichen dieser Differentiation sei $\frac{d}{dt}$ (man findet in der Literatur auch $\frac{D}{Dt}$ dafür). Wir wollen zunächst $\frac{d}{dt}\int u\,dx$ berechnen und können dafür zunächst schreiben $\int\frac{du}{dt}dx + \int u\,\frac{d}{dt}(dx)$. In dem ersten Ausdruck kann $\frac{du}{dt}$ mittels der Eulerschen Gleichung [§ 3, Gl. (5)] durch $X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}$ ersetzt werden; zur Berechnung des zweiten Ausdruckes sei bemerkt, daß offenbar für festgehaltenes Teilchen $\frac{dx}{dt} = u$ ist. Dann ist auch $\frac{d}{dt}(x + dx) = u + du$, also $\frac{d}{dt}(dx) = du$, wobei also du die Änderung von u beim Fortschreiten längs der Linie bei festgehaltener Zeit ist. Wird mit den anderen beiden Gliedern des Linienintegrals ebenso verfahren, so ergibt sich also

$$\frac{d}{dt}\int(u\,dx + v\,dy + w\,dz) = \int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$
$$-\int\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) + \int(u\,du + v\,dv + w\,dw).$$

Es sei nun angenommen, daß die Massenkraft X, Y, Z ein Potential U habe, daß also

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x};\quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y};\quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

sei; ferner soll die Dichte nur vom Druck allein abhängen („homogene Flüssigkeit"), dann sind die obigen Ausdrücke sämtlich integrabel. Die zeitliche Änderung des Linienintegrals längs einer flüssigen Linie zwischen zwei Punkten A und B, die ebenfalls dauernd mit den zugehörigen Flüssigkeitsteilchen zusammenfallen sollen, wird damit

$$\frac{d}{dt}\int_A^B(u\,dx + v\,dy + w\,dz) = U_A - U_B + P_A - P_B$$
$$+\left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\right)_B - \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\right)_A.$$

Dabei ist wieder wie in § 3 $\int \frac{dp}{\varrho} = P$ gesetzt. Es mag darauf hingewiesen werden, daß hier das Vorzeichen des Geschwindigkeitsquadrates entgegengesetzt zu dem in der Bernoullischen Gleichung ist.

Handelt es sich um eine geschlossene Linie, so fällt A mit B zusammen, und damit ergibt die rechte Seite Null. Hiermit ist der Satz bewiesen und es zeigt sich dabei die Bedeutung der Voraussetzungen. Die eine, daß das Kraftfeld ein Potential haben müsse, ist bei der bisherigen Formulierung des Satzes nicht erwähnt worden, da von der Vorstellung ausgegangen war, daß eine Massenkraft überhaupt nicht in Betracht käme. Auf die andere, die viel wichtiger ist, die Homogenität, wurde bereits früher hingewiesen. In einer inhomogenen Flüssigkeit gilt der Thomsonsche Satz nicht. Die vorstehende Ableitung zeigt den Weg an, wie z. B. bei ungleicher Erwärmung einer Luftmasse die zeitliche Änderung des Linienintegrals berechnet werden kann.

b) Bemerkungen über die Potentialbewegung. Die Winkelgeschwindigkeit ω hat drei Komponenten (Drehungsanteile um die Koordinatenachsen):

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),$$
$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right),$$
$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Sollen diese Drehungsanteile sämtlich Null sein, so muß also $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$ usw. sein. Wird nun ein Geschwindigkeitspotential Φ eingeführt, also $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$; $v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$; $w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ gesetzt, so sind diese Beziehungen identisch erfüllt (die angeschriebene gibt $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)$, was bekanntlich immer zutrifft. Mit $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$ usw. kann nun aber in Gl. (4) von § 3

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial x} v + \frac{\partial w}{\partial x} w \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\right)\end{aligned}$$

geschrieben werden. Multipliziert man jetzt die drei Eulerschen Gleichungen der Reihe nach mit dx bzw. dy und dz und addiert, so sind alle Ausdrücke ohne Einschränkung des Integrationsweges integrabel und liefern

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + P + U = const.$$

Da die Integration bei festgehaltener Zeit erfolgt, kann die Konstante rechts noch zu verschiedenen Zeiten verschiedene Werte annehmen (z. B. durch Einwirkung von außen der Druck sich ändern). Man schreibt deshalb richtiger $f(t)$ für *const.* Der Ausdruck $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ wird dadurch erhalten, daß $\Phi = \int (u\,dx + v\,dy + w\,dz)$ ist und $\int \frac{\partial u}{\partial t} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int u\,dx$ usw. ist. Für stationäre Strömungen geht die vorstehende Gleichung in die gewöhnliche Bernoullische Gleichung über.

§ 9. Weiteres über Potentialbewegung.

Aus Gl. (3) von § 8 folgen Formeln für den Zusammenhang der Geschwindigkeitskomponenten u, v, w mit dem Potential Φ, wenn man ds der Reihe nach $= dx$, $= dy$ und $= dz$ setzt. Es wird also

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x};\ v = \frac{\partial \Phi}{\partial y};\ w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die Kontinuitätsgleichung

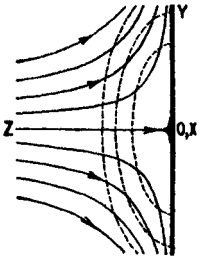
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

[Formel (2) von § 2] liefert damit die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Diese Gleichung, die sogenannte Laplacesche Gleichung, tritt ebenso bei den elektrostatischen Potentialen [und auch anderwärts][1]) auf, und gilt dort für diejenigen Teile des Feldes, wo keine Ladungen sitzen (und die Dielektrizitätskonstante konstant ist). Daher lassen sich die aus der Elektrostatik bekannt gewordenen Lösungen von Gl. (2) auch hier verwenden, wie z. B. die Lösung für eine Punktladung, für einen Dipol usw. Von großer praktischer Wichtigkeit ist dabei der Umstand, daß die Summe oder Differenz zweier Lösungen wieder eine Lösung liefert, wie sich aus der Linearität von Gl. (2) ergibt. Die Geschwindigkeiten setzen sich bei dieser „Überlagerung" zweier Potentiale nach dem Parallelogramm zusammen.

Fig. 50.



Staupunktströmung.

Einige Beispiele von Potentialströmungen.

a) Staupunktströmung. Einer der einfachsten Ansätze eines Potentials ist $\Phi = {}^1/_2 (ax^2 + by^2 + cz^2)$. Gl. (2) liefert, daß dabei $a + b + c = 0$ sein muß. Wenn wir Rotationssymmetrie mit der Z-Achse als Rotationsachse haben wollen, so können wir $b = a$, $c = -2a$ setzen, wodurch Gl. (2) befriedigt wird, also wird

$$\Phi = \frac{a}{2}(x^2 + y^2 - 2z^2)$$

und $u = ax$; $v = ay$; $w = -2az$. Die Stromlinien in der YZ-Ebene ($x = 0$) sind durch die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dy} = \frac{w}{v} = -\frac{2z}{y}$$

gegeben, die

$$\ln z = const - 2 \ln y \quad \text{oder} \quad y^2 z = const$$

liefert (sogenannte kubische Hyperbel, vgl. die Fig. 50).

Ist die Bewegung stationär, d. h. a zeitlich konstant, so gilt für den Druck

$$p = const - \frac{\varrho}{2}(u^2 + v^2 + w^2),$$

$$= const - \frac{\varrho a^2}{2}(x^2 + y^2 + 4z^2).$$

Bei $x = y = z = 0$ ist also ein Druckmaximum, und im übrigen sind die Flächen gleichen Druckes Ellipsoide mit dem Achsenverhältnis $1 : 1 : {}^1/_2$, vgl. Fig. 50.

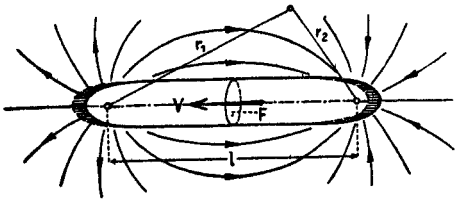
---

[1]) Auch z. B. bei den reibenden Strömungen zwischen eng gestellten parallelen Platten; dieser Vorgang wird vielfach zur Demonstration der Stromlinien der Potentialbewegung benutzt. Die Ergebnisse sind unter bestimmten Voraussetzungen in Übereinstimmung mit der Potentialbewegung, obwohl das Kräftespiel dort ganz anders geartet ist, vgl. hierüber § 8 von Abschn. 3.

b) Quellen und Senken. Nach der an Gl. (2) geknüpften Bemerkung sind die bekannten Lösungen für die elektrostatischen Potentiale auch Lösungen für mögliche Potentialströmungen, wofern die Grenzbedingungen für diese verwirklichbar erscheinen. Bereits das elektrostatische Feld einer Punktladung liefert eine wichtige Strömung, die sogenannte Quell- bzw. Senkenströmung. Das Potential lautet $\Phi = \pm \frac{c}{r}$, wo r den Abstand von einem Punkte O bedeutet. Es ist also konstant auf Kugeln, die um O beschrieben werden, die Geschwindigkeit ist damit, da sie zur Fläche konstanten Potentials senkrecht steht, rein radial gerichtet und hat den Betrag $\frac{|c|}{r^2}$. Die Durchflußmenge, die in der Zeiteinheit durch die Kugel vom Radius r (Oberfläche $= 4\pi r^2$) hindurchtritt, ist $Q = 4\pi r^2 \cdot \frac{c}{r^2} = 4\pi c$. Diese Menge entsteht bei der „Quelle" im Punkt O sekundlich neu, bei der Senke verschwindet sie dort. Genau in dieser Weise kommt das physikalisch nicht vor, aber man kann z. B. bei O durch ein dünnes Rohr Flüssigkeit absaugen und hat dann in der Umgebung der Saugstelle genähert eine Strömung der angegebenen Art zu erwarten (nur genähert, da das endliche Volumen des Rohres stört usw.).

Eine andere sehr nützliche Anwendung der Quell- und Senkenströmung ist die folgende: Bewegt sich ein stabförmiger Körper mit der Geschwindigkeit V in der Richtung der Stabachse vorwärts, so wird fortwährend an seinem vorderen Ende Flüssigkeit verdrängt, an seinem hinteren Ende fließt sie in dem frei gewordenen Raum zusammen (vgl. Fig. 51). Die Bewegung in der Nachbarschaft des Vorderteils ist also so, als ob dort eine Quelle, und die am Hinterteil so, als ob dort eine Senke wäre. In der Tat gibt die Formel

Fig. 51.



Potentialströmung um einen bewegten Körper. Ruhendes Bezugssystem.

$$\Phi = c\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

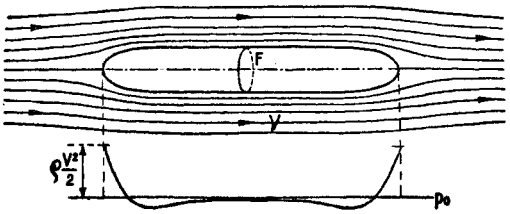
diese Strömung richtig wieder (genau genommen müssen dafür die Stabenden eine bestimmte wohl abgerundete Form haben, aber auch bei anderer Form der Stabenden stellt die Gleichung eine brauchbare Näherung dar). Die „Ergiebigkeit" Q der Quelle und der Senke ist dabei $= F \cdot V$ zu setzen, wo F den Stabquerschnitt bedeutet, also $c = \frac{FV}{4\pi}$. Betrachtet man diese Bewegung die zunächst wegen des stetigen Vorrückens des Stabes und der Geschwindigkeitsverteilung um ihn herum nicht stationär ist, von einem Bezugssystem aus, das sich mit dem Körper mitbewegt, so ergibt sich eine stationäre Bewegung, für die der Körper in Ruhe ist, und der Flüssigkeitsstrom an dem Körper vorbeigleitet. Mathematisch wird diese Strömung durch das Potential $\Phi' = \Phi + Vx$ dargestellt. Ihre Stromlinien sind in Fig. 52 dargestellt.

Darunter ist die Druckverteilung über die Oberfläche des Körpers dargestellt, wie sie von der Bernoullischen Gleichung geliefert wird.

Rückt man die Quelle und die Senke immer näher zusammen und verstärkt ihre Ergiebigkeit in demselben Maße, als ihre Entfernung abnimmt, so erhält man in der Grenze einen „Dipol"; die Strömung nach Fig. 52 geht dabei über in die um eine Kugel (vgl. Fig. 53). (Die wirkliche Strömung um eine Kugel sieht, wie bemerkt werden mag, wegen Reibungseinflüssen etwas anders aus.)

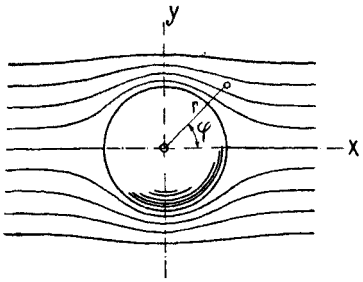
c) Ebene Bewegung. Ist die Bewegung derart, daß alle Stromlinien ebene Kurven in lauter parallelen Ebenen sind, und daß auf einer zu der Ebenenschar senkrechten Geraden überall derselbe Strömungszustand herrscht, so spricht man von „ebener Bewegung". Nimmt man eine der Ebenen zur XY-Ebene, so ist also von den drei Geschwindigkeitskomponenten u, v, w die letztere $= 0$, und die ersteren sind Funktionen von x und y allein. Die Theorie dieser Strömungen ist in der mathematischen Hydrodynamik besonders vollkommen durchgebildet, da hier ein besonders mächtiges Hilfsmittel zur Verfügung steht. Es zeigt sich nämlich, daß der reelle wie der imaginäre Teil einer jeden analytischen Funktion der komplexen Veränderlichen $x + iy$ ein Potential darstellt, das der Gl. (2) genügt. Die komplexe Veränderliche sei $z = x + iy$; die Funktion heiße $F(z)$, ihr reeller Teil Φ, der imaginäre Ψ, also $F = \Phi + i\Psi$.

Fig. 52.



Strömung um einen bewegten Körper. Mitbewegtes Bezugssystem. Darunter Druckverteilung.

Fig. 53.



Potentialströmung um die Kugel.

Nun ist

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{dF}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{dF}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y},$$

aber

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = i,$$

also

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{i}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}.$$

Hierin müssen die reellen Anteile und die imaginären je für sich übereinstimmen. Es ist also, mit $1/i = -i$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}\ (= u) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}\ (= v). \tag{3}$$

Damit wird

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = 0,$$

also ist die Kontinuitätsgleichung (2), da $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$ identisch verschwindet, erfüllt. Für die Funktion Ψ ist im übrigen ebenfalls $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$, so daß auch Ψ ein brauchbares Strömungspotential darstellt. Aus den Gleichungen (3) ist leicht zu ersehen, daß die beiden Strömungen in jedem Punkt senkrecht aufeinander stehen und gleichen Geschwindigkeitsbetrag haben. Die Linien gleichen Potentials der einen Strömung sind daher Stromlinien der anderen (da die Geschwindigkeit immer senkrecht auf der Potentialfläche steht!). Man nennt die Funktion, die auf Stromlinien konstant ist, die Stromfunktion. Gilt also Φ als das Potential, dann ist Ψ die Stromfunktion. Die Stromfunktion hat noch eine weitere anschauliche Bedeutung, indem die Differenz der Funktionswerte zwischen zwei Punkten das in der Zeiteinheit zwischen den beiden Punkten in einer Schicht von der Dicke 1 durchfließende Volumen darstellt.

Als einfache Beispiele von ebenen Strömungen mögen die folgenden aufgeführt werden. Die ebene Staupunktströmung wird durch die Funktion $F = \frac{a}{2} z^2$ dargestellt:

$$\Phi + i\,\Psi = \frac{a}{2}(x^2 + 2\,i\,x\,y - y^2); \quad \text{also } \Phi = \frac{a}{2}(x^2 - y^2);$$
$$\Psi = a\,x\,y.$$

Die Stromlinien $\Psi = const$ sind gleichseitige Hyperbeln, die Geschwindigkeiten

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = a\,x; \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -a\,y.$$

Die ebene Quellströmung wird durch $F = b \ln z$ erhalten. Es ist $\ln z = \ln r + i\,\varphi$, wo r und φ Radius und Zentriwinkel in Polarkoordinaten sind (also $\Phi = const$ auf den Kreisen $r = const$; $\Psi = const$ auf den Geraden $\varphi = const$).

Als drittes Beispiel sei eine Strömung an zwei Wänden entlang aufgezeigt, die einen Winkel α miteinander bilden. Liegt der Schnittpunkt im Koordinatenursprung und die erste Wand in der X-Achse, so lautet die Funktion $F = \frac{a}{n} z^n$, mit $n = \frac{\pi}{\alpha}$. Mit Einführung von Polarkoordinaten ist $z = x + i\,y = r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, und nach einem bekannten Satz

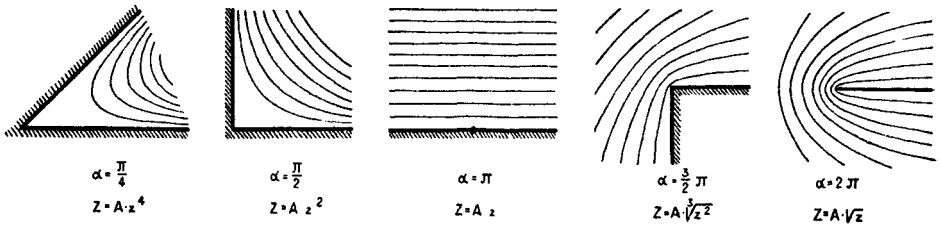
$$z^n = r^n (\cos n\,\varphi + i \sin n\,\varphi).$$

Also ist die Stromfunktion $\Psi = \frac{a}{n} r^n \sin n\,\varphi$, und es ist also $\Psi = 0$ für $\varphi = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}$ usw., also mit obigem Wert von n für $\varphi = 0, \alpha, 2\alpha \ldots$ Die Form der Stromlinien für verschiedene Werte von α geht aus den

Figuren 54 bis 58 hervor. Für $\alpha < \pi$ ist im Ursprung die Geschwindigkeit 0, für $\alpha > \pi$ ist sie dort ∞.

Die Strömung um einen Kreiszylinder wird durch $F = V\left(z + \frac{r_1^2}{z}\right)$ gegeben. $\left[\text{Gemäß dem obigen ist } \Psi = V \sin\varphi \left(r - \frac{r_1^2}{r}\right).\right]$ Dies wird $= 0$ für die X-Achse, wo $\sin\varphi = 0$ ist, und für den Kreis mit dem Radius r_1, wo $r - \frac{r_1^2}{r}$ verschwindet. Die Strömungsfigur ist der Fig. 53 sehr ähnlich.

Fig. 54 bis 58.



Strömungen $F = A \,.\, z^n$.

Die Zahl der Beispiele ließe sich beliebig vermehren. Zur Auffindung geeigneter Lösungen kommen noch eine Anzahl besonderer Verfahren zu Hilfe. So stellt die komplexe Beziehung $z = f(\zeta)$, wo $\zeta = \xi + i\eta$ eine andere komplexe Zahl ist, eine Zuordnung derart dar, daß zu jedem Wertepaar ξ, η ein Wertepaar x, y gehört. Es ist also jedem Punkt der ξ, η-Ebene ein Punkt der xy-Ebene zugeordnet. Man nennt das eine Abbildung. (Einer Linie entspricht wieder eine Linie, dem Schnittpunkt zweier Linien der Schnittpunkt der entsprechenden Linien.) Im einzelnen gelten Beziehungen analog zu der Gl. (3). Ein rechtwinkliges Netz geht wieder in ein rechtwinkliges (aber i. allg. krummliniges) über und der Abbildungsmaßstab ist in beiden Richtungen derselbe, so daß das Unendlichkleine geometrisch ähnlich abgebildet wird. Man nennt deshalb diese Art von Abbildung auch eine konforme Abbildung. Die bisherigen Beispiele von ebenen Strömungen sind auch sofort Beispiele für konforme Abbildungen, wenn man für Φ und Ψ ξ und η schreibt. Das letzte Beispiel lehrt u. a., wie man die halbe $\Phi\Psi$-Ebene auf ein Gebiet abbilden kann, das von zwei Stücken der X-Achse und einem Halbkreis vom Radius r_1 dazwischen begrenzt wird.

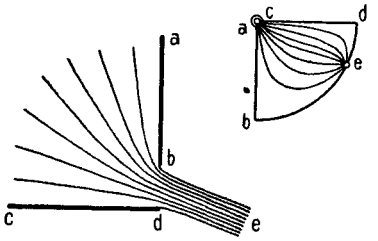
Nun kommt etwas für die Hydrodynamik Wichtiges hinzu. Wenn F eine analytische Funktion von z ist, und z eine analytische Funktion von ζ, so ist auch F eine analytische Funktion von ζ, d. h. auch in der ζ-Ebene liefert $F = \Phi + i\Psi$ wieder eine mögliche Strömung. Hat man also irgendeine mögliche Strömung in der xy-Ebene, so wird daraus durch jede Abbildung der xy-Ebene auf eine $\xi\eta$-Ebene eine neue Strömung in der $\xi\eta$-Ebene. Das Verfahren kann auch beliebig oft wiederholt werden.

Man kennt z. B. verschiedene Verfahren, um das äußere Gebiet einer tragflügelähnlichen Kontur auf das Äußere eines Kreises abzubilden. Daher

läßt sich aus der Strömung um den Kreis auch sofort eine Strömung um das Tragflügelprofil herleiten usf.[1]).

Der Differentialquotient $\frac{dF}{dz}$ ist, wie eine leichte Rechnung zeigt, $= u - iv$. Nennt man diese Größe (der konjugierte Wert zur komplexen Geschwindigkeit $u + iv$) $= w$, so ist offenbar $w = \frac{dF}{dz}$ ebenfalls eine analytische Funktion von z oder von F, also der Zusammenhang der $\Phi\Psi$-Ebene mit der uv-Ebene ebenfalls eine konforme Abbildung. Es gibt nun Fälle, in denen man Aussagen über die Geschwindigkeiten machen kann, die hinreichen, um das Gebiet in der w-Ebene völlig zu bestimmen. Wenn z. B. ein Flüssigkeitsstrahl durch einen Spalt zwischen ebenen Wänden austritt, so ist für die Grenzstromlinie die Richtung gegeben, so lange sie an einer Wand entlang fließt; für die Grenzen des freien Strahls ist die Richtung nicht bekannt, dafür aber die Größe, die wegen der Bernoullischen Gleichung konstant sein muß, wenn der Druck konstant ist. Daraus ergibt sich eine Abgrenzung des Gebietes (vgl. Fig. 59a und 59b) und es ist nur noch nötig, die auftretenden Singularitäten richtig zu erkennen, um F als Funktion von w zu erhalten. Durch Umkehren sei $w = w(F)$ ermittelt, dann ist $\frac{dF}{dz} = w(F)$ oder $z = \int \frac{dF}{w(F)}$. Man ermittelt so schließlich durch Trennen von reell und imaginär das x und y zu jedem Wert von Φ und Ψ, also das Stromlinienbild.

Fig. 59a. Fig. 59b.



Ausfluß aus einem Spalt. Strömung und zugehöriges Geschwindigkeitsbild.

Dieser kurze Überblick mag hier genügen, um eine Vorstellung von den komplexen Methoden zu geben.

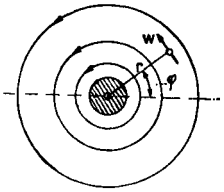
§ 10. Potentialströmung mit Zirkulation; Tragflügelauftrieb; Magnuseffekt. Obwohl bei allen Potentialströmungen in jedem kleinen Bereich die Zirkulation verschwindet, gibt es doch solche, bei denen im ganzen eine Zirkulation auftritt. Vorbedingung ist dabei allerdings, daß das Gebiet, in dem die Strömung sich abspielt, mehrfach zusammenhängend ist. Der mehrfache Zusammenhang wird dadurch gekennzeichnet, daß es Kurven gibt, die man durch stetige Veränderung nicht auf Null zusammenziehen kann, ohne das Gebiet zu verlassen[2]). Ist die Zirkulation längs einer solchen Kurve $= \Gamma$, so ist, wenn im übrigen die Strömung drehungsfrei ist (also in

[1]) Einzelheiten und ausführliche Literaturangaben finden sich u. a. in der Aerodynamik des Fluges von H. Schmidt, Berlin und Leipzig 1929.

[2]) Beispiele von zweifach zusammenhängenden Räumen: Ein Zimmer mit einer Säule in der Mitte; der Raum, der einen Ring umgibt.

jedem einfach zusammenhängenden Teilgebiet die Zirkulation verschwindet), die Zirkulation längs jeder anderen Kurve, die durch stetige Änderung ohne Verlassen des Gebiets aus der ersten entsteht, die Zirkulation ebenfalls $= \Gamma$, wie leicht zu zeigen ist. Das Potential, das ja als Linienintegral zwischen einem festgehaltenen Punkt und dem jeweiligen Raumpunkt definiert war, ist daher bei solchen Strömungen „mehrdeutig", es nimmt bei jedem Umlauf um den Betrag Γ zu.

Fig. 60.

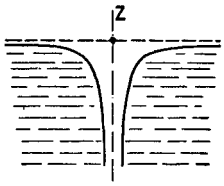


Potentialströmung mit Zirkulation.

Der einfachste Fall einer ebenen Strömung dieser Art wird durch das Potential $\Phi = c\varphi$ gegeben, in dem φ einen Zentriwinkel bedeutet (vgl. Fig. 60). Dieses Potential, das auch der Gl. (2) von § 9 genügt[1]), nimmt bei einem Umlauf ($\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi$) um $2\pi c$ zu, welcher Betrag also die Zirkulation Γ darstellt. Die Flächen konstanten Potentials sind hier Ebenen durch die Achse, die Stromlinien daher Kreise. Die Geschwindigkeit $w = \frac{d\Phi}{ds}$ wird mit $ds = r\,d\varphi$ $w = \frac{c}{r}$, die Strömung stimmt daher mit der in dem Beispiel von § 5, b betrachteten überein. Für $r = 0$ würde nach der Formel $w = \infty$ sein; die Strömung hat also nur für Begrenzung durch einen Kern von endlichem Durchmesser (in Fig. 60 schraffiert) physikalischen Sinn. Der Kern kann entweder durch einen festen Körper gebildet sein, er kann aber auch aus drehender Flüssigkeit bestehen (in der es kein Potential gibt), er kann endlich auch aus einer anderen (leichteren) Flüssigkeit bestehen, die an der Rotation keinen Anteil nimmt, also z. B. bei Wasser als umlaufender Flüssigkeit durch Luft gebildet werden (Hohlwirbel). Unter der Wirkung der Schwere nimmt die Oberfläche eines solchen Hohlwirbels eine Gestalt wie in Fig. 61 an, deren Form aus der Bernoullischen Gleichung zu

$$z = z_0 - \frac{w^2}{2g} = z_0 - \frac{c^2}{2gr^2}$$

Fig. 61.



Hohlwirbel.

erhalten wird. Derartige Trichter können vielfach in fließenden Gewässern, beim Entleeren einer Badewanne usw. beobachtet werden. In allen solchen Fällen handelt es sich um Strömungen, in denen durch irgendwelche anderen Ursachen bereits vorher Zirkulation enthalten war.

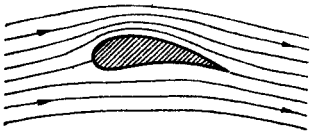
Eine Anwendung anderer Art wird von den Potentialströmungen mit Zirkulation in der Lehre vom Tragflügelauftrieb gemacht. Die Tragflügelströmung Fig. 62 läßt sich durch „Überlagerung" aus der „gewöhnlichen Potentialströmung" Fig. 63 (ohne Zirkulation) und der zirkulatorischen Strömung Fig. 64 darstellen; sie weist daher selbst ebenfalls eine Zirkulation

---

[2]) Es ist in komplexer Schreibweise $F = -i\,c\,ln\,z$.

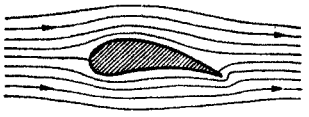
auf. Diese ist mit der Entstehung des Auftriebs aufs engste verknüpft; auch ohne alle Rechnung sieht man leicht, daß die zirkulatorische Strömung oben die Potentialströmung nach Fig. 63 verstärkt, unten ihr entgegenwirkt. Nach Bernoulli bedeutet das aber eine Druckverminderung oben und eine Druckvermehrung unten, d. h. einen Auftrieb. Kutta und Joukowski fanden unabhängig voneinander durch theoretische Rechnungen diese Kraft genau proportional der Zirkulation Γ, und zwar ist sie für die Längeneinheit $= \varrho \Gamma V$, wo V die Relativgeschwindigkeit des Tragflügels gegen die Flüssigkeit ist. Ein Beweis dieses Satzes wird in § 13, a gebracht werden.

Fig. 62.



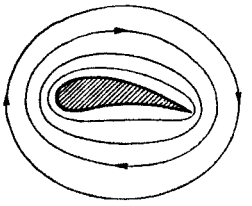
Flügelströmung.

Fig. 63.



Einfache Potentialströmung um einen Flügel.

Fig. 64.



Zirkulatorische Umströmung eines Flügels.

Nach dem Thomsonschen Satz kann bei Bewegungen aus der Ruhe heraus auch in einen mehrfach zusammenhängenden Raum zunächst keine Zirkulation entstehen, denn im Ruhestand wär die Zirkulation auf jeder Linie gleich Null, und sie bleibt dann auch gleich Null. In Wirklichkeit entsteht die Zirkulation in der Regel auf dem Wege über eine Trennungsfläche. Bei dem Spiralgehäuse von Fig. 30, S. 40 z. B. bildet sich beim Bewegungsbeginn an der scharfen Kante bei K ein Wirbel von der Art der Fig. 37, S. 43 aus. Der Wirbel fließt später bei O ab, und nur seine Zirkulation bleibt für die Dauer der Strömung zurück.

Für die Bewegung eines Tragflügels ergibt sich eine ganz ähnliche Lösung. Beim Bewegungsbeginn entsteht an der Hinterkante des Tragflügels, die im Anfang gemäß Fig. 63 quer überströmt wird, eine Trennungsfläche nach Fig. 65. Später wandert der aus der Trennungsfläche entstandene Wirbel ab und läßt an dem Tragflügel eine Zirkulation, die seiner eigenen entgegengesetzt gleich ist, zurück. (Die flüssigen Linien, die den Tragflügel und den Wirbel zusammen umschließen, behalten dabei die Zirkulation Null, wie es der Thomsonsche Satz verlangt.)

Fig. 65.

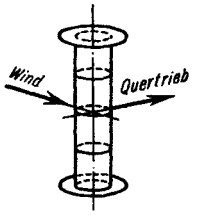
Anfahrt eines Flügels.

Anmerkung. Damit der Flügel den Raum zweifach zusammenhängend macht, muß man ihn seitlich durch zwei parallele Wände begrenzen, oder man muß annehmen, daß er nach beiden Seiten ins Unendliche reicht. Bei wirklichen Tragflügeln ist weder das eine noch das andere der Fall. Die Zirkulation um den Flügel, die auch hier vorhanden und zum Zustandekommen des Auftriebs notwendig ist, wird hier möglich durch eine Trennungsfläche von der bereits in § 7

geschilderten Art mit transversalem Geschwindigkeitssprung, über die in § 15 von Abschnitt III noch Näheres gesagt werden wird.

Eine Zirkulation von derselben Art, wie beim Tragflügel, entsteht auch bei einem quer zur Achse angeströmten rotierenden Kreiszylinder (und zwar durch Reibungswirkungen, vgl. 3. Abschn., § 7), und erzeugt hier auf der Länge 1 eine Kraft quer zur Strömung gleich $\varrho \Gamma V$, die hier auch „Quertrieb" genannt wird. Auch bei dreieckigen und viereckigen Prismen, die um ihre Längsachse rotieren, sowie bei Kugeln usw., zeigt sich eine solche Kraft. Der Sinn der Kraft ist dabei immer von der Seite, wo Drehung und Strömung einander entgegenlaufen nach derjenigen, wo sie gleichlaufen, gerichtet. Diese Erscheinung führt nach ihrem Entdecker Magnus (1852) den Namen Magnuseffekt.

Fig. 66.

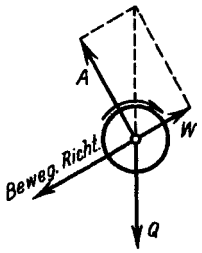


Rotierender Zylinder.

Das Verhalten kugelförmiger Geschosse, die häufig beim Verlassen des Laufes unbeabsichtigte Rotationen um Querachsen erhalten und dadurch in ihrer Flugbahn Seitenabweichungen ergeben, ist der Anlaß zum Studium dieser Erscheinungsgruppe gewesen. Solche Seitenabweichungen lassen sich auch beim Fluge von „geschnittenen" Tennis- und Golfbällen durch die Luft beobachten; sie können sehr beträchtlich sein. Neuerdings hat A. Flettner mit seinem Rotorschiff die Erscheinung im großen zum Antrieb von Schiffen durch den Wind angewandt, wobei an Stelle der Segel senkrecht stehende schnell rotierende Zylinder verwendet werden. Es empfiehlt sich dabei, an den Enden überstehende Scheiben anzubringen (vgl. Fig. 66), da sonst die nicht mit umlaufende Luft an den Zylinderenden in den Unterdruckraum auf der Saugseite eindringt, und die Strömung dort teilweise zerstört.

Versuch: Ein von einem kleinen Elektromotor angetriebener rotierender Zylinder befindet sich auf einem auf Schienen laufenden Wägelchen. Wird der Zylinder mittels eines kleinen Schraubenventilators (Tisch-Ventilator) quer zu den Schienen angeblasen, so läuft der Wagen auf den Schienen vorwärts. Wendet man den Ventilator so, daß der Wind mit dem Gebläse einen anderen Winkel bildet, so kann man das Verhalten des Zylindersegels unter den verschiedenen Kursen studieren. Es gelingt, den Wagen unter spitzem Winkel gegen den Wind fahren zu lassen. Bei Umkehrung der Drehrichtung läuft er in der entgegengesetzten Richtung. — Ein mit wagerechter Achse in schnelle Rotation versetzter leichter Zylinder fällt losgelassen nicht senkrecht herunter, sondern führt einen flachen Gleitflug aus. Er erleidet außer dem Auftrieb (A) senkrecht zu seiner Bahn einen Widerstand (W) in der Richtung der Bahn, der aber im günstigsten Falle (länglicher Zylinder mit Endscheiben) wesentlich kleiner als der Auftrieb ist. Die Resultierende der beiden Kräfte hält dem Gewicht des Zylinders das Gleichgewicht (vgl. Fig. 67) und verhindert so sein Fallen.

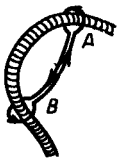
Fig. 67.



§ 11. Drehende Bewegung einer reibungsfreien Flüssigkeit. Wirbelfäden. Beim Studium der drehenden Bewegung einer homogenen reibungsfreien Flüssigkeit kann wieder der Thomsonsche Satz von der Konstanz der Zirkulation längs einer flüssigen Linie als Führer dienen. Man kann aus ihm und aus den geometrischen Eigenschaften des Drehungsvektors (auch Wirbelvektor genannt) Sätze ableiten, die gewisse wichtige geometrische und mechanische Zusammenhänge aufzeigen. Es sind dies die berühmten Helmholtzschen Sätze über Wirbelbewegungen, die dieser auf einem anderen Wege, ausgehend von elektrodynamischen Vorstellungen gefunden hat[1]). Die aus diesen Sätzen zu ziehenden Folgerungen werden aber nur dann einfach, wenn das Gebiet der in Drehung befindlichen Flüssigkeit fadenförmige Gestalt hat und die übrige Flüssigkeit drehungsfrei ist. Man spricht in diesem Falle von einem „Wirbelfaden". Die wichtigsten Sätze über Wirbelfäden lassen sich bereits aus dem Verhalten der sie umgebenden Potentialströmung ableiten, so daß hier ein näheres Eingehen auf die Mechanik der drehenden Flüssigkeit entbehrt werden kann.

Bei der Behandlung der Potentialbewegung mit Zirkulation in § 10 — um eine solche handelt es sich auch hier — ist bereits erwähnt worden, daß das Gebiet dieser Potentialbewegung mehrfach zusammenhängend ist, und daß die Zirkulation für alle ohne Gebietsüberschreitung ineinander überführbaren Linien gleich groß sein muß. Das heißt, für den Wirbelfaden ausgesprochen, daß dieser ringförmig in sich geschlossen sein oder beiderseits bis an die Grenzen der Flüssigkeit reichen muß, und daß die Zirkulation um ihn in ein und demselben Augenblick in allen Stellen denselben Betrag haben muß. Diese Eigenschaften, die einfach mit der geometrischen Struktur der Potentialströmungen zusammenhängen, können auch so eingesehen werden, daß man die in Fig. 68 angegebene geschlossene Linie betrachtet. Die Linie ist so gewählt, daß man sie durch stetige Veränderung, ohne das Gebiet des Wirbelfadens zu berühren, auf Null zusammenziehen kann; sie hat daher sicher die Zirkulation Null. Sie besteht aber aus zwei Teilstücken, die in entgegengesetzter Richtung längs ein und derselben Linie AB verlaufen und deren Beiträge sich daher gegenseitig aufheben, und aus zwei weiteren Teilen, der Umkreisung des Wirbelfadens bei A und der bei B. Diese letzteren Beiträge müssen daher, damit die Summe Null gibt, auch entgegengesetzt gleich sein. Die Linie umkreist bei A den Wirbelfaden im entgegengesetzten Sinn wie bei B, also muß die gleichsinnig genommene Zirkulation an beiden Stellen gleich groß sein. Würde der Wirbelfaden irgendwo in der Flüssigkeit aufhören, so würde man die eine der beiden Schleifen über das Ende des Wirbelfadens abstreifen können, während man die andere in ihrer den Wirbelfaden umschlingenden Lage läßt. Die erstere hätte dann ihre Zirkulation eingebüßt, die letztere hätte sie behalten. Die ganze Linie hätte damit ihre Zirkulation

Fig. 68.



[1]) H. v. Helmholtz, Crelles Journ. 55, 25, 1858 = Ostwalds Klassiker Nr. 79.

verändert, obwohl sie nur in einer Potentialbewegung verschoben worden ist. Man sieht, daß dies unmöglich ist. Es gilt daher der Satz: Ein Wirbelfaden kann im Innern der Flüssigkeit nirgends endigen und hat überall dieselbe Zirkulation. Zu dieser rein geometrischen Aussage kommt die aus dem Thomsonschen Satz folgende dynamische Aussage hinzu, daß die Zirkulation um den Wirbelfaden zeitlich ungeändert bleibt.

Betrachtet man das Verhalten von sehr kleinen geschlossenen flüssigen Linien, deren Zirkulation, soweit sie im Potentialgebiet liegen, überall gleich Null ist, soweit sie sich aber im Innern des Wirbelfadens befinden, im allgemeinen von Null verschieden ist, so folgt aus dem Thomsonschen Satz, daß diese sich in der Zeit nicht ändert. Hieraus folgt unmittelbar, daß der Wirbelfaden dauernd aus denselben Flüssigkeitsteilchen besteht. Da der Impuls und die Energie des eigentlichen Wirbelfadens klein sind gegen die entsprechenden Beträge der Potentialbewegung um ihn herum, bewegt sich der Wirbelfaden in der Hauptsache so, wie die Bewegung um ihn herum es ihm vorschreibt (vgl. das untenstehende Beispiel a!). Allerdings kann man die Potentialbewegung geometrisch auf die Zirkulation um die Achse des Wirbelfadens zurückführen, was für Berechnungen meist bequem ist. Dann erscheint die Bewegung jedes Wirbelfadenelements als verursacht von sämtlichen übrigen Wirbelfadenelementen und die ganze Potentialbewegung als durch den Wirbelfaden erzeugt. Dies ist aber nur als geometrische Beziehung zu werten; energetisch ist die äußere Bewegung das überwiegend Bestimmende.

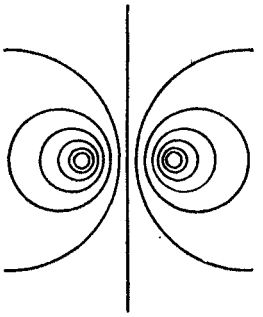
Die Formeln für die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes aus der geometrischen Anordnung der Wirbelfäden stimmen übrigens vollständig mit den elektrodynamischen Beziehungen im Biot-Savartschen Gesetz überein. Was dort der elektrische Leiter ist, ist hier der Wirbelfaden, der Stromstärke entspricht die Zirkulation und dem Magnetfeld des Stromes das Geschwindigkeitsfeld. Auch entspricht der Stromdichte die Drehungsintensität. Die Stromstärke ist wie die Zirkulation an allen Stellen des Leiters dieselbe, die Stromdichte ist dann umgekehrt proportional dem Leiterquerschnitt. Beim Wirbelfaden ist gemäß dem Kleingedruckten von § 8 (mit $\sin \alpha = 1$) $\Gamma = 2\,\omega\,F$; also gibt Verkleinerung von F ein Anwachsen von ω und umgekehrt. Dies gilt auch zeitlich: Wird ein Teil des Wirbelfadens gestreckt, so nimmt seine Winkelgeschwindigkeit ω umgekehrt proportional dem Querschnitt zu. Die Länge eines Abschnitts des Wirbelfadens wächst dabei auch umgekehrt proportional F, da ja das Volumen dasselbe bleibt. Also verändert sich die Winkelgeschwindigkeit genau proportional der Länge des Abschnitts.

Dies ist im wesentlichen der Inhalt der Helmholtzschen Sätze.

Beispiele: a) Gerade parallele Wirbelfäden in einer sonst drehungsfreien Flüssigkeit. Ein Wirbelfaden mit der Zirkulation (Wirbelstärke) Γ besitzt ein Geschwindigkeitsfeld um sich herum, wie es bei den Potentialbewegungen mit Zirkulation in § 10 bereits besprochen ist. Die Geschwindigkeit steht senkrecht auf der Wirbelachse und auf dem Radius (r), der von der Wirbelachse zu dem Ort des Teilchens hingezogen ist, und hat den

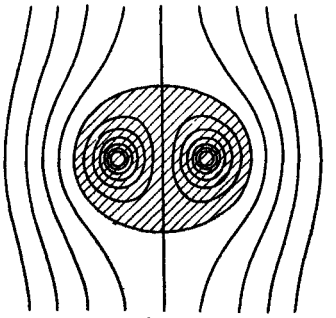
Betrag $\Gamma/2\pi r$. Sind mehrere Wirbelfäden vorhanden, so addieren sich die einzelnen Geschwindigkeitsfelder und jeder Wirbelfaden nimmt selbst an der Bewegung teil, die die übrigen an seinem Ort erzeugen. Bei zwei parallelen Wirbelfäden ergibt sich so ein Kreisen der beiden Wirbelfäden um diejenige Achse, in die die resultierende Kraft fallen würde, wenn an den Orten der Wirbelachsen Kräfte proportional der jeweiligen Wirbelstärke angebracht würden; gleichgerichtete Kräfte sind zu nehmen, wenn die Wirbel gleichsinnig drehen, und umgekehrt gerichtete, wenn die beiden Wirbel entgegengesetzt drehen. In dem einen Falle liegt die Achse zwischen den Wirbelfäden, im anderen außerhalb. Für zwei entgegengesetzt umlaufende gleich starke Wirbel („Wirbelpaar", entsprechend dem Kräftepaar) ergibt sich ein geradliniges Fortwandern senkrecht zur Verbindungslinie mit der Geschwindigkeit $\Gamma/2\pi d$, wenn d den Abstand der beiden Wirbelachsen bedeutet. Von einem relativ zur ungestörten Flüssigkeit ruhenden Bezugssystem aus ergeben die Stromlinien eines Wirbelpaares ein Bild entsprechend Fig. 69, von einem mit den Wirbelachsen mitbewegten Bezugssystem dagegen das nach Fig. 70.

Fig. 69.



Stromlinien des Wirbelpaares; ruhendes Bezugssystem.

Fig. 70.



Stromlinien des Wirbelpaares; Bezugssystem mit den Wirbelkernen mitbewegt.

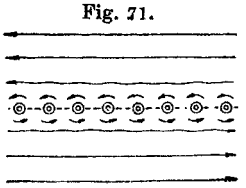
Das in dieser Figur schraffierte Gebiet verbleibt dauernd in der Umgebung der Wirbelfäden. Werden diese in einem Gebiet gefärbter Flüssigkeit erzeugt (vgl. unter d), so wandert ein Körper aus gefärbter Flüssigkeit, entsprechend dem schraffierten Gebiet in Fig. 70, in die ungefärbte Flüssigkeit hinein.

Anmerkung: Damit die vorstehenden Beziehungen zutreffen, müssen die parallelen Wirbelfäden theoretisch nach beiden Seiten ins Unendliche reichen, oder sie müssen in einer von zwei parallelen Wänden senkrecht zu den Wirbelachsen begrenzten Flüssigkeit von einer Wand bis zur anderen reichen. Doch stören im letzteren Falle Reibungseinflüsse an den Wänden. Statt der Wände kann auch ein Boden und eine freie Oberfläche vorhanden sein.

b) Bei kreisförmigen „Wirbelringen" kommt durch die Krümmung des Wirbelfadens eine zusätzliche Geschwindigkeit des Fortschreitens zustande, die um so größer ist, je konzentrierter der mit Drehung behaftete Wirbelkern ist. (Diese Erscheinung kommt als Wirkung der benachbarten Wirbelelemente richtig aus den Helmholtzschen Gesetzen heraus, man kann sie aber auch dynamisch als Wirkung der Zugspannungen verstehen, die durch Zentrifugalkräfte der umlaufenden Flüssigkeit in dem Wirbelring

geweckt werden und die den Wirbelring zu verkleinern trachten, vgl. die Ausführungen zum Kutta-Joukowskischen Satz in § 10.) Wegen der schnelleren Fortschreitungsgeschwindigkeit ist der mit dem Wirbelring mitgeführte Flüssigkeitskörper im Gegensatz zu Fig. 70 meist ringförmig (Rauchringe!). Zwei Wirbelringe mit gemeinsamer Achse, die sich im gleichen Sinne bewegen, wirken so aufeinander ein, daß der vordere sich erweitert, der hintere aber sich zusammenzieht; dadurch nimmt die Fortschreitungsgeschwindigkeit des vorderen ab, die des hinteren zu; der hintere schlüpft schließlich durch den vorderen hindurch, und es beginnt das Spiel mit vertauschten Rollen von neuem. Zwei auf derselben Achse gegeneinander bewegte gleiche Wirbelringe vergrößern bei ihrer Annäherung ihre Durchmesser mit fortwährend wachsender Geschwindigkeit, und verlangsamen dabei ihre Bewegung so, daß sie nicht miteinander in Berührung kommen. Da sich die mittlere Ebene zwischen den beiden Wirbelringen hierbei wie eine feste Wand verhält, so gilt das gleiche von einem gegen eine Wand prallenden Wirbelring.

Fig. 71.



Wirbelschicht.

c) Die in § 6 besprochenen Trennungsflächen lassen sich auch als flächenhafte Scharen von Wirbelfäden auffassen, wobei die Achsen der Wirbelfäden senkrecht auf der Richtung des Vektors des Geschwindigkeitssprunges stehen. Daß in der Tat eine Reihe von parallelen Wirbelfäden eine Strömung ergibt, die in einigem Abstand von den Wirbelfäden der Strömung mit einer Trennungsfläche entspricht, zeigt die schematische Fig. 71. Umgekehrt sind Trennungsflächen labil und zerfallen leicht in einzelne Wirbel, vgl. Fig. 35.

d) Die Erzeugung von Wirbeln mitsamt den zugehörigen zirkulatorischen Potentialbewegungen erfolgt regelmäßig auf dem Wege über Trennungsflächen. Alle Potentialbewegungen sind das Ergebnis von Druckwirkungen auf die Flüssigkeit, die von irgendwelchen Wand- bzw. Oberflächenteilen oder von Körpern im Innern der Flüssigkeit ausgeübt werden. Zirkulatorische Bewegungen kommen vor allem dann vor, wenn eine Teilfläche im Innern der Flüssigkeit eine Zeitlang einen Druck erfahren hat, und der angrenzende Teil nicht. Die Erzeugung eines Wirbelringes nach Fig. 39, bei der die Wand außerhalb des Loches einem von links her wirkenden Druck Widerstand leistet, der Innenraum des Loches aber nicht, ist ein Beispiel davon. Ein anderes wichtiges Beispiel liefert die Bewegung eines Flugzeugtragflügels, bei der der von dem Flügel überstrichene Flächenstreifen zeitweilig durch das Gewicht des Flugzeugs belastet worden ist, das Gebiet außerhalb dieses Streifens aber keinen Druck erfahren hat. Wie bereits im Anschluß an Fig. 40 am Schlusse von § 6 angegeben, bilden sich aus der Trennungsfläche hinter dem Tragflügel zwei von den Flügelspitzen ausgehende Wirbel. An der Stelle, wo die Bewegung begonnen hat, wurde ein Wirbel gemäß Fig. 65 erzeugt. Dieser „Anfahrwirbel" und die seitlichen Wirbel bilden zusammen einen einzigen (meist etwas diffusen) Wirbelfaden. Der Tragflügel selbst mit seiner Zirkulation, die mit derjenigen um den Wirbelfaden genau übereinstimmt,

schließt das ganze Gebilde zu einer Art von Wirbelring, von dem allerdings ein Teilstück durch einen festen Körper gebildet wird. Man darf die Sache vom kinematischen Standpunkt aus so auffassen, daß ein Teilstück des Wirbelfadens im Innern des festen Körpers verläuft, nach außen hier nur eine Potentialströmung mit Zirkulation erzeugend; vom dynamischen Standpunkt ist allerdings festzustellen, daß für dieses Teilstück des Wirbelfadens wegen seiner Eigenbewegung mit dem Körper der dynamische Helmholtzsche Satz nicht gilt, und daß insbesondere von seinen Enden her den seitlichen Wirbelfäden immer neue Flüssigkeitsteile zugeführt werden. Das quantitative Studium dieser Wirbelbewegungen hat wichtige Aufschlüsse über das Verhalten der Tragflügel geliefert, vgl. besonders III. Abschnitt, § 15 und 16.

§ 12. Impulssätze für stationäre Bewegungen. Die Impulssätze der allgemeinen Mechanik, die unter dem Namen Schwerpunkts- und Flächensätze sehr bekannt sind, finden eine eigenartige Anwendung auf die stationären Bewegungen der Flüssigkeiten, wie auch auf Bewegungen nicht stationärer Art, deren zeitliche Mittelwerte als stationäre Bewegungen angesehen werden können. Der Wert der Impulssätze besteht darin, daß sie nur Aussagen über Zustände an den Grenzflächen eines Gebietes enthalten, und man deshalb aus ihnen auch Schlüsse auf Vorgänge ziehen kann, deren Einzelheiten man nicht vollständig beherrscht.

Unter Impuls oder Bewegungsgröße einer Masse versteht man das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit (der Impuls ist ein Vektor und hat daher genau wie die Geschwindigkeit drei Komponenten). Es ist die zeitliche Änderung des Impulses gleich der an der Masse angreifenden resultierenden Kraft. In der Mechanik wird nun gezeigt, daß bei der Summierung über alle Massen eines mechanischen Systems alle inneren Kräfte des Systems sich nach dem Prinzip von Aktion und Reaktion fortheben und nur die äußeren (von nicht zum System gerechneten Massen herrührenden) Kräfte übrigbleiben.

Die Änderung der Bewegungsgröße einer irgendwie abgegrenzten stationär bewegten Flüssigkeitsmasse besteht nun allein darin, daß die Grenzen der Flüssigkeitsmasse sich durch die Bewegung verschieben: im Innern ist jedes Flüssigkeitsteilchen an seinem Orte durch ein anderes ersetzt, das seine Geschwindigkeit angenommen hat. Was an den Grenzen vor sich geht, mag an einem Stromfaden gezeigt werden. Es gehört zum Wesen unseres Satzes, daß jede Teilmasse, die zum System gehört, auch bei ihm verbleibt und auch andere Teilmassen nicht neu hinzukommen. Die zur Anwendung des Satzes gezogenen Grenzflächen verschieben sich daher mit der Strömung, sie sind „flüssige Flächen". Bei unserem Stromfaden verschwindet daher in der Zeit dt bei A in Fig. 72 die Masse $dm_1 = \varrho F_A w_A dt$. Bei B tritt die Masse $dm_2 = \varrho F_B w_B dt$ neu hinzu. Wegen der Kontinuität ist

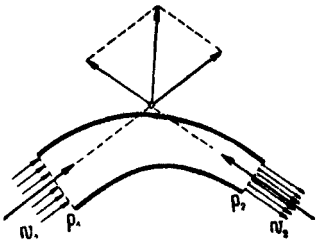
Fig. 72.

$dm_1 = dm_2 = dm$. Zur gesamten Impulsänderung liefert der Stromfaden bei B in der Zeit dt den positiven Beitrag $dm \,.\, w_B$, in der Zeiteinheit also $\frac{dm}{dt} w_B = \varrho F_B w_B^2$ (in der Richtung von w_B), bei A ähnlich den negativen Beitrag $-\frac{dm}{dt} w_A = -\varrho F_A w_A^2$ (in der Richtung entgegengesetzt zu w_A). Diese auf die Zeiteinheit berechneten Impulsänderungen können unmittelbar als Kräfte angesprochen werden, die durch die Flächen F_A und F_B hindurch von außen auf die betrachtete Flüssigkeitsmasse ausgeübt werden. Will man nicht die Kräfte haben, die von außen auf die Flüssigkeitsmasse ausgeübt werden, sondern die Gegenwirkung der Flüssigkeit auf die Gefäßwände, ihre „Reaktion", so braucht man nur in den obigen Beziehungen die Vorzeichen umzukehren. Es entspricht also der Flüssigkeitsströmung in Fig. 72 bei A eine Reaktion von der oben genannten Größe in der Richtung der eintretenden Strömung, bei B eine Reaktion entgegengesetzt der Richtung der austretenden Strömung.

Mit dieser Formulierung ist der Übergang von der flüssigen Begrenzungsfläche der betrachteten Flüssigkeitsmasse zu einer ortsfesten Fläche vollzogen, durch die hindurch die Impulsänderungen (bzw. ihre Reaktionen) und die Drücke übertragen werden. Um die Impulssätze richtig anzuwenden, muß die fragliche Flüssigkeitsmasse zweckmäßig mit einer geschlossenen Fläche, der „Kontrollfläche", umgeben werden (diese ist in einigen der folgenden Figuren durch ···· kenntlich gemacht), und es müssen für alle ein- und austretenden Stromfäden die vorstehenden Reaktionen gebildet werden. Die Reaktionskräfte müssen dann nach den Regeln der Statik mit sämtlichen an der Flüssigkeit angreifenden äußeren Kräften ein Gleichgewichtssystem bilden, d. h. es muß sowohl die Kräftesumme wie auch die Momentsumme der Kräfte für alle Koordinatenachsen gleich Null sein. Sehr häufig ist es übrigens nur eine Komponentengleichung, die bei den speziellen Aufgaben interessiert.

Anmerkung: Im Falle nicht stationärer Bewegungen kommt noch ein weiterer Beitrag hinzu, der von der Impulsänderung im Innern der Flüssigkeit herrührt. Wenn, wie häufig bei turbulenten Bewegungen, die nicht stationäre Bewegung einen gleichbleibenden Mittelwert der Bewegungsgröße besitzt, so heben sich die Beiträge des Flüssigkeitsinnern im Mittel weg und es lassen sich deshalb die Impulssätze wie bei stationären Bewegungen anwenden, nur muß bei der Bildung der Mittelwerte in der Kontrollfläche mit Vorsicht vorgegangen werden, vgl. § 14.

Fig. 73.

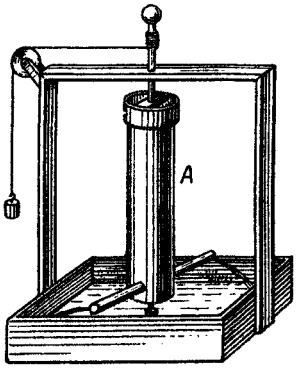


Beispiele: a) Reaktion einer durch einen gekrümmten Kanal strömenden Flüssigkeit. Die Flüssigkeit ströme (vgl. Fig. 73) mit einer Geschwindigkeit w_1 und einem Drucke p_1 ein, dann ist nach dem oben Auseinandergesetzten der Impulstransport durch die Fläche $F_1 = \varrho F_1 w_1^2$; er ist gleichbedeutend mit einer von der einströmenden Flüssigkeit in ihrer Richtung ausgeübten Kraft. Dazu kommt noch eine Druckkraft in der gleichen Richtung gleich $p_1 F_1$. Eine entsprechende Kraft

$F_2(\varrho\, w_2^2 + p_2)$ findet man am Ausströmungsende des Kanals, hier entgegengesetzt der Geschwindigkeit (also immer nach dem Innern der Kontrollfläche gerichtet!). Durch die Resultante der beiden Kräfte ist die in Wirklichkeit durch Druckkräfte an der Wand erzeugte Kraftwirkung des Flüssigkeitsstromes auf den Kanal gefunden.

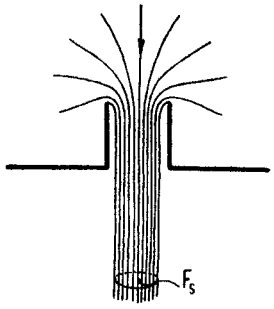
b) Reaktion ausfließender Strahlen. Ein Strahl, der durch eine Öffnung aus einem Raume mit dem Drucke p_1 in einen Raum mit dem Drucke p_2 ausströmt, führt mit sich einen sekundlichen Impuls von der Größe $J = \varrho\, F_s\, w^2$, wo F_s der Strahlquerschnitt ist; mit $w = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\varrho}}$ (vgl. § 4, b) wird $J = 2\, F_s\,(p_1 - p_2)$, also gleich dem Zweifachen der Kraft, die von dem Druckunterschied $p_1 - p_2$ auf einen Kolben von der Größe des Strahlquerschnitts ausgeübt würde. Da dieser Impuls ein Äquivalent in der Druckverteilung haben

Fig. 74.



Segnersches Wasserrad.

Fig. 75.



Borda-Mündung.

muß, folgt hieraus, daß durch den Wegfall des Überdrucks auf die Öffnung und die Druckabsenkung in deren Umgebung infolge der Zuströmung zur Öffnung zusammen ein Ausfall an Wandungsdruck gegenüber dem geschlossenen Gefäß entsprechend dem zweifachen Strahlquerschnitt entsteht. Dieser Druckausfall macht sich als Rückdruck, als „Reaktion des ausfließenden Strahles" bemerkbar. Diese Reaktion läßt sich unschwer nachweisen, wenn man ein Gefäß mit seitlicher Öffnung auf einen leicht beweglichen Wagen stellt. Das Gefäß setzt sich dann in der dem ausfließenden Strahl entgegengesetzten Richtung in Bewegung. Ein verwandter Versuch ist der mit dem „Segnerschen Wasserrad" (Fig. 74), der nach dem Vorstehenden keiner besonderen Erklärung mehr bedarf. Mit Hilfe des ausfließenden Wassers kann hier ein Gewicht gehoben werden, wie in der Figur, oder es kann eine andere Arbeit verrichtet werden. Solche Segnerschen Wasserräder sind früher auch im großen gebaut worden.

In einem besonderen Falle, nämlich dem der „Bordaschen Mündung" (vgl. Fig. 75), läßt sich aus der Größe des Impulses die sogenannte Kontraktionsziffer, das ist das Verhältnis des Strahlquerschnitts zum Lochquer-

schnitt bestimmen. Da nämlich hier auf allen Wandflächen, deren Druckkräfte Komponenten in der Strahlrichtung besitzen, der volle Überdruck herrscht, muß der Wegfall des Überdrucks im Mündungsquerschnitt F dem Strahlimpuls gleich sein, also $F(p_1 - p_2) = 2 F_s (p_1 - p_2)$ oder $F_s : F = 1/2$.

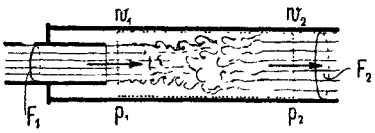
c) Plötzliche Erweiterung. Tritt ein Flüssigkeitsstrom mit der Geschwindigkeit w_1 aus einem zylindrischen Rohrstück in ein weiteres, ebenfalls zylindrisches Rohr ein, so wird der Strahl sich, weil er labil ist (vgl. § 6), mit der umgebenden Flüssigkeit vermischen und nach der Vermischung ungefähr gleichförmig mit einer mittleren Geschwindigkeit w_2 abströmen. Der Impulssatz erlaubt hier die mit der Vermischung verbundene Drucksteigerung $p_2 - p_1$ zu berechnen, ohne daß die Einzelheiten des Vermischungsvorganges bekannt wären. Es ist für die in Fig. 76 gezeichnete Kontrollfläche, von der nur die beiden Stirnflächen Beiträge zu den Kräften liefern,

$$\frac{dm}{dt}(w_1 - w_2) = F_2 (p_2 - p_1)$$

oder mit $\frac{dm}{dt} = \varrho F_2 w_2$:

$$p_2 - p_1 = \varrho w_2 (w_1 - w_2).$$

Fig. 76.



Plötzliche Erweiterung.

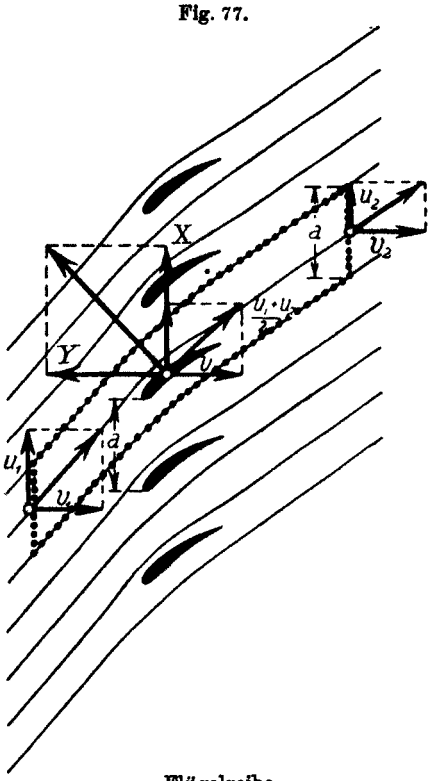
Bei einer allmählich erweiterten Röhre wäre nach der Druckgleichung $p_2' - p_1 = 1/2\, \varrho (w_1^2 - w_2^2)$; durch die plötzliche Erweiterung ist demnach ein Druckverlust $p_2' - p_2$ entstanden, der, wie leicht nachzuprüfen, die Größe $1/2\, \varrho (w_1 - w_2)^2$ hat. Da diese Formel mit der für den Verlust an kinetischer Energie beim unelastischen Stoß fester Körper übereinstimmt, hat man vielfach von einem „Stoßverlust" bei der plötzlichen Erweiterung gesprochen, obwohl hier keineswegs ein Stoßvorgang vorliegt. Das mit dem Stoßvorgang Gemeinsame liegt lediglich darin, daß hier wie dort eine Vermischung der Geschwindigkeiten eintritt.

d) Schwebenderhalten von schweren Körpern in Luft. Um in ruhender Luft eine Last schwebend zu erhalten, ist es nötig, fortwährend immer neue Luftmassen nach abwärts zu beschleunigen. Ist w die erteilte Endgeschwindigkeit, die der Einfachheit halber als gleichförmig angesehen werden mag, und $\frac{dm}{dt} = M$ die in der Zeiteinheit in Bewegung gesetzte Masse, so ist, wenn nennenswerte Druckunterschiede in den nach abwärts bewegten Massen nicht verbleiben, die erzielte Kraft gleich dem Impuls: $P = Mw$. Diese Betrachtung trifft z. B. auf eine frei schwebende Hubschraube mit großer Annäherung zu, wenn die Hubschraube genügend weit vom Boden entfernt ist. Dann bildet sich ein senkrecht nach unten gerichteter Luftstrahl aus, der den Impuls Mw enthält. Der Luftstrahl wird sich bei hinreichend großem Wege mit ruhender Luft aus der Umgebung vermischen und dadurch verlangsamen. Der Impuls bleibt dabei aber ungeändert, da die bewegte Masse entsprechend vergrößert ist. Der Strahl überträgt schließlich durch Aufprallen auf den Erdboden, wobei er seinen Impuls verliert, das Gewicht der Hubschraube als Druckkraft auf den Boden.

Beim Flugzeug werden die abwärts bewegten Massen durch das in der Luft zurückbleibende Wirbelsystem (vgl. § 11, Ende) gebildet. Doch spielt hier auch ein Druckfeld eine Rolle, und die Verhältnisse liegen daher verwickelter. Es kommt hier auf die Gestalt der Kontrollfläche an, ob man das Äquivalent des Auftriebs als Impuls oder als Druck bekommt. Auch hier ergibt sich am Erdboden unter dem Flugzeug eine Druckvermehrung, durch die das Gewicht des Flugzeugs auf den Erdboden übertragen wird.

§ 13. Weitere Beispiele zu den Impulssätzen. a) Schaufelgitter Satz von Kutta und Joukowski. Um die Wechselwirkung zwischen den Schaufeln einer Turbine oder den Flügeln eines Propellers usw. mit der an ihnen vorbeiströmenden Flüssigkeit zu studieren, pflegt man zunächst den einfacheren Fall des aus lauter gleich großen, parallel zueinander eingestellten unendlich langen Schaufeln bestehenden „Schaufelgitters" zu betrachten. Hier liefern die Impulssätze für die zur Gitterebene parallelen und für die dazu senkrechten Kraftkomponenten zusammen mit der Bernoullischen Gleichung und der Kontinuitätsgleichung sehr wertvolle Aufschlüsse über die Schaufelkräfte im Zusammenhang mit den Strömungsgeschwindigkeiten. Fig. 77 stellt ein solches Schaufelgitter mit der Strömung dar, wie sie einem relativ zu den Schaufeln ruhenden Beobachter erscheinen. Das abgebildete Schaufelgitter entspricht einem Propeller; das einer Turbine zeigt umgekehrte Wölbung der Schaufeln, und die Kraftkomponenten haben die umgekehrte Richtung; die folgende Rechnung gilt aber für beide Verwendungsarten. Die Geschwindigkeitskomponente parallel und senkrecht zu dem Schaufelgitter heiße u und v, die entsprechenden Kräfte auf die Längeneinheit einer Schaufel X und Y (positiv in den in Fig. 77 angegebenen Richtungen). Der Index 1 bezieht sich auf den Eintritt, der Index 2 auf den Austritt.

Fig. 77.



Flügelreihe.

Der Impulssatz macht von dem Umstand Gebrauch, daß — Potentialbewegung vorausgesetzt — in einigem Abstand vor und hinter dem Schaufelgitter die Geschwindigkeit je praktisch konstant ist. Was zwischen den

Schaufeln passiert, braucht dabei nicht näher bekannt zu sein, wenn nur sicher ist, daß sich dort keine groben Wirbel ausbilden (was bei unzweckmäßiger Form der Schaufeln vorkommen kann). Zunächst liefert, mit a = Schaufelabstand, die Kontinuität

$$Q = v_1 a = v_2 a$$

(Q = sekundliche Flüssigkeitsmenge zwischen je zwei Schaufeln in einer Schicht von der Dicke 1 parallel zur Schaufelachse). Es ist also $v_1 = v_2$! Wir schreiben daher von jetzt ab für beide Werte einfach v. Die Bernoullische Gleichung gibt, mit w^2 (result. Geschw.) $= u^2 + v^2$:

$$p_1 + \frac{\varrho}{2}(u_1^2 + v^2) = p_2 + \frac{\varrho}{2}(u_2^2 + v^2)$$

oder

$$p_2 - p_1 = \frac{\varrho}{2}(u_1^2 - u_2^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Für den Impulssatz bilden wir eine Kontrollfläche, deren Grundriß aus zwei gleichgelegenen Stromlinien, die um eine Schaufelteilung auseinander liegen, und aus zwei Geraden von der Länge a parallel der Gitterebene besteht (punktierte Linie in Fig. 77). Die Höhe sämtlicher Flächen sei $= 1$. Durch die beiden Stromlinienflächen strömt nichts hindurch, und wegen ihrer übereinstimmenden Eigenschaften herrscht auf ihnen auch die gleiche Druckverteilung; sie tragen daher weder zum Impuls, noch zu der Resultierenden aus den Druckkräften etwas bei. Es sind also nur die Beiträge der Flächen parallel der Gitterebene zu berechnen. Die sekundlich durchströmende Masse ist $= \varrho Q = \varrho a v$, man erhält also

$$X = 0 + \varrho a v (u_1 - u_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$Y = a(p_2 - p_1) + 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Es ist nützlich, in diese Formeln die Zirkulation um eine Schaufel einzuführen. Wir benutzen für ihre Berechnung wieder die punktierte Linie und stellen zunächst fest, daß die beiden Stromlinien in entgegengesetzter Richtung durchfahren werden und daher entgegengesetzt gleiche Beiträge liefern. Die beiden geraden Stücke liefern aber $a u_1$ und $-a u_2$, also wird

$$\Gamma = a(u_1 - u_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Wenn man Gl. (1) berücksichtigt und beachtet, daß

$$u_1^2 - u_2^2 = (u_1 - u_2) \cdot (u_1 + u_2)$$

ist, so ergibt sich also aus (2) und (3):

$$X = \varrho \Gamma v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$Y = \varrho \Gamma \frac{u_1 + u_2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Die Proportion $Y : X = \frac{u_1 + u_2}{2} : v$ besagt, wie durch Betrachtung der entsprechenden ähnlichen Dreiecke in Fig. 77 leicht ersichtlich ist, daß die Resultierende aus X und Y senkrecht steht zu der aus $\frac{u_1 + u_2}{2}$ und v ge-

bildeten resultierenden Geschwindigkeit. Nennt man die resultierende Kraft R und die resultierende Mittelgeschwindigkeit w_m, so wird außerdem

$$R = \varrho \Gamma w_m \cdot \tag{7}$$

wie aus (5) oder (6) mittels ähnlicher Dreiecke leicht folgt.

Von Gl. (7) soll nun noch ein besonderer Gebrauch gemacht werden. Läßt man den Abstand a zwischen je zwei benachbarten Schaufeln immer mehr wachsen, während man $\Gamma = a(u_1 - u_2)$ konstant hält, so wird die Differenz $u_1 - u_2$ immer kleiner und kleiner. In der Grenze für $a = \infty$ wird sie Null, und die Geschwindigkeiten vor und hinter der einen Schaufel, die im Endlichen übrigbleibt, stimmen dann in genügender Entfernung von ihr überein, und für die resultierende Mittelgeschwindigkeit w_m läßt sich jetzt auch w_∞ setzen, was die ungestörte Geschwindigkeit im Unendlichen bedeutet. Durch einen Wechsel im Bezugssystem erhält man eine mit einer Geschwindigkeit vom Betrage w_∞ bewegte Schaufel in einer im Unendlichen ruhenden Flüssigkeit. Sei die Geschwindigkeit mit V bezeichnet, so ergibt sich nach Gl. (7) pro Längeneinheit eine Kraft von der Größe

$$R = \varrho \Gamma V$$

senkrecht zu V. Für ein Stück der Schaufel oder Tragfläche von der Länge l erhält man daher eine Kraft („Quertrieb" oder „Auftrieb", Bezeichnung A) vom Betrage

$$A = \varrho \Gamma V l \cdot \tag{8}$$

Dies ist der Satz von Kutta und Joukowski. Er läßt sich natürlich auch auf andere Art beweisen; Joukowski hat ihn z. B. dadurch abgeleitet, daß er den Impulssatz für eine Kontrollfläche anwendet, die aus einem Kreiszylinder mit sehr großem Radius um die Tragflächenachse als Zylinderachse besteht. Man bekommt hierbei die Hälfte von A als Impuls, die andere als Resultierende von Druckkräften. Dieser Satz ist vor allem dadurch wichtig, daß er die zu einem gegebenen Auftrieb gehörige Zirkulation, durch die die Wirbel hinter der Tragfläche bestimmt sind, kennen lehrt.

b) Impulsmomente; Eulerscher Turbinensatz. Entsprechend den Momenten von Kräften in der Statik kann man auch Momente von Impulsen bilden, und es gilt auch hier ein dem Schwerpunktssatz analoger Satz: „Die zeitliche Änderung des Impulsmoments ist gleich dem resultierenden Moment der Kräfte". Dieser Satz führt auch den Namen „allgemeiner Flächensatz". Für stationäre Flüssigkeitsströmungen geht er wieder analog dem früheren über in den Satz vom Gleichgewicht der Momente der äußeren Kräfte und der „Reaktionen" der Flüssigkeit.

Als Beispiel mag die Ableitung der Eulerschen Turbinengleichung gegeben werden. Durch eine Turbine, Fig. 78, ströme eine sekundliche Wassermasse M. Die absolute Eintrittsgeschwindigkeit sei w_1, ihr Winkel mit der Bewegungsrichtung des Rades β_1, der Eintrittsradius r_1; das Wasser strömt durch das sich drehende Rad in einer durch die Schaufeln genähert vorgegebenen Richtung. Die relative Austrittsgeschwindigkeit im Radius r_2 setzt sich mit der dortigen Umfangsgeschwindigkeit des Rades zur absoluten

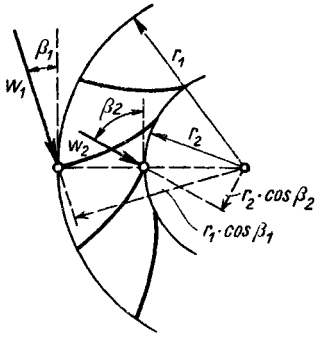
Austrittsgeschwindigkeit w_2 mit der Richtung β_2 zusammen, dann ist, gleichviel, was im Innern des Rades vor sich geht, das Drehmoment, das vom Wasser auf die Turbine ausgeübt wird, gleich

$$M(w_1 r_1 \cos\beta_1 - w_2 r_2 \cos\beta_2).$$

Die günstigsten Arbeitsverhältnisse ergeben sich dann, wenn der Austritt in radialer Richtung erfolgt, also $\cos\beta_2 = 0$ ist (weil dann die verlorene kinetische Energie des austretenden Wassers am kleinsten ist). Die Arbeitsleistung für diesen günstigsten Fall erhält man als Produkt des Drehmoments mit der Winkelgeschwindigkeit ω des Rades, zu

$$L = M r_1 \omega w_1 \cos\beta_1.$$

Fig. 78.



Anmerkung. Wendet man denselben Satz auf eine kreisende Flüssigkeitsbewegung an, in der sich kein Turbinenrad befindet, so ergibt sich offenbar

$$w_1 r_1 \cos\beta_1 = w_2 r_2 \cos\beta_2$$

oder, wenn sämtliche Winkel β klein genug sind, daß $\cos\beta = 1$ gesetzt werden darf, $wr = const$, ein Resultat, das auf einem anderen Wege schon in § 5, b erhalten worden ist.

§ 14. Impulssatz für Strömungen mit Geschwindigkeitsschwankungen. In vielen praktischen Anwendungen kommt es vor, daß in einem der Strömung angehörigen Gebiet die Geschwindigkeit beträchtlichen und meist unregelmäßigen Schwankungen unterworfen ist, dabei aber überall ein von dem gewählten Zeitintervall unabhängiger zeitlicher Mittelwert der Geschwindigkeit angebbar ist. Die Mittelwerte an den verschiedenen Orten stellen dann in ihrer Gesamtheit wieder eine stationäre Bewegung dar; man spricht dabei von einer schwankenden („turbulenten"), aber „in Mittelwerten stationären" Bewegung. Der in § 12, c behandelte Vorgang ist ein Beispiel hierfür. Bezeichnet man die Mittelwerte der Geschwindigkeitskomponenten mit $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ und die augenblicklichen Abweichungen von den Mittelwerten mit u', v', w', so daß also die wirklichen Geschwindigkeiten: $u = \bar{u} + u'$, $v = \bar{v} + v'$, $w = \bar{w} + w'$ sind, so sind die Mittelwerte von u', v' und w' definitionsgemäß $= 0$; für Mittelwerte von Quadraten und Produkten von u', v', w' gilt das aber nicht.

Bei der Anwendung des Impulssatzes auf solche Bewegungen genügt es nun nicht, wenn der Impulssatz auf die stationäre Mittelbewegung angewandt wird, sondern es muß der Mittelwert aus den einzelnen, durch die feststehende Kontrollfläche hindurchgetragenen Impulsen (oder Reaktionen) gebildet werden. Dies soll hier für zwei Fälle ausgeführt werden:

1. X-Komponente des Impulses für ein Stück der Kontrollfläche, das auf der X-Achse senkrecht steht. In einem Zeitabschnitt dt tritt durch die Flächeneinheit die Masse $\varrho u dt$; sie führt mit sich die X-Komponente der Geschwindigkeit $= u$, also ist der Impuls für $dt = \varrho u^2 dt$. Die Summenwirkung über

eine längere Zeit T ist, auf die Sekunde gerechnet, $= \frac{1}{T}\int_0^T \varrho u^2 dt$, oder kürzer geschrieben, wobei Mittelbildung durch Überstreichen angedeutet wird, $= \varrho \overline{u^2}$. Nun ist $u^2 = (\bar{u} + u')^2 = \bar{u}^2 + 2\bar{u}u' + u'^2$. Bei der Bildung des Mittels von u^2 ist zu beachten, daß $\bar{u}$ schon das Mittel von u darstellt und das Mittel von $u' = 0$ ist. Daher wird

$$\varrho \overline{u^2} = \varrho \bar{u}^2 + \varrho \overline{u'^2} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Es kommt also zu dem Impuls der stationären Mittelbewegung (ϱu^2) noch der aus dem Mittelwert des Quadrats der Schwankung resultierende Impuls hinzu (als Reaktion gerechnet mit der Richtung von außen nach innen, wie immer, also wie ein zusätzlicher Druck wirkend).

2. X-Komponente des Impulses für ein Stück der Kontrollfläche, das auf der Y-Achse senkrecht steht. Die in der Zeit dt durch die Flächeneinheit tretende Masse ist hier $\varrho v dt$; die X-Komponente des Geschwindigkeitsvektors ist wieder u, so daß also der hindurchgetragene X-Impuls $= \varrho u v dt$ ist. Die Mittelwertbildung liefert hier den Impuls für die Sekunde $= \varrho \overline{uv}$. Mit $u = \bar{u} + u'$ und $v = \bar{v} + v'$ ist $\overline{uv} = \bar{u}\bar{v} + \bar{u}\overline{v'} + \overline{u'}\bar{v} + \overline{u'v'}$ oder wegen Nullwerdens der Mittelglieder

$$\varrho \overline{uv} = \varrho \bar{u}\bar{v} + \varrho \overline{u'v'} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Auch hier kommt also zu dem Impuls der stationären Mittelbewegung ($\varrho \bar{u}\bar{v}$) ein Beitrag durch die Schwankung hinzu. Der Mittelwert des Produkts von u' und v' braucht nämlich nicht zu verschwinden, da z. B. positive Werte von u' überwiegend mit positiven Werten von v' und negative von u' überwiegend mit negativen von v' zusammentreffen können, wodurch beidemal überwiegend positive Produkte entstehen. Bei entgegengesetztem Zusammentreffen (positive u' mit negativen v', und umgekehrt) überwiegen die negativen Produkte. Die Kraft, die als Reaktion von $\varrho \overline{u'v'}$ auf der Flächeneinheit auftritt, ist eine X-Kraft an einer Fläche $\perp Y$, also eine Schubspannung.

3. Es ist noch zu untersuchen, ob die Flüssigkeitsmasse im Innern der Kontrollfläche Beiträge liefert. Man sieht aber leicht, daß die zeitlichen Änderungen der Geschwindigkeit an ein und demselben Orte, wenn diese sich im Mittel nicht ändern soll, eben starke positive wie negative Beiträge enthalten müssen, so daß im zeitlichen Mittelwert das Innere nichts beiträgt. Alles in allem zeigt sich also, daß bei im Mittelwert stationären Bewegungen aus den Geschwindigkeitsschwankungen Impulsbeträge resultieren, deren Mittelwerte Spannungen von ähnlicher Art darstellen, wie sie in stark zähen Flüssigkeiten (vgl. III. Abschnitt, § 1) auftreten. Anwendungen von diesen Überlegungen werden in dem Abschnitt über turbulente Strömungen (III. Abschnitt, § 4) gemacht werden.

§ 15. Wellen auf einer freien Flüssigkeitsoberfläche. Vernachlässigt man, wie meist zulässig, die Masse der von der Flüssigkeit mit in Bewegung gesetzten Luftteile gegenüber der der Flüssigkeit, so ist die Be-

dingung für die freie Oberfläche einfach die, daß dort der Druck gleich dem Luftdruck p_0 sein muß. Durch Beobachtung weiß man, daß bei der einfachsten Wellenbewegung die einzelnen Teilchen der Wasseroberfläche angenähert Kreisbahnen beschreiben. Von einem Bezugssystem aus, das sich mit der Fortschreitungsgeschwindigkeit der Wellenberge und -täler mit den Wellen mitbewegt, ergibt sich offenbar eine stationäre Strömung, auf die die Bernoullische Gleichung angewandt werden kann, vgl. Fig. 79. Ist die Fortschreitungsgeschwindigkeit der Wellen $= c$, der Radius des Bahnkreises eines an der Oberfläche gelegenen Teilchens $= r$ und die Umlaufszeit $= T$, also die Geschwindigkeit auf dem Kreise $= \frac{2\pi r}{T}$, so wird in dem genannten Bezugssystem die Strömungsgeschwindigkeit

Fig. 79.

Wellenbewegung.

$$\text{auf dem Wellenberg } w_1 = c - \frac{2\pi r}{T}, \text{ im Wellental } w_2 = c + \frac{2\pi r}{T}.$$

Der Höhenunterschied ist $h = 2r$, also gilt wegen der Druckgleichheit

$$w_2^2 - w_1^2 = 2gh = 4gr.$$

Die Ausrechnung der linken Seite gibt $8\pi c r/T$. Damit wird

$$c = \frac{gT}{2\pi} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

und r fällt heraus, d. h. die Wellengeschwindigkeit hängt von der Höhe der Wellenberge nicht ab. Wenn nicht die Schwingungszeit T, sondern die Wellenlänge λ gegeben ist, so ist noch die Beziehung zu benutzen, daß bei dem Fortschreiten der Wellenberge und -täler mit der Geschwindigkeit c zum Durchschreiten einer Wellenlänge gerade die Schwingungszeit verbraucht wird, also

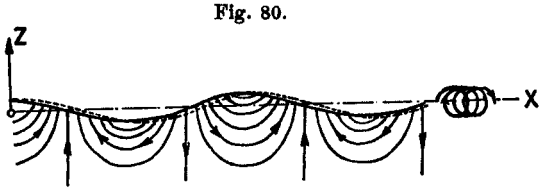
$$\lambda = cT \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Durch Wegschaffen von T aus (1) und (2) ergibt sich

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Im Gegensatz zu den Schallwellen ergibt sich also bei den Wasserwellen eine starke Abhängigkeit der Wellengeschwindigkeit von der Wellenlänge. Lange Wellen laufen schneller als die kurzen. Die Wellen können sich, ohne sich wesentlich zu stören, gegenseitig überlagern. Kurze Wellen werden von den langen auf den Rücken genommen, aber sie bleiben dabei gegen diese zurück. Die Stromlinien der Wellenbewegung in einem relativ zum ungestörten Wasser ruhenden Bezugsystem zeigt Fig. 80.

Fig. 80.



Stromlinien der Wellenbewegung.

Anmerkungen: 1. Die genauere Theorie ergibt, daß Formel (3) nur für flache Wellen gilt, hier unabhängig von der Wellenhöhe; bei hohen Wellen ist die Wellengeschwindigkeit jedoch etwas größer. Dort sind auch die Bahnen der Wasserteilchen nicht mehr geschlossen, sondern das Wasser kommt im Wellenberg mehr vorwärts, als es im Wellental wieder zurückschwingt, vgl. die Nebenfigur rechts von Fig. 80. Es findet also in der Welle ein Wassertransport statt.

2. Bei kleinen Wellenlängen macht sich neben der Schwere auch die Oberflächenspannung (Kapillarkraft) geltend. Da sie auf eine Glättung der welligen Oberfläche hinwirkt, bringt sie eine Vergrößerung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Ist die Kapillarkonstante (Zugspannung in der Oberfläche) $= C$, so wird

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi C}{\varrho\lambda}}\,.$$

Für lange Wellen kommt praktisch nur das erste Glied in Betracht, für sehr kurze überwiegt das zweite. Für die Wellenlänge $\lambda_1 = 2\pi\sqrt{\frac{C}{g\varrho}}$ hat c einen Kleinstwert, nämlich $c_1 = \sqrt[4]{\frac{4gC}{\varrho}}$. Für Wasser ($\varrho = 1$, $C = 72$ im CGS-System) wird $\lambda_1 = 1{,}72$ cm und $c_1 = 23{,}3$ cm/sec. Man nennt Wellen, deren Wellenlänge größer als λ_1 ist, Schwerewellen, die kleineren Kapillarwellen.

Von der Geschwindigkeit, mit der die Wellenköpfe fortschreiten, hier Wellengeschwindigkeit (c) genannt, ist wohl zu unterscheiden die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Wellengruppe, die sogenannte Gruppengeschwindigkeit c^*. Man studiert diese Aufgabe am bequemsten durch Überlagerung zweier Wellen mit gleicher Amplitude, aber ein wenig verschiedener Wellenlänge. Die Betrachtung, die nicht nur für Wasserwellen, sondern ganz allgemein für Wellen gilt, deren Wellengeschwindigkeit von der Wellenlänge abhängt, die also eine „Dispersion" haben, geht von einer einfachen Sinuswelle

$$y = A\sin(\mu x - \nu t)$$

aus. Wird x um $\frac{2\pi}{\mu}$ vermehrt, oder t um $\frac{2\pi}{\nu}$, so nimmt der Sinus denselben Wert wie vorher an, also ist $\lambda = \frac{2\pi}{\mu}$ die Wellenlänge und $T = \frac{2\pi}{\nu}$ die Schwingungszeit. Für $\mu x - \nu t = const$, also $x = const + \frac{\nu}{\mu}t$ ist das Argument des Sinus zeitlich konstant, also auch y zeitlich konstant, was so viel heißt, daß die ganze Wellenform sich mit der Geschwindigkeit $c = \frac{\nu}{\mu}$ nach rechts verschiebt. Wir überlagern damit eine zweite Welle y' von derselben Amplitude, aber etwas geändertem μ und ν, das wir mit μ' und ν' bezeichnen, also $y' = A\sin(\mu' x - \nu' t)$, dann gibt

$$y + y' = A[\sin(\mu x - \nu t) + \sin(\mu' x - \nu' t)]$$

das Resultat der Überlagerung an. An den Stellen, wo beide Schwingungen gleichsinnig wirken, wird die Amplitude $= 2A$, an denjenigen Stellen, wo sie sich entgegenwirken, wird sie $= 0$; dieser Vorgang wird als eine Schwebung bezeichnet. Durch Anwendung der bekannten Formel

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

wird hier

$$y + y' = 2A\sin\left(\frac{\mu+\mu'}{2}x - \frac{\nu+\nu'}{2}t\right)\cdot\cos\left(\frac{\mu-\mu'}{2}x - \frac{\nu-\nu'}{2}t\right).$$

In dieser Formel stellt der Faktor *sin* (...) eine Welle mit dem Mittelwert von μ und μ' bzw. ν und ν' dar, der Faktor $2\,A\cos(\ldots)$, der sich bei kleinem $\mu - \mu'$ und $\nu - \nu'$ nur langsam ändert, kann als veränderliche Amplitude angesprochen werden, vgl. Fig. 81. Die „Wellengruppe" ist da zu Ende, wo der Kosinus $= 0$ ist. Die Fortschreitungsgeschwindigkeit dieser Stelle, die Gruppengeschwindigkeit c^*, ist also gemäß dem Früheren $= \frac{\nu - \nu'}{\mu - \mu'}$ oder für lange Gruppen (langsame Schwebung) genau genug

Fig. 81.

Schwebung.

$$c^* = \frac{d\nu}{d\mu}.$$

Für Wasserwellen wird nun gemäß Gl. (1)

$$\nu = \frac{2\pi}{T} = \frac{g}{c};$$

nach Gl. (3) ist aber

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \sqrt{\frac{g}{\mu}},$$

daher ist

$$\nu = \sqrt{g\mu},$$

also ist

$$c^* = \frac{d\nu}{d\mu} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{\mu}} = \frac{1}{2}c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Die Wellengruppen pflanzen sich also mit der Geschwindigkeit $^1/_2\,c$ fort oder, anders gesagt, in der Gruppe laufen die Wellenköpfe mit der doppelten Geschwindigkeit der Gruppenfortpflanzung; es bilden sich immer am hinteren Ende der Gruppe neue Wellen und verschwinden am vorderen Ende wieder. Bei den Wellen, die ein in ruhiges Wasser geworfener Stein hervorbringt, ist dies sehr gut zu beobachten.

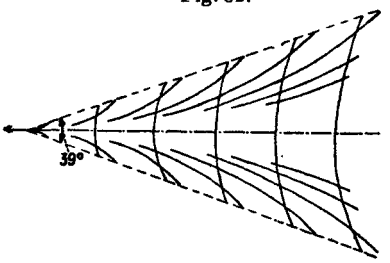
Eine andere Art von Wellengruppen hat man in den Schiffswellen. Man bekommt bereits eine den Schiffswellen sehr ähnliche Figur, wenn man die Wellen berechnet, die von einer auf der Oberfläche eines ruhenden tiefen Gewässers mit konstanter Geschwindigkeit fortschreitende punktförmige Druckstörung annimmt. Man erhält dann nach Rechnungen von Lord Kelvin, Ekman und anderen ein Wellensystem von der Art der Fig. 82. (Die ausgezogenen Linien in dieser Figur stellen Wellenrücken dar.) Dieses Wellensystem wandert mit der Druckstörung mit. Die Wellenlänge der Querwellen ist gemäß Gl. (3) $\lambda = \frac{2\pi C^2}{g}$. Die Länge der Wellengruppe ist gleich der Hälfte des von der Druckstörung zurückgelegten Weges.

Bei einem Schiff wird ein solches Wellensystem vom Bug und ein ähnliches vom Heck erzeugt, die beide miteinander interferieren.

Die Gruppengeschwindigkeit der Kapillarwellen ist, wie sich durch eine der eben für die Schwerewellen angestellten entsprechenden Rechnung leicht zeigen

läßt, größer als die Wellengeschwindigkeit (in der Grenze sehr kleiner Wellen das $1^1/_2$ fache davon). Bei einer mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Druckstörung eilt die Gruppe also der Erzeugungsstelle voraus. Man findet in der Tat bei einer Angelschnur oder einem ähnlichen ruhenden Hindernis, das in ein mit mehr als 23,3 cm/sec fließendes Gewässer eintaucht, stromaufwärts Kapillarwellen, stromabwärts Schwerewellen, die letzteren annähernd von der Form der Fig. 82, die ersteren bogenförmig den vorderen Raum ausfüllend.

Fig. 82.



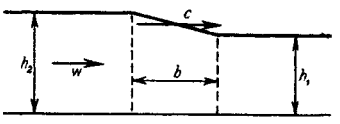
Wellensystem einer gleichförmig über die Wasseroberfläche bewegten Druckstörung.

Sind zwei Flüssigkeiten von verschiedenem Gewicht übereinandergeschichtet, so kann die Grenzfläche ebenfalls Wellenbewegungen ausführen. Strömt die obere Flüssigkeit mit einer Geschwindigkeit w_1 über die untere hinweg, so sind nur die längeren Wellen stabil, die kürzeren sind ähnlich labil, wie dies in § 6 für die Bewegung zweier Flüssigkeitsströme längs einer Trennungsschicht gezeigt worden ist. Dies führt dann gegebenenfalls zu einer Vermischung der beiden Flüssigkeiten in der Zwischenzone, wodurch wieder Stabilität der Strömung eintritt. Mit dem Anwachsen der Geschwindigkeit w_1 verschiebt sich die Grenze zwischen Labilität und Stabilität nach den größeren Wellenlängen. Für die Bewegung von Luft über einer Wasserfläche gilt Entsprechendes, nur daß statt einer Vermischung ein Überschlagen (Schäumen) der Wellen eintritt. Zu jeder Windstärke gehört eine größte Wellenlänge, auf die der Wind labilisierend, also verstärkend einwirkt. Die Amplituden der längeren Wellen werden nicht vom Wind verstärkt, diese treten daher gewöhnlich gar nicht in Erscheinung. Zwischen zwei Luftschichten verschiedener Dichte, wie sie in der Atmosphäre vorkommen, sind auch Wellen der erwähnten Art möglich, die manchmal durch Wolkenbildungen sichtbar werden (Helmholtzsche Luftwogen).

Die im vorstehenden angegebenen Formeln gelten für Wellen in tiefem Wasser. Die Beziehungen ändern sich, wenn die Wassertiefe klein gegen die Wellenlänge wird. Bei Wassertiefen gleich einer halben Wellenlänge sind dabei die bisherigen Formeln noch genügend genau. Bei kleineren Wassertiefen machen die Wasserteilchen elliptische Bahnen und die Beziehungen zwischen Wellenlänge und Fortpflanzungsgeschwindigkeit sind weniger einfach. Für sehr kleine Tiefen, oder aber für sehr große Wellenlänge, wo die Wasserteile an der Oberfläche im wesentlichen wagerecht hin und her gehen mit im Vergleich dazu sehr mäßigen Hebungen und Senkungen, ergeben sich aber von neuem einfache Beziehungen. Man kann wieder periodische Wellen von angenäherter Sinusform betrachten und bei den sehr flach elliptischen Bahnen die Wirkung der Vertikalbeschleunigungen auf die Druckverteilung vernachlässigen; der Druck ist dann in jeder Senkrechten rein statisch verteilt, die Spiegelhöhenunterschiede bewirken praktisch nur wagerechte Beschleunigungen. Hier soll aber eine noch einfachere Rechnung durchgeführt werden, die an die Erscheinung des flachen „Schwalls" anknüpft, vgl. Fig. 83. Die

Rechnung ist eng verwandt zu der Behandlung der Druckausbreitung in einem zusammendrückbaren Medium, wie sie in § 1 von Abschnitt IV behandelt werden wird. Es werde angenommen, daß sich ein „Schwall", in dem die Wasserhöhe über dem ebenen Grund von h_1 auf h_2 ansteigt, mit einer Geschwindigkeit c nach rechts hin fortpflanze, vgl. Fig. 83. Vor der Ankunft des Schwalls sei das Wasser in Ruhe, nach Erhöhung des Wasserspiegels habe es die Geschwindigkeit w nach rechts hin.

Fig. 83.



Schwall auf der Wasseroberfläche.

Diese Geschwindigkeit ist erforderlich, um durch seitliches Zusammenschieben des Wasserkörpers in dem Übergangsgebiete von der Breite b die Spiegelhöhe von h_1 auf h_2 zu bringen. Wird zur Vereinfachung angenommen, daß der Spiegel in dem Übergangsgebiet eine konstante Neigung aufweist, die dann $= \frac{h_2 - h_1}{b}$ ist, so ergibt sich, falls die Geschwindigkeit w klein genug ist, um sie neben der Ausbreitungsgeschwindigkeit c zu vernachlässigen, in dem Gebiet b eine Steiggeschwindigkeit des Spiegels $v = \frac{c(h_2 - h_1)}{b}$.

Die Kontinuität erfordert also, angewandt auf ein Gebiet von der Tiefe 1 senkrecht zur Bildebene von Fig. 83:

$$h_2 . w = b . v$$

oder

$$h_2 w = c(h_2 - h_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Aus dieser Gleichung ist die Schwallbreite b herausgefallen. Es kommt also auf diese Größe nicht an; Gl. (5) würde auch richtig sein, wenn das Schwallprofil nicht geradlinig wäre. Dann würde man den Schwall in eine Anzahl Schwalle von geradlinigem Profil zerlegen können. Bei Addition der Kontinuitätsgleichungen der einzelnen Schwalle würde rechts wieder $h_2 - h_1$ und links aus den Einzelgeschwindigkeitsunterschieden wieder w entstehen, allerdings nur, wenn man die Unterschiede der verschiedenen h_2 vernachlässigen darf. Aus Gl. (5) folgt im übrigen, daß bei kleinem w auch $h_2 - h_1$ klein sein muß, sie gilt also nur für niedrige Schwalle, so daß die soeben erwähnte Vernachlässigung durchaus zulässig erscheint.

Zu der kinematischen Beziehung (5) muß nun noch eine dynamische hinzukommen. Diese wird wie folgt erhalten: Der Wasserkörper von der Breite b ist in beschleunigter Bewegung, denn seine Teilchen beginnen am rechten Rande mit der Geschwindigkeit 0 und erreichen am linken Rande die Geschwindigkeit w. Die Zeit, in der der Schwall über ein Teilchen hinwegschreitet, ist offenbar $\tau = \frac{b}{c}$; daraus ergibt sich eine Beschleunigung des Teilchens $= \frac{w}{\tau} = \frac{wc}{b}$. Der Wasserkörper von der Breite b hat bei der Tiefe 1 senkrecht zur Zeichnung die Masse $\varrho b . h_m$ (wo h_m die mittlere Spiegelhöhe ist). Der Druck in gleicher Höhe zu beiden Seiten des Wasser-

körpers unterscheidet sich um $\gamma(h_2 - h_1)$. Die wagerechte Gesamtkraft auf den Wasserkörper wird also (mit einer erlaubten Vernachlässigung kleiner Größen) $= h_m \gamma (h_2 - h_1)$. Die Gleichung: Kraft = Masse × Beschleunigung gibt also unter Berücksichtigung von $\gamma = \varrho g$:

$$wc = g(h_2 - h_1) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Auch hier ist wieder die Schwallbreite b herausgefallen, und es kann auch gezeigt werden, daß Gl. (6) für einen Schwall von anderem Profil ebenso gilt, wenn nur $h_2 - h_1$ klein gegen h_1 und h_2 ist.

Zur Vereinfachung wollen wir noch in Gl. (5) nachträglich h_2 durch h_m ersetzen, was innerhalb der schon begangenen Vernachlässigungen ebenfalls zulässig ist. Dividieren wir jetzt (6) durch (5), dann bleibt

$$c^2 = gh \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Durch aufeinanderfolgende positive und negative Schwalle ergeben sich offenbar Wellen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit solcher Wellen ergibt sich gemäß Gl. (7) von der Gestalt der Welle unabhängig (also ebenso wie bei den Schallwellen keine Dispersion). Flache Wellen schreiten also mit der Geschwindigkeit $c = \sqrt{gh}$ fort („Grundwellengeschwindigkeit").

Im Anschluß an die Fig. 83 mag noch das Folgende erörtert werden. Wenn mehrere niedrige Schwalle hintereinander herlaufen, von denen jeder eine weitere Erhöhung des Wasserspiegels bringt, so ist die Geschwindigkeit $\sqrt{gh}$ der nachfolgenden Schwalle größer als die der vorausgehenden. Wichtiger ist aber noch, daß die nachfolgenden Schwalle in einer Wassermasse laufen, die selbst schon eine Bewegung nach rechts hat (Geschwindigkeit w!) Dadurch werden die nachfolgenden Schwalle die vorangehenden einholen, und es entsteht so ein Schwall von größerer Amplitude. Man kann dieselbe Überlegung auch auf die Form des einzelnen Schwalls anwenden. Man kann z. B. den Schwall von der in Fig. 83 angegebenen Gestalt als eine Folge von sehr vielen sehr kleinen Schwallen auffassen, die das Intervall b erfüllen. Unsere Überlegung zeigt dann, daß sich das Intervall b immer mehr verkürzen muß, bis eine ganz steile Stufe entsteht. Dies wird auch beobachtet.

Die Theorie der Schwalle von endlicher Höhe kann unter Zuhilfenahme des Impulssatzes in ganz ähnlicher Weise durchgeführt werden, wie das in § 12c in dem Beispiel der Strömung mit plötzlicher Erweiterung geschehen ist. Man betrachtet dazu den Vorgang zweckmäßig von einem Bezugssystem aus, das sich mit dem Schwall mitbewegt, so daß der Vorgang stationär ist. Die Geschwindigkeit der endlich hohen Schwalle ist größer als die der Grundwelle. Wie dort, ergibt sich auch hier ein Verlust an kinetischer Energie, der sein Äquivalent in dem Schäumen der sich überstürzenden Wassermassen hat.

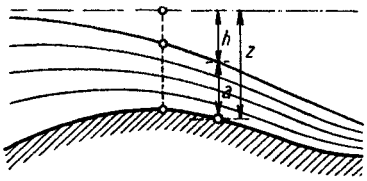
§ 16. Verhalten des Wassers in offenen Gerinnen. Die Geschwindigkeit der Schwalle und Grundwellen macht sich bei der Art des Fließens des Wassers in einem Flußlauf in ähnlicher Weise bemerkbar wie die Schallgeschwindigkeit bei Gasströmungen; man vergleiche hierzu die

Ausführungen in § 2 und 4 des vierten Abschnitts. Ist die Strömungsgeschwindigkeit kleiner als die Schwallgeschwindigkeit, dann macht sich ein Stau im Fluß (durch ein Wehr oder dergleichen) flußaufwärts durch eine Spiegelhebung geltend; ist die Strömungsgeschwindigkeit aber größer als die Grundwellengeschwindigkeit, so stellt sich am Wehr oder etwas davor ein stationärer endlich hoher Schwall ein (ein „Wassersprung"); stromaufwärts von diesem ist aber der Lauf des Wassers in keiner Weise durch den Stau beeinflußt. Irgendwelche Unebenheiten am Rande des Gerinnes geben zu kleinen schrägen Schwallen Anlaß, die den in § 4 von Abschnitt IV erwähnten schrägen Schallwellen sehr ähnlich sind. Man hat die beiden Bewegungsarten in einem Wassergerinne mit Strömungsgeschwindigkeit kleiner oder größer als Grundwellengeschwindigkeit „Strömen" und „Schießen" genannt.

Rechnet man für eine gegebene Strömungsmenge Q_1 für die Breiteneinheit die zu wachsenden Geschwindigkeiten gehörigen Wassertiefen aus, so ergibt sich folgendes (vgl. Fig. 84): Die Spiegelsenkung vom ruhenden Spiegel aus ist $h = \frac{w^2}{2g}$. Die zum Durchfluß der Menge Q_1 in der Einheit der Breite nötige örtliche Wassertiefe ist $a = \frac{Q_1}{w}$; der Abstand des zugehörigen Gerinnepunktes unter dem ruhenden Spiegel ist danach

$$z = h + a = \frac{w^2}{2g} + \frac{Q_1}{w}.$$

Fig. 84.



Überströmen über einen Wehrrücken.

Läßt man nun w alle Werte von 0 bis ∞ durchlaufen, so beginnt z wegen des zweiten Gliedes mit ∞ und geht wegen des ersten Gliedes wieder auf ∞ zurück. Dazwischen muß also ein Minimum liegen. (Ähnliches ergibt sich bei dem Stromfadenquerschnitt einer Gasströmung, vgl. § 2 von Abschnitt IV.) Für dieses Minimum ergibt sich durch Differenzieren:

$$\frac{w}{g} - \frac{Q_1}{w^2} = 0, \quad \text{also} \quad w = \sqrt[3]{Q_1 g};$$

damit

$$h_1 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{Q_1^2}{g}} \quad \text{und} \quad a = \sqrt[3]{\frac{Q_1^2}{g}} = 2h!$$

Damit ist aber $w = \sqrt{ga}$, d. h. gleich der Schwallgeschwindigkeit der Wassertiefe a! Diese Rechnung ergibt also folgendes: Strömt Wasser über einen flachen Wehrrücken, so ist über der höchsten Stelle des Wehres die Wassertiefe $a = {}^2/_3$ der Tiefe z des Wehrrückens unter dem ruhenden Spiegel, und die Geschwindigkeit ist dort $\sqrt{\frac{2}{3} g z}$. Die Durchflußmenge ist daher

$$Q_1 = aw = \frac{2}{3} z \sqrt{\frac{2}{3} g z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Unterhalb des Wehrrückens hat man schießende Bewegung, die meist auf dem Wege über einen Wassersprung (s. u.) wieder in die strömende übergeht.

Bei stärker gekrümmten Wehren darf man nicht mehr die Annahme machen, daß im ganzen Querschnitt die gleiche Strömungsgeschwindigkeit herrsche, die qualitativen Beziehungen bleiben aber dieselben wie hier, vgl. auch § 10 des nächsten Abschnitts.

Die soeben hergeleiteten Formeln lassen noch eine wesentlich umfassendere Anwendung zu. Man kann zu einem flachgeneigt verlaufenden, sonst aber beliebigen Boden des Gerinnes, vgl. Fig. 85, für eine Schar von Höhenlagen des ruhenden Wasserspiegels (die strichpunktierten Linien) die zu einem festen Wert der sekundlichen Wassermenge Q gehörenden Höhen a auftragen (je zwei für jede Stelle und Spiegelhöhe); man bekommt so die angegebenen Gestalten der Wasseroberfläche. Nur die durch den Doppelpunkt gehende, von I nach IV führende Linie, die dem niedrigst möglichen ruhenden Wasserspiegel entspricht, gibt eine Strömung von der Art derjenigen von Fig. 84. Die zu den höheren Wasserspiegeln gehörenden Linien, die von I nach II bzw. von III nach IV führen, kommen aber auch praktisch vor, siehe Fig. 86 und 87. Auch die zu niedrigeren ruhenden Wasserspiegeln gehörigen, in Fig. 85 gestrichelt gezeichneten Kurven können, wenigstens in ihrem oberen Teil, verwirklicht werden, nämlich hinter einem Wassersprung, der ja mit einem Energieverlust verbunden ist, vgl. Fig. 88.

Fig. 85.

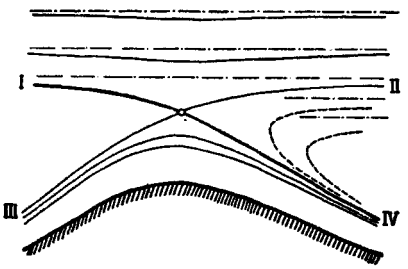


Fig. 86.

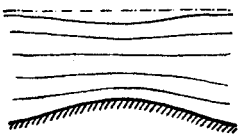


Fig. 87.

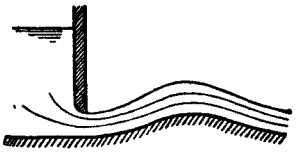
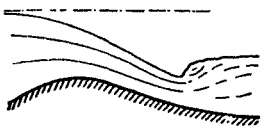


Fig. 88.



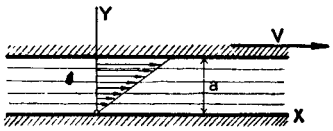
In dem Fall der Fig. 86 ist die Geschwindigkeit kleiner als die Geschwindigkeit der Grundwelle, und es ergibt sich über dem Scheitel der Bodenerhebung eine Senkung des Spiegels. Im Fall der Fig. 87 ist die Geschwindigkeit größer als die Grundwellengeschwindigkeit; die Wasseroberfläche hebt sich hier über der Bodenerhebung, und zwar stärker als diese. Zu Fig. 88 sei bemerkt, daß die Strömung vom Wehrrücken bis zum Wassersprung mit größerer Geschwindigkeit, von da ab aber mit kleinerer Geschwindigkeit erfolgt als die der jeweils zugehörigen Grundwelle. Da sich irgendwelche Änderungen des Strömungszustandes nur mit Grundwellengeschwindigkeit fortpflanzen können, kann der in „schießender" Bewegung befindliche Abschnitt durch ein Ansteigen des Unterwasserspiegels nicht geändert werden, und es kommt so zu diesem gewaltsamen Übergang.

Dritter Abschnitt.

Bewegung zäher Flüssigkeiten; Turbulenz; Widerstände; Technische Anwendungen.

§ 1. Zähigkeit (innere Reibung). Alle wirklichen Flüssigkeiten besitzen eine gewisse „Zähigkeit", die sich durch innere Reibung bei der Formänderung äußert. Besonders zähe Flüssigkeiten sind z. B. Honig, glycerindicke Öle u. a. m. Zum Verständnis des Wesens der Zähigkeit sei zunächst folgendes einfache Beispiel betrachtet: Von zwei parallelen Platten, zwischen denen sich Flüssigkeit befindet, bewege sich die eine mit der Geschwindigkeit V in ihrer Ebene, während die andere in Ruhe ist (vgl. Fig. 89). Unter der Wirkung der Reibung stellt sich dann in der Flüssigkeit ein solcher Bewegungszustand ein, daß die unmittelbar an den Platten befindlichen Schichten dieselbe Geschwindigkeit haben wie die Platten (an den Platten „haften"), die zwischenliegenden Schichten aber mit Geschwindigkeiten u, die dem Abstand von der ruhenden Platte proportional sind, übereinander weggleiten:

Fig. 89.



$$u = V \cdot \frac{y}{a}.$$

Die Flüssigkeitsreibung äußert sich dabei durch eine Kraft, die der Bewegung der oberen Platte Widerstand leistet und die für die Flächeneinheit der Platte die Größe $\tau = \mu \cdot \frac{V}{a}$ hat. In etwas allgemeinerer Formulierung ist die bei dem Übereinanderweggleiten erzeugte Schubspannung

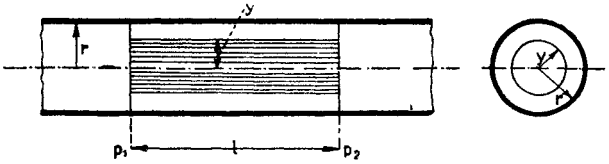
$$\tau = X_y = \mu \frac{du}{dy} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

(Das Symbol X_y soll die X-Kraft pro Flächeneinheit auf einem Flächenstück bedeuten, dessen äußere Normale parallel zur Y-Achse ist.) Die Größe μ heißt Koeffizient der Flüssigkeitsreibung oder Zähigkeitsmaß, auch kurz Zähigkeit[1]).

[1]) Die Bezeichnung μ ist bei den Hydrodynamikern üblich, nach dem Vorbild englischer Forscher. Die Physiker bezeichnen die Zähigkeit meist mit η (Dimension im CGS-System $= \mathrm{g\,cm^{-1}\,s^{-1}}$).

Die Kenntnis dieser Tatsache genügt bereits, um einige einfache Fälle zu behandeln, bei denen die Bewegung ebenfalls in einem einfachen Übereinanderweggleiten von Schichten besteht (sogenannte „Laminarbewegung", von lamina = Schicht). Hierher gehört die Bewegung einer reibenden (zähen) Flüssigkeit in einem geraden Rohr von Kreisquerschnitt. Der Druckunterschied $p_1 - p_2$ bewirkt an einem zylindrischen Flüssigkeitskörper vom Radius y (Fig. 89 a) eine Kraft $(p_1 - p_2)\pi y^2$; die Gegenkraft besteht aus der Reibung

Fig. 89 a.



auf der Mantelfläche $2\pi y l$, die pro Flächeneinheit $= \tau$, im ganzen also $= 2\pi y l \tau$ ist. Durch Gleichsetzen beider Kräfte ergibt sich

$$-\tau = \frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{y}{2} \text{ [1]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Aus Gl. (1) ergibt sich $\frac{du}{dy} = \frac{\tau}{\mu}$; durch Integration wird hieraus, wenn man gleich noch die Integrationskonstante so bestimmt, daß die äußerste Flüssigkeitsschicht an der Rohrwand haftet, also in Ruhe ist,

$$u = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l}(r^2 - y^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

(r = Rohrradius). Die Durchflußmenge läßt sich nun auch berechnen. Es ist

$$Q = \int_0^r 2\pi y\, dy\, u = \frac{\pi r^4}{8\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Diese Formel ist für die Erkenntnis des Reibungsgesetzes von grundlegender Bedeutung gewesen, da sie sich durch den Versuch mit großer Genauigkeit nachprüfen läßt; sie ergibt auch die besten Bestimmungen des Zähigkeitsmaßes μ. Ihr Ergebnis, daß die Durchflußmenge dem Druckgefälle auf die Längeneinheit und der vierten Potenz des Rohrhalbmessers proportional ist, wurde von G. Hagen 1839 durch Versuche festgestellt [2]). Es wurde unabhängig davon noch ein zweites Mal von Poiseuille gefunden [3]). Gewöhnlich wird es nach seinem zweiten Entdecker benannt, da die Veröffentlichung von Hagen, der Ingenieur war, in Physikerkreisen anscheinend unbeachtet blieb. Es ist aber richtiger, es wenigstens „Hagen-Poiseuillesches" Gesetz zu nennen [4]). Es sei hier schon bemerkt, daß das Hagen-Poiseuillesche

[1]) Minuszeichen, da τ hier entgegengesetzt wirkt als im ersten Beispiel.
[2]) G. Hagen, Poggendorffs Annalen **46**, 423, 1839.
[3]) Poiseuille, C. R. **11**, 1840; **12**, 1841; Mém. des Savants étrangers **9**, 1846.
[4]) Diese Ehrenrettung verdankt man Wolfg. Ostwald, Kolloid-Zeitschr. **36**, 99, 1925.

Gesetz nur in engen Röhrchen bei allen praktisch erreichbaren Geschwindigkeiten zutrifft. In weiteren Röhren tritt bei den größeren Geschwindigkeiten ein anderes Gesetz an seine Stelle. Diese Abweichung rührt indes keineswegs von einer Ungenauigkeit des Reibungsgesetzes her, dieses, sowie die Tatsache des Haftens an der Wand ist vielmehr durch Versuche mit engen Röhren bei den meisten Flüssigkeiten mit aller Genauigkeit bestätigt.

Anmerkung: Nach der Auffassung der kinetischen Gastheorie ist die Zähigkeit als ein Vorgang von Impulsaustausch benachbarter verschieden schneller Flüssigkeitsschichten, hervorgerufen durch die Eigenbewegung der Molekeln, anzusehen. Der Geschwindigkeitsausgleich benachbarter Schichten ist danach als eine Art Diffusionsvorgang (Diffusion von Impuls) anzusehen, und nach den im vorigen Abschnitt (§ 14, 2) abgeleiteten Beziehungen zu beurteilen. — In hochverdünnten Gasen, wo die „freie Weglänge" nicht mehr vernachlässigbar klein gegen die Gefäßabmessungen ist, hat man eine scheinbare Gleitung an der Wand festgestellt, die dadurch zustande kommt, daß die aus der strömenden Flüssigkeit kommenden Molekeln im Mittel eine endliche Geschwindigkeitskomponente parallel der Wand mitbringen, während die von der Wand zurückprallenden eine regellose Verteilung mit der mittleren Tangentialkomponente Null aufweisen. Der Mittelwert der Tangentialgeschwindigkeit aller Teilchen ist dadurch von Null verschieden. Bei Gasen von gewöhnlichen Drucken, und noch mehr bei tropfbaren Flüssigkeiten, ist die freie Weglänge so klein, daß diese Erscheinung unmerklich wird. Eine echte Gleitung scheint gemäß neueren Beobachtungen über Abweichungen vom Hagen-Poiseuilleschen Gesetz bei gewissen Schmierölen vorzukommen. Diese ist durch eine einigermaßen regelmäßige Reflexion der sehr großen Molekeln an der Wand (im Gegensatz zu der ganz regellosen bei kleinen, in die molekularen Unebenheiten der Wand eindringenden Molekeln) zu erklären [1]).

Die allgemeine Theorie der Flüssigkeitsreibung lehrt, daß durch die Formänderung der einzelnen Flüssigkeitselemente Spannungen von ähnlicher Art entstehen wie bei den elastischen Körpern, nur mit dem Unterschied, daß diese Spannungen nicht den Formänderungen, sondern den Formänderungsgeschwindigkeiten proportional sind. Die Formeln für die neun Spannungskomponenten (je drei auf den drei zu den Koordinatenachsen senkrechten Flächen) lauten demnach gemäß den Lehren der Elastizitätstheorie:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} & X_y &= Y_x = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\ Y_y &= 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} & Y &= Z_y = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\ Z_z &= 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} & Z_x &= X_z = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

Haben diese Spannungen an allen Stellen eines Gebiets denselben Wert (wie es bei affiner Formänderung des Gebiets der Fall ist), so halten sie sich ohne weiteres gegenseitig das Gleichgewicht. Sind sie aber (bei allgemeinerer Art der Formänderung) von Ort zu Ort verschieden, so entstehen durch die örtliche Verschiedenheit im allgemeinen Kräfte, die, auf die Volumeneinheit bezogen, die Komponenten X' Y' Z' haben mögen. Nach den in der Elastizitätstheorie entwickelten Lehren ist

$$X' = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \quad \ldots \quad (6)$$

und entsprechend für Y' und Z'.

[1]) Mündliche Mitteilung von v. Kármán.

Durch Einsetzen der Werte von X_x usw. aus Gl. (5) in Gl. (6) erhält man

$$X' = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (7)$$

der zweite Ausdruck in dieser Gleichung verschwindet, wenn die Strömung volumenbeständig verläuft. Für Y' und Z' gelten entsprechende Ausdrücke.

Solche Kräfte wie X' usw. treten bei den zähen Flüssigkeiten zu den in § 1 des vorigen Kapitels erörterten Kräften durch Druckunterschiede (und gegebenenfalls den Massenkräften) hinzu und bestimmen mit ihnen zusammen die Beschleunigung des Flüssigkeitsteilchens.

Durch Hinzufügung der Ausdrücke (7) auf der rechten Seite der Eulerschen Gleichungen (Mathematische Ergänzung zu § 3 des II. Abschnitts) entstehen die „Navier-Stokesschen Differentialgleichungen" der zähen Flüssigkeit.

Für volumenbeständige Strömung lauten diese also, wenn üblicherweise das Symbol Δ als Abkürzung für

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

gebraucht wird:

$$\varrho \frac{du}{dt} = X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u,$$

$$\varrho \frac{dv}{dt} = Y - \frac{\partial p}{\partial y} + u \Delta v,$$

$$\varrho \frac{dw}{dt} = Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta w.$$

$\frac{du}{dt}$ usw. bedeutet dabei gemäß den Früheren

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \text{ usw.}$$

Im Falle einer Strömung, bei der ähnlich wie bei den oben behandelten die u-Komponente vorherrscht und diese sich in der Y-Richtung am stärksten ändert, ist X_y [$= \tau$ von Gl. (1)] die hauptsächlichste Spannung, und es wird daher von der Kraft X' der Anteil $\frac{\partial X_y}{\partial y}$ am meisten hervortreten. Dieser wird dann nach Gl. (5) im wesentlichen durch $\mu \frac{d^2 u}{d y^2}$ wiedergegeben; er tritt dann (vgl. etwa § 3 des vorigen Abschnitts) hauptsächlich mit dem Druckgefälle $-\frac{\partial p}{\partial x}$ und der „Trägheitskraft" [1]) $-\varrho \frac{du}{dt}$ in Wechselwirkung. Die Rechnungen sollen jedoch hier nicht weiter verfolgt werden, da ihre Durchführung bis zum Endresultat im allgemeinen auf sehr große Schwierigkeiten stößt. Statt dessen soll hier eine Betrachtung über mechanische Ähnlichkeit durchgeführt werden, die zur Gewinnung eines allgemeinen Überblicks von großem Nutzen sein wird.

§ 2. Mechanische Ähnlichkeit; Reynoldssche Zahl. Es handelt sich hierbei um die Frage: Wann wird bei geometrisch ähnlichen äußeren Umständen (geometrisch ähnlichen Kanälen, geometrisch ähnlichen Körpern in der Flüssigkeit usw.) auch die Bewegung der Flüssigkeit geometrisch

[1]) Unter „Trägheitskraft" ist der Widerstand einer trägen Masse gegen Beschleunigung zu verstehen, sie ist also = — Masse × Beschleunigung.

ähnlich verlaufen? Man kann die Antwort zunächst so formulieren, daß hierzu in den zu vergleichenden Fällen an ähnlich gelegenen Stellen das Verhältnis der drei Kräfte Druckgefälle, Reibungskraft und Trägheitskraft das gleiche sein muß. Da zwischen den drei Kräften die Bedingung des Gleichgewichthaltens besteht, brauchen nur zwei von ihnen weiter betrachtet zu werden, als welche Trägheitskraft und Reibungskraft gewählt werden, da das Druckgefälle — wenigstens bei volumenbeständigen Strömungen — nichts genügend Charakteristisches an sich hat. Die verschiedenen geometrisch ähnlichen Strömungen sollen nun durch irgendwelche charakteristische Längen l_1, l_2 usw. (z. B. Durchmesser oder Länge eines Körpers, lichte Weite eines Kanals oder dergleichen) und durch charakteristische Geschwindigkeiten v_1, v_2, usw. (z. B. Bewegungsgeschwindigkeit eines Körpers oder mittlere Geschwindigkeit in einem bestimmten Kanalquerschnitt) gekennzeichnet werden. Die Dichten und Zähigkeiten können auch verschieden sein und ϱ_1, ϱ_2 usw., bzw. μ_1, μ_2 usw. heißen. Die Komponenten der Trägheitskräfte, von denen eine (siehe oben)

$$-\varrho \frac{du}{dt} = -\varrho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + \cdots\right)$$

lautet, müssen sich bei den ähnlichen Strömungen wie die Produkte $\varrho \frac{v^2}{l}$ verhalten, da der angenommenen Ähnlichkeit wegen die u-Werte an entsprechenden Punkten und daher auch kleine Differenzen davon sich wie die charakteristischen Geschwindigkeiten v_1, v_2, und die Längen x und y und auch kleine Differenzen davon wie die charakteristischen Längen l_1, l_2 verhalten. Die Reibungskräfte dagegen werden sich entsprechend dem Ausdruck $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ wie $\mu \frac{v}{l^2}$ verhalten. ($\partial^2 u$ bedeutet eine von der zweiten Ordnung kleine Geschwindigkeitsdifferenz, verhält sich also wie die Geschwindigkeit v, ∂y^2 ist aber das Quadrat einer kleinen Längendifferenz und verhält sich wie l^2, wenn ähnlich gelegene benachbarte Punkte herangezogen werden.) Unsere Forderung der mechanischen Ähnlichkeit kommt also darauf hinaus, daß $\frac{\varrho v^2}{l}$ und $\frac{\mu v}{l^2}$ in den verglichenen Fällen in einem festen Verhältnis stehen. Seiner Bedeutung nach (Verhältnis zweier Kräfte pro Volumeneinheit) muß dies Verhältnis eine reine Zahl sein. Es ist

$$\frac{\varrho v^2}{l} : \frac{\mu v}{l^2} = \frac{\varrho v l}{\mu},$$

die mechanische Ähnlichkeit zweier Systeme 1 und 2 ist also zu erwarten, wenn

$$\frac{\varrho_1 v_1 l_1}{\mu_1} = \frac{\varrho_2 v_2 l_2}{\mu_2} = const \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$$

ist. Man nennt diese Zahl, die das Verhältnis der Trägheitskräfte zu den Zähigkeitskräften charakterisiert, zu Ehren des Entdeckers dieses Ähnlichkeitsgesetzes, Osborne Reynolds[1]), die Reynoldssche Zahl. Das Verhältnis

[1]) O. Reynolds, Phil. Trans. 1883 = Papers II, 51

μ/ϱ (Zähigkeit: Dichte) wird kinematisches Zähigkeitsmaß genannt und mit ν bezeichnet. Es hat die einfache Dimension L^2/T.

Irgendein Strömungszustand einer reibenden Flüssigkeit kann durch den Wert seiner Reynoldsschen Zahl $\mathfrak{R} = \frac{\varrho v l}{\mu} = \frac{v l}{\nu}$ charakterisiert werden. Dabei bedeutet kleine Reynoldssche Zahl überwiegende Zähigkeitskräfte und große Reynoldssche Zahl überwiegende Trägheitskräfte. Wie noch gezeigt werden wird, sind die Bewegungsgesetze der Flüssigkeiten und die Gesetze für die Bewegungswiderstände für diese beiden Fälle sehr verschieden. Wie man aus dem Bau der Formel (1) erkennt, ist neben dem Zähigkeitsmaß auch die Größe der Raumabmessungen und Geschwindigkeiten von entscheidendem Einfluß. Bei sehr winzigen räumlichen Abmessungen werden die für kleines $\mathfrak{R}$ geltenden Gesetze für alle praktisch vorkommenden Geschwindigkeiten gelten, für große Abmessungen dagegen nur bei sehr kleinen Geschwindigkeiten oder bei sehr zähen Flüssigkeiten. Es ist noch von Interesse festzustellen, daß bei Einhaltung der Ähnlichkeit (gleiches $\mathfrak{R}$ bei geometrisch ähnlichen äußeren Umständen) die bei der Bewegung auftretenden Druckunterschiede sich wie ϱv^2 oder, was wegen (1) dasselbe ist, wie $\frac{\mu v}{l}$ verhalten.

Hier mögen einige Werte des kinematischen Zähigkeitsmaßes ν angegeben werden:

Wasser	von	0^0	$\nu = 0{,}0178$	cm^2/sec
„	„	20^0	$\nu = 0{,}0100$	„
„	„	50^0	$\nu = 0{,}0056$	„
„	„	100^0	$\nu = 0{,}0030$	„
Quecksilber	„	0^0	$\nu = 0{,}00125$	„
„	„	100^0	$\nu = 0{,}00091$	„
Glycerin	„	20^0	$\nu = 6{,}8$	„
Luft	„	0^0 und 760 mm	$\nu = 0{,}133$	„
„	„	100^0 „ 760 „	$\nu = 0{,}245$	„
„	„	0^0 „ 7,6 „	$\nu = 13{,}3$	„

§ 3. Bewegung von Körpern in zähen Flüssigkeiten. Stokessche Formel. Grenzschichten. Die mathematische Behandlung der Bewegung von Körpern in einer zähen Flüssigkeit hat sich als so schwierig erwiesen, daß bisher nur Grenzfälle sich der Behandlung zugänglich erwiesen haben, nämlich einmal der Grenzfall sehr großer Zähigkeit, also sehr kleiner Reynoldsscher Zahl, und der sehr kleiner Zähigkeit, also sehr großer Reynoldsscher Zahl. 1. Bei starkem Überwiegen der Zähigkeit, wie es einerseits in sehr zähen Flüssigkeiten (z. B. flüssigem Leim), andererseits bei sehr winzigen Abmessungen auch in gewöhnlichen Flüssigkeiten vorhanden ist, kann jede Trägheitswirkung als klein gegen die Zähigkeitswirkungen vernachlässigt werden, und man hat nun an jedem Flüssigkeitsteil Gleichgewicht zwischen dem Druckgefälle und der Reibungskraft anzusetzen. Die Reibungskräfte an der Volumeneinheit sind nach den Ausführungen von § 2 für geometrisch ähnliche Fälle proportional $\frac{\mu v}{l^2}$, die Druckkräfte folgen wegen des

Gleichgewichts derselben Beziehung, so daß hier geometrische Ähnlichkeit auch immer mechanische Ähnlichkeit nach sich zieht; vergleichbare Volumina verhalten sich wie l^3, so daß die gesamten Widerstandskräfte sich wie das Produkt $\mu v l$ verhalten müssen. Man hat an einigen einfachen Körperformen die Strömung berechnen können und dabei auch den Bewegungswiderstand ermittelt. Am bekanntesten ist die Stokessche Lösung für die Bewegung einer Kugel, die einen Widerstand

$$W = 6\pi\mu v a \quad \ldots \quad (1)$$

ergibt und die für die Fallbewegung kleiner Tröpfchen von Bedeutung ist (v = Geschwindigkeit, a = Radius). Es ist hier der Widerstand gleich Gewicht minus Auftrieb zu setzen, also wird, mit ϱ_1 = Dichte des Tropfens und ϱ_2 = Dichte der umgebenden Flüssigkeit,

$$6\pi\mu v a = \frac{4\pi}{3}(\varrho_1 - \varrho_2) g a^3,$$

was eine Fallgeschwindigkeit

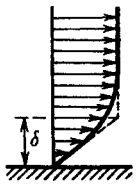
$$v = \frac{2}{9} \cdot \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\mu} g a^2 \quad \ldots \quad (2)$$

ergibt. Die Formel gilt nur für Reynoldssche Zahlen, die klein gegen 1 sind. (Für Wassertröpfchen in Luft ergibt sich $v = 1{,}3 \,.\, 10^6 a^2$, wobei a in Zentimetern einzusetzen ist; die Formel ist gültig für Tröpfchen, deren Radius kleiner als $^1/_{100}$ mm ist. Solche Tröpfchen kommen in feinem Nebel vor.)

Man kann diese ganze Gruppe von Flüssigkeitsbewegungen als „schleichende Bewegungen" bezeichnen.

Der Grenzfall der sehr großen Reynoldsschen Zahl oder der sehr kleinen Reibung würde durch ein völliges Zurücktreten des Reibungseinflusses gekennzeichnet sein, also einfach die in § 3 bis 11 des vorigen Kapitels behandelte Bewegung der reibungslosen Flüssigkeit ergeben, wenn nicht die Bedingung des Haftens an der Wand hinzukäme, die von der reibungsfreien Flüssigkeitsbewegung nicht erfüllt werden kann. Eine nähere Untersuchung zeigt nun, daß die wenig reibende Flüssigkeit sich zwar da, wo keine Wände sind, so gut wie eine reibungslose Flüssigkeit verhält, daß sich aber an den Wänden unter dem Einfluß der Reibung eine dünne „Grenzschicht" ausbildet, in der die Geschwindigkeit von dem Wert, der der reibungsfreien Bewegung entspricht, auf denjenigen übergeht, den das Haften an der Wand erfordert. Die Grenzschicht ist dabei um so dünner, je kleiner die Zähigkeit ist. Die Reibungskräfte pro Volumeneinheit sind dann zwar im Innern der Flüssigkeit sehr klein, in der Grenzschicht dagegen sind sie von der Größenordnung der Trägheitskräfte, da ja hier durch die Reibungskräfte die Geschwindigkeiten um endliche Beträge geändert werden. Fig. 90 stellt die Geschwindigkeitsverteilung in einer Grenzschicht dar. Ist die Dicke der Grenzschicht von der Größenordnung δ und die

Fig. 90.



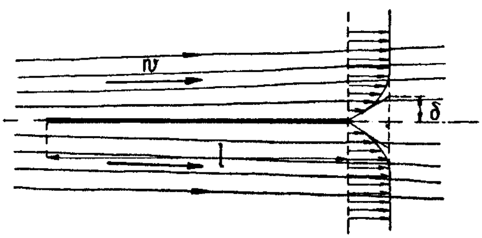
Geschwindigkeitsverteilung in Wandnähe.

Körperabmessung in der Strömungsrichtung von der Größenordnung l, so ist die Reibungskraft $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (y senkrecht zur Oberfläche) von der Größenordnung $\frac{\mu v}{\delta^2}$, die Trägheitskraft wie früher von der Ordnung $\frac{\varrho v^2}{l}$; die Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke liefert

$$\delta = \sqrt{\frac{\mu l}{\varrho v}}.$$

Eine Abschätzung mit demselben Endergebnis gewinnt man auch durch die folgende Impulsbetrachtung für eine Strömung entlang einer ebenen Platte. Die Länge der Platte sei l, die Breite b, die Geschwindigkeit der Strömung w die ungefähre Dicke der Grenzschicht δ (Fig. 91), dann ist die sekundlich in die Grenzschicht geratene Masse $\sim \varrho b \delta w$ (das Zeichen $\sim$ bedeutet proportional); diese Masse, die mit der Geschwindigkeit w ankam, verliert in der Grenzschicht einen bestimmten Bruchteil davon; der Impuls, der dem entspricht, ist Masse × Geschwindigkeitsverlust und ist sonach proportional $\varrho b \delta . w^2$. Dem Impuls muß gleich sein die durch die Reibung an der Wand auf die Flüssigkeit ausgeübte Kraft. Nach Gl. (1) von § 1 kann diese gesetzt werden $\sim \mu l b \frac{w}{\delta}$. Aus der Proportionalität der beiden Ausdrücke folgt, daß wie oben

Fig. 91.



Strömung längs einer Platte.

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\mu l}{\varrho w}} = \sqrt{\frac{\nu l}{w}} \quad . \; . \quad (3)$$

Das Verhältnis $\frac{\delta}{l}$ ist demnach $\sim \sqrt{\frac{\nu}{w l}} = \frac{1}{\sqrt{\Re}}$, also eine reine Funktion der Reynoldsschen Zahl. Diese Beziehung gilt in gleicher Weise für alle stationären Grenzschichten. Man kann in vorstehende Formel auch die Zeit einführen, während der das einzelne Flüssigkeitsteilchen an dem Körper entlangströmt. Für Teilchen, die nicht allzu nahe an der Oberfläche liegen, ist diese Zeit von der Größenordnung $t \sim \frac{l}{w}$, so daß man auch

$$\delta \sim \sqrt{\nu t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

schreiben kann. Diese Formel kann auch für Bewegungen, die erst vor einer kürzeren Zeit t aus der Ruhe heraus begonnen haben, Verwendung finden und lehrt, daß die Grenzschicht am Beginn der Bewegung proportional der Wurzel aus der Zeit zunimmt.

Es ergibt sich also, daß jeder in schwach reibenden Flüssigkeiten bewegte Körper eine dünne Flüssigkeitsschicht mit sich schleppt. Für Flüssig-

keitsströmungen durch kürzere Kanäle usw. gilt das gleiche. Bei längeren Kanälen wird nach Gl. (3) die Grenzschicht mit der Wurzel aus der Entfernung vom Kanaleinlauf wachsen und daher bei genügender Kanallänge das ganze Innere erfüllen, d. h. die Reibungswirkungen werden sich über den ganzen Kanalquerschnitt verbreiten [1]). Diese Verbreitung erfolgt übrigens in vielen Fällen viel schneller, als nach Formel (3) zu erwarten ist, durch einen Vermischungsvorgang, der als Turbulenz bezeichnet wird, vgl. § 4. Der Strömung gemäß Fig. 90 entsprechen Schubspannungen an der Wand, die sich zu einem Reibungswiderstand zusammensetzen. Bei der Platte von Fig. 91 ergibt sich hierbei folgendes: Die Schubspannung $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ wird hier abschätzend

$$\tau \sim \mu \frac{w}{\delta} \sim \sqrt{\frac{\mu \varrho w^3}{l}};$$

ist b die Breite der Platte, so ist die gesamte Oberfläche $O = 2bl$, der Widerstand ist daher

$$W \sim 2bl.\tau = \text{Zahl}.b\sqrt{\mu \varrho l w^3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Man vgl. hierzu auch die Ausführungen S. 99.

Mathematische Ergänzung. Die Grenzschichtströmungen haben sich mit exakten [2]) Rechnungen verfolgen lassen. Bei der Betrachtung des Falles einer fast verschwindenden Zähigkeit findet, wie schon erwähnt, der Übergang von der an der Wand haftenden Randschicht zur ungestörten Strömung in einer sehr dünnen Schicht statt. Es ist deshalb erlaubt, die Unterschiede des Druckes in verschiedenen Punkten einer Normalen zur Wand innerhalb dieser dünnen Störungsschicht zu vernachlässigen. Weiter sind die Geschwindigkeitsunterschiede entlang dieser Normalen wegen des Übergangs von Null zum normalen Wert auf so kurzer Distanz sehr beträchtlich, so daß in dem Ausdruck für die Reibungskraft pro Volumeneinheit, wenn die X-Achse in die Strömungsrichtung und die Y-Achse in die Richtung der Normalen gelegt wird, nur der Term $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ übrigbleibt, und alle andern gegen ihn vernachlässigbar werden.

Für eine zweidimensionale Strömung kann man noch die Krümmung der Schicht vernachlässigen (und also die x-Koordinate mit der Bogenlänge der Stromlinie längs der Wand identisch setzen) und erhält so das Gleichungssystem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{dy^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

p ist dabei als eine (durch die äußere Strömung gegebene) Funktion von x und t aufzufassen. An der Wand ist $u = 0$, $v = 0$. Die Lösungen lassen sich durch Reihenentwicklungen darstellen, vgl. etwa H. Blasius, Über Grenzschichten in Flüssigkeiten bei sehr kleiner Reibung, Zeitschr. f. Math. u. Phys. **56**, 1, 1908; siehe auch Tollmien, Handb. d. Exp.-Phys. Bd. IV, 1, S. 239.

§ 4. Turbulenz. Bei der Strömung einer zähen Flüssigkeit durch lange gerade Röhren macht man die Beobachtung, daß bei höheren Geschwindigkeiten das in § 1, Formel (4) angegebene Hagen-Poiseuillesche Gesetz (Druckabfall proportional mit der Durchflußmenge) von einem anderen Gesetz abgelöst wird, bei dem der Druckabfall ganz erheblich

---

[1]) Vgl. hierzu die Ausführungen S. 120.
[2]) Exakt im Sinne eines Limes für verschwindende Zähigkeit!

größer ist, und zwar ist er hier angenähert der zweiten Potenz der Durchflußmenge proportional. Gleichzeitig wird festgestellt, daß die Strömung, die im Bereich des Hagen-Poiseuilleschen Gesetzes ganz glatt und geradlinig erfolgt, bei den höheren Geschwindigkeiten von unregelmäßig wirbelnden Mischbewegungen durchsetzt ist. Dies ist bei der Strömung durch Glasrohre sehr deutlich zu sehen, wenn man mittels eines dünnen Röhrchens etwas gefärbte Flüssigkeit in den Strom bringt. Diese bildet bei den kleinen Geschwindigkeiten einen sauberen geraden Faden, bei den größeren wird der Faden eine kürzere oder längere Strecke hinter dem Einlauf zerrissen, und die Farbe erfüllt die Flüssigkeit von da ab fast gleichförmig[1]). Man nennt die glatte Bewegung „laminar", die wirbelnde „turbulent"[2]). Durch die in § 2 behandelte Ähnlichkeitsbetrachtung war O. Reynolds in den Stand gesetzt, vorauszusagen, daß, wenn man Rohre verschiedener Weite und verschiedene Flüssigkeiten untersucht, der Umschlag von dem laminaren zum turbulenten Zustand immer bei demselben Zahlwert von $\frac{w r}{\nu}$ erfolgen muß [w = mittlere Geschwindigkeit, $r \doteq$ Rohrhalbmesser][3]). Dies trifft, wenn die Bedingungen für das Zuströmen zum Rohr auch genügend gut übereinstimmen, in der Tat zu. Zum Beispiel ergibt sich für ein Rohr, das mit scharfer Kante an ein Gefäß mit ebener Wand anschließt, die „kritische Reynoldssche Zahl" $\frac{w r}{\nu} = 1400$[4]). Bei guter Abrundung des Einlaufs und guter Beruhigung des Flüssigkeitsinhalts des Gefäßes geht $\frac{w r}{\nu}$ bis 20 000 und höher, bei sehr unregelmäßigem Einlauf geht es bis etwa 1160[4]) herunter.

Vom theoretischen Standpunkt ergeben sich zwei verschiedene Fragestellungen, die nach der Ursache der Entstehung der Turbulenz und die nach den Eigenschaften einer Strömung mit ausgebildeter Turbulenz.

Der Aufklärung der Frage nach Entstehung der Turbulenz ist schon viel Scharfsinn, besonders von mathematischer Seite gewidmet worden, ohne daß bisher eine allseitig befriedigende Erklärung gefunden worden wäre.

O. Reynolds[5]) hat gezeigt, daß bei gewissen Formen von Störungsbewegungen Energie aus der Hauptbewegung in die der Störungsbewegung

---

[1]) Dieser Versuch ist zuerst von Reynolds 1883 gemacht worden.

[2]) In dem Schrifttum der Ingenieure findet man dafür auch die Bezeichnung „gleitende" und „fließende" Strömung, und auch die andere: „Bandströmung" und „Flechtströmung". Der letztere Ausdruck ist nicht gerade glücklich gewählt, da ein Geflecht im allgemeinen ein sehr regelmäßiges Gebilde ist, die turbulenten Bewegungen aber gerade sehr unregelmäßig sind.

[3]) Die Ingenieure setzen gewöhnlich in ihre Formeln nicht den Halbmesser r, sondern den Durchmesser d des Rohres ein. Da $d = 2r$ ist, ist natürlich auch $\frac{w d}{\nu} = 2\frac{w r}{\nu}$. Um die beiden Arten von Reynoldsschen Zahlen zu unterscheiden, soll $\frac{w r}{\nu} = \mathfrak{R}_1$ und $\frac{w d}{\nu} = \mathfrak{R}_2$ geschrieben werden; es ist also $\mathfrak{R}_2 = 2\mathfrak{R}_1$.

[4]) L. Schiller, vgl. Fußnote S. 118.

[5]) O. Reynolds, Phil. Trans. Roy. Soc. London 1895 = Papers Bd. II, S. 535; siehe auch H. A. Lorentz, Abh. über Theor. Physik, Bd. 1, Leipzig 1907, S. 43.

übergeht und daß andererseits diese Störungsbewegungen durch die Wirkung einer genügend großen Zähigkeit immer gedämpft werden können, so daß das Laminarbleiben bei kleinen Reynoldsschen Zahlen verstanden werden kann. Für die Erklärung der Turbulenzentstehung fehlt aber der Nachweis, daß im Verlauf eines bestimmten Strömungsvorganges durchschnittlich mehr Energie von der Hauptbewegung in die Nebenbewegung übergeht als umgekehrt. Es kam also darauf an, die Störungsbewegungen wirklich nachzurechnen. Nach verschiedenen negativen Ergebnissen mehrerer Forscher scheint eine Rechnung von W. Tollmien[1]) ein Beispiel von anwachsenden Störungen aufgedeckt zu haben (bei der Strömung entlang einer Platte entsprechend Fig. 91). Die berechnete kritische Zahl ist mit den Beobachtungen in gutem Einklang, doch stellt die gefundene Störung, die eine sehr große Wellenlänge aufweist, noch keine Turbulenz dar. Die eigentliche Turbulenz scheint so zu entstehen, daß durch den von Tollmien errechneten Vorgang oder auch durch andere Ursachen (anfängliche Ungleichförmigkeiten in der Strömung) Geschwindigkeitsverteilungen geschaffen werden, die ähnlich wie die Trennungsschichten (vgl. Abschnitt II, § 6) instabil sind und zur Bildung vieler kleiner Wirbel Anlaß geben.

Über den Zustand der ausgebildeten Turbulenz und die durch ihn vermehrte Reibung mag hier das Folgende gesagt werden.

In § 14 des vorigen Abschnitts war gezeigt, daß im Falle von Geschwindigkeitsschwankungen aus den durch die Schwankungen resultierenden Impulsbeträgen scheinbare Spannungen resultieren, so z. B. eine Schubspannung $\tau' = -\varrho\,\overline{u'v'}$, wo u' und v' die Abweichungen der Geschwindigkeitskomponenten u und v von ihrem zeitlichen Mittelwert $\bar{u}$ und $\bar{v}$ bedeuten. Um zu einer praktisch verwendbaren Formel zu gelangen, muß versucht werden, die Größe der Geschwindigkeitsschwankungen u' und v' durch andere Größen auszudrücken. Es zeigt sich, daß hierfür eine Länge wesentlich ist, die man als Durchmesser der jeweils einheitlich bewegten Flüssigkeitsballen deuten kann, aber auch als den Weg, den diese Flüssigkeitsballen relativ zur übrigen Flüssigkeit zurücklegen, bevor sie durch Vermischung mit der umgebenden turbulenten Flüssigkeit ihre Individualität wieder einbüßen. Man kann nicht von vornherein sagen, daß diese beiden Längen einander genau gleich wären, es ist aber zu erwarten, daß sie einander im wesentlichen proportional sind. Es sei nun eine Strömung angenommen, in der die Geschwindigkeit quer zu den Stromlinien veränderlich ist. Wird nun — vgl. Fig. 92 — eine Flüssigkeitsmasse von einer Stelle y, wo die mittlere Geschwindigkeit $= \bar{u}(y)$ ist, in der Richtung quer zur Strömung um den Betrag l verschoben, so unterscheidet sich ihre Geschwindigkeit von der des neuen Ortes um $\bar{u}(y+l) - \bar{u}(y)$, wofür in erster Näherung $l\,\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ geschrieben werden kann. Dieser Wert gibt — zum wenigsten der Größenordnung nach — den Betrag der Schwankung u' an. Der Betrag von v' ergibt sich aus der Annahme,

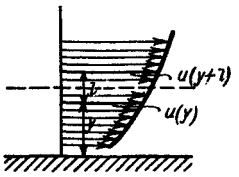
[1]) Über die Entstehung der Turbulenz. I. Mitteilung. Göttinger Nachr., Math.-Phys. Kl., 1929, S. 23.

daß zwei Flüssigkeitsballen, die von verschiedenen Seiten in die fragliche Schicht eingetreten sind und sich nun hintereinander her bewegen, sich mit der Relativgeschwindigkeit $2\,l\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ nähern oder voneinander entfernen, was Anlaß zu Quergeschwindigkeiten gleicher Größenordnung gibt. Es muß also auch v' von der Größenordnung $l\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ sein. Bei der Bildung des Mittelwerts $\overline{u'v'}$ kommt es noch auf die Vorzeichen der gleichzeitig zusammentreffenden u- und v-Komponenten an. Man sieht aber leicht, daß beim Durchschreiten der in Fig. 92 gestrichelt gezeichneten Kontrollfläche die aufwärts bewegten Teile zu langsam sind, die abwärts bewegten dagegen zu schnell, es gehören also zu positivem v' negative u', zu negativem v' positive u'. Das Produkt $u'\,v'$ ist daher beidemal negativ, die scheinbare Schubspannung daher positiv und jedenfalls von der Größenordnung $\varrho\left(l\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2$. Wenn man die auftretenden unbekannten Proportionalitätsfaktoren willkürlich $= 1$ setzt, so verschiebt sich nur die Bedeutung von l noch einmal etwas. Damit in der Formel richtig zum Ausdruck kommt, daß positivem $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ eine positive Schubspannung, und negativem $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ eine negative Schubspannung entspricht, muß die Formel nun geschrieben werden:

$$\tau' = \varrho\, l^2 \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right| \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\,^{1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Aus dieser Formel, die, wie erwähnt, nur einen Näherungsausdruck darstellt, ist zu entnehmen, daß die scheinbaren Spannungen, die durch turbulente Mischbewegungen hervorgebracht werden, sich bei Größenänderung der Geschwindigkeit proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit ändern. In der Tat zeigen alle hydraulischen Widerstände im wesentlichen dieses Verhalten. Die Länge l, die wir nun „Mischungsweg" nennen wollen, hat eine gewisse Verwandtschaft zu der freien Weglänge der kinetischen Gastheorie. Dort wird der durch die Molekularbewegung hervorgerufene Impulstransport in ganz entsprechender Weise betrachtet, wie das hier mit dem Impulstransport durch die grobe („molare") Bewegung ganzer Flüssigkeitsballen der Fall war. Die Abweichungen des Geschwindigkeitsmittels der von unten oder oben kommenden Teilchen ist wie hier $u' = l_1\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$, die Geschwindigkeit des Quertransports v' ist dort aber nicht proportional u', sondern sie ist gleich der Geschwindigkeit der Molekularbewegung c. Damit werden die durch Molekularbewegung hervorgebrachten Schubspannungen, die wir

Fig. 92.



---

1) $|a|$ = „Betrag von a" heißt, daß der Betrag von a positiv einzusetzen ist, gleichviel ob a positiv oder negativ ist.

schon als Zähigkeitsspannungen kennen, proportional der ersten Potenz von $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ usw. Die freie Weglänge l_1 ist bei Gasen umgekehrt proportional der Dichte, so daß hier der die Zähigkeit darstellende Faktor, in dem das Produkt $\varrho\, l_1$ vorkommt, unabhängig von der Dichte ist.

§ 5. Einzelheiten turbulenter Strömungen. Der Mischungsweg l der turbulenten Bewegung ist im allgemeinen von Ort zu Ort veränderlich. Wie groß er in jedem Falle ist, darüber fehlt zurzeit noch eine allgemeine Theorie. Doch lassen sich für eine Reihe von Einzelfällen passende Annahmen finden, die zu gut bestätigten Ergebnissen führen. In vielen Fällen ist es dabei zulässig, die wirklichen Schubspannungen, die von der Zähigkeit kommen, neben den scheinbaren zu vernachlässigen, und auch, was noch weiter geht, den Einfluß der Zähigkeit auf die Größe von l unberücksichtigt zu lassen. In diesem Fall hat man es also sozusagen mit der Turbulenz einer idealen Flüssigkeit ohne Zähigkeit zu tun. Bei hinreichend großen Reynoldsschen Zahlen ist diese Auffassung jedenfalls berechtigt.

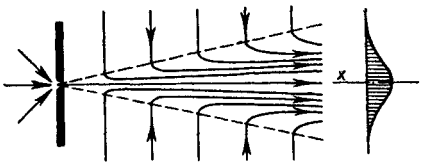
Hier mögen zwei Fälle ausführlicher behandelt werden:

a) Bei solchen Vorgängen, wie bei der Vermischung eines freien Strahles von hinreichend großer Reynoldsscher Zahl mit der ihn umgebenden ruhenden Flüssigkeit, empfiehlt es sich und ist auch ganz plausibel, den Mischungsweg in jedem Querschnitt proportional der dortigen Strahlbreite zu setzen $l = \alpha b$.

Unter b kann man z. B. den Basishalbmesser einer parabolischen oder paraboloidischen Geschwindigkeitsverteilung verstehen, deren Höchstgeschwindigkeit und Strömungsmenge mit der der wirklichen Strömung übereinstimmen. Eine derartige Festsetzung ist erforderlich, da die wirkliche Strömung ohne greifbare Grenze diffus in die äußere Flüssigkeit übergeht. Mit solcher Festsetzung ergeben sich Werte für α, die um 0,12 herum liegen.

Die Beobachtung zeigt, daß die Ausbreitung solcher freien Strahlen in einem genügend großen von ruhender Flüssigkeit erfüllten Raum so vor sich geht, daß, abgesehen von der nächsten Umgebung der Ausflußstelle, die Strahlbreite sehr genau proportional der Entfernung von der Ausflußstelle ist. Die Geschwindigkeit nimmt dabei mit zunehmender Entfernung ab. In dem ganzen Strahl herrscht ziemlich genau der Druck der Umgebung [1]). Die Geschwindigkeitsabnahme mit zunehmender Entfernung wird daher lediglich durch die Reibungsspannungen hervorgerufen. Die Geschwindigkeitsabnahme bestimmt sich

Fig. 93.



Mittlere Stromlinien eines sich ausbreitenden Luftstrahls.

[1]) Bei der Behandlung des gewöhnlichen Flüssigkeitszerstäubers findet man gelegentlich die Behauptung, daß in dem Luftstrahl nach dem Bernoullischen Satz bei der Geschwindigkeitsabnahme ein Druckanstieg stattfände und daher an der Ausflußstelle ein Unterdruck vorhanden sei, durch den die Flüssigkeit angesogen würde. Das ist unrichtig; der Bernoullische Satz gilt nur für Abwesenheit von Reibungsspannungen, hier aber sicher nicht. Das Ansaugen erfolgt vielmehr durch das Umströmen der senkrecht in den Strahl hineinragenden Rohrmündung.

dabei nicht so, daß durch alle Querschnitte dieselbe Menge strömt; dies ist auch nicht der Fall, da beim Weiterströmen immer neue ruhende Flüssigkeit mitgerissen wird. Wegen des konstanten Druckes ist vielmehr der Impuls des Strahles, $J = \varrho \iint u^2 \, dF$, konstant (vgl. vorigen Abschnitt, § 12). Es wird $J = \text{Zahl} \,.\, \varrho u_1^2 . \pi b^2$, wo u_1 die größte Geschwindigkeit in dem Querschnitt ist. Daraus, daß J konstant ist, folgt also u_1 proportional mit $1/b$, also auch mit $1/x$. Die Strömung verläuft etwa nach Fig. 93.

Mit diesem Verhalten von b und u_1 ist die Formel (1) von § 4 im besten Einklang. Man kann, ausgehend von dieser Formel, nicht nur dieses Verhalten herleiten, sondern auch die Geschwindigkeitsverteilung im einzelnen berechnen, wobei nur die Konstante α oder eine ihr entsprechende willkürlich bleibt. Diese Rechnung ist von W. Tollmien durchgeführt worden[1]). Das oben geschilderte beobachtete Verhalten des sich ausbreitenden Strahles bildet also einen Beweis für die Zulässigkeit von Formel (1) des § 4. Wie man ohne eigentliche Durchführung der Rechnung eine Abschätzung erhalten kann, die bereits die wesentlichsten Beziehungen liefert, sei hier kurz dargelegt.

Es sei wie oben $l = \alpha b$ gesetzt. Der Impulssatz liefert $u_1 b = const = C$. Für die Schubspannung $\tau' = -\varrho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ (Vorzeichen gilt für positive y) erhält man einen Mittelwert über den Querschnitt, wenn $\frac{\partial u}{\partial y}$ durch $-\frac{u_1}{b}$ angenähert wird. Damit wird

$$\tau'_m = -\varrho l^2 \left(\frac{u_1}{b}\right)^2 = -\alpha^2 \varrho u_1^2.$$

Die Kraft auf die Volumeneinheit ist gemäß Formel (6) von § 1 $= \frac{\partial \tau'}{\partial y}$; τ' nimmt von der Mitte aus von Null bis zu einem Maximum zu und dann wieder bis auf Null ab, $\frac{\partial \tau'}{\partial y}$ ist also erst negativ, dann positiv; in dem ersteren Gebiet wird die Hauptströmung verzögert, in dem zweiten die mitgerissene Luft beschleunigt. Für den mittleren Teil der Strömung kann $\frac{\partial \tau'}{\partial y} \sim \frac{\tau'}{b}$ gesetzt werden. Die Gleichung: Masse $\times$ Beschleunigung $=$ Kraft liefert also für ein Volumenelement dieser Strömung

$$\varrho u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \tau'}{\partial y} \sim -\varrho \frac{\alpha^2 u_1^2}{b},$$

wobei auch links $u = u_1$ geschrieben werden kann, also

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} \sim -\frac{\alpha^2 u_1}{b}.$$

Mit $u_1 = C/b$ (Impulssatz) und $\frac{d u_1}{d x} = -\frac{C}{b^2} \frac{d b}{d x}$ wird

$$\frac{d b}{d x} \sim \alpha^2,$$

also $b \sim \alpha^2 x$, entsprechend der experimentellen Feststellung[2]).

b) Bei Strömungen entlang von Wänden muß der Mischungsweg bei Annäherung an die Wände gegen Null gehen; dies geht aus seiner Bedeutung unmittelbar hervor. Hieraus ergibt sich, daß $\frac{\partial u}{\partial y}$ im Innern der Strömung sehr klein wird, in der Nähe der Wände aber große Werte annimmt. Fig. 94

---

[1]) Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge, Zeitschr. f. angew. Math und Mech. 6, 468, 1926.

[2]) Weitere Fälle sind bei W. Tollmien, l. c., behandelt. Vgl. auch L. Prandtl, Über die ausgebildete Turbulenz, Verh. d. 2. internat. Kongr. f. techn. Mech., Zürich 1927, S. 62.

zeigt eine turbulente Geschwindigkeitsverteilung im Rohr im Gegensatz zur laminaren, Fig. 95.

Was die zu erwartenden Geschwindigkeitsverteilungen betrifft, so muß unterschieden werden zwischen dem Fall der sehr großen Reynoldsschen Zahlen, wo die Zähigkeit keinen Einfluß mehr auf den ausschlaggebenden Teil des Turbulenzmechanismus hat, und dem der mäßigen Reynoldsschen Zahlen, bei denen ein solcher Einfluß besteht. Für den ersteren Fall folgerte Th. v. Kármán[1]) durch eine Ähnlichkeitsbetrachtung aus dem Bau der Differentialgleichung, daß der Mischungsweg proportional dem Ausdruck $\frac{du}{dy} : \frac{d^2u}{dy^2}$ sei, wo $u(y)$ den zeitlichen Mittelwert der Geschwindigkeit an jedem Ort darstellt. Setzt man fest, daß die scheinbare Schubspannung τ in dem betrachteten Gebiet konstant ist, so führt dieser Ansatz für l (mit einem Proportionalitätsfaktor $= k$) mit Hilfe von Gl. (1) von § 4 zu einer leicht zu integrierenden Differentialgleichung für $\frac{du}{dy}$ mit der Lösung

$$\frac{du}{dy} = \frac{\sqrt{\tau/\varrho}}{k(y + C_1)},$$

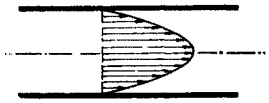
in der C_1 die willkürliche Konstante ist. Durch die zweite Integration folgt daraus

$$u = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\tau}{\varrho}}\, ln(y + C_1) + C_2.$$

Fig. 94.

Geschwindigkeitsverteilung der turbulenten Strömung in einem Rohr.

Fig. 95.



Geschwindigkeitsverteilung der laminaren Strömung in einem Rohr.

Die hier erhaltene logarithmische Funktion entspricht bereits recht gut dem allgemeinen Charakter der beobachteten Geschwindigkeitsverteilungen längs von Wänden. Der Zahlenfaktor k wurde von v. Kármán zu 0,36 gefunden; nach neueren Feststellungen dürfte aber der Wert $k = 0{,}40$ besser sein.

In der Nähe der Wand ist die Zähigkeitswirkung nicht mehr vernachlässigbar. Hier, sowie bei mäßigen Reynoldsschen Zahlen $\left(\frac{uy}{\nu} < 50\,000\right)$ läßt sich die beobachtete Geschwindigkeitsverteilung sehr gut durch ein Potenzgesetz darstellen. Bei glatter Wand ergibt sich eine Proportionalität der Geschwindigkeit mit der siebenten Wurzel aus dem Wandabstand[2]). Bei

[1]) Göttinger Nachrichten 1930, S. 58 und Vortrag auf dem III. Int. Kongr. f. techn. Mech. in Stockholm 1930. (Verhandlungen dieses Kongresses Bd. I, S. 85.)

[2]) Vgl. v. Kármán, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 1, 233 ff; und Prandtl-Betz, Ergebnisse der Aerodyn. Versuchsanstalt zu Göttingen, III. Lieferung 1927, S. 1 ff.

größeren Reynoldsschen Zahlen ergibt die Zusammenwirkung des zähigkeitsbeeinflußten Randgebiets mit dem ohne merklichen Zähigkeitseinfluß strömenden Innengebiet Verteilungen, die durch die achte bis zehnte Wurzel des Wandabstandes darstellbar sind.

Bei rauhen Wänden ergeben sich niedrigere Wurzeln, z. B. die fünfte. Den Geschwindigkeitsverteilungen proportional der 7. bzw. 8. oder 5. Wurzel entsprechen Mischungswege nach Formel (1) von § 4, die proportional $y^{6/7}$ bzw. $y^{7/8}$ bzw. $y^{4/5}$ sind, wo y den Wandabstand bedeutet. Diese Gesetzmäßigkeiten, für die keine theoretische Begründung vorhanden ist, müssen als Interpolationsformeln angesehen werden.

Aus den Versuchen über den Druckabfall in Rohren, vgl. § 9 Gl. (4), läßt sich für Reynoldssche Zahlen bis etwa 40000 die Näherungsformel für die Schubspannung an der Wand angeben:

$$\tau_{\text{Wand}} = \zeta \frac{\varrho u_1^2}{2} \left(\frac{\nu}{r u_1}\right)^{1/4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wobei u_1 die Geschwindigkeit in der Mitte, r den Rohrradius und ζ eine Zahl ungefähr von der Größe 0,045 bedeutet. Ist u die Geschwindigkeit an irgendeiner Stelle und y der zugehörige Wandabstand, und wird nach früherem u proportional $y^{1/7}$ gesetzt, also $u = u_1 \left(\frac{y}{r}\right)^{1/7}$, so läßt sich für Formel (1) auch schreiben

$$\tau_{\text{Wand}} = \zeta \frac{\varrho u^2}{2} \left(\frac{\nu}{y u}\right)^{1/4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

es ist dann nämlich $\frac{u^2}{(y u)^{1/4}} = \frac{u^{7/4}}{y^{1/4}}$ eine Konstante, die Wandreibung also, wie es sein muß, unabhängig von den willkürlich gewählten y [1]). Es ist plausibel, daß für die Reibung an der Wand eine Formulierung möglich ist, in der nur Zustände in der Nähe der Wand vorkommen. Die Formel (2) hat diese Eigenschaft. Man kann die Rechnung unter der Annahme eines allgemeinen Potenzgesetzes $u = u_1 (y/r)^n$ durchführen und fordern, daß bei der Elimination von u_1 auch r aus der Formel verschwindet. Man findet so, ausgehend von Gl. (1), wieder $u = {}^1/_7$, was nach obigem durch die Versuche gut bestätigt wird. Die Formel (2) hat den Vorteil, daß in ihr der Rohrradius und die Mittengeschwindigkeit nicht mehr vorkommt, sie ist daher wertvoll für die Übertragung der bei der Rohrreibung festgestellten Gesetzmäßigkeit auf andere Strömungen.

Bei sehr hohen Reynoldsschen Zahlen erfährt die Gl. (1) und die damit zusammenhängenden Rohrreibungsformeln gewisse Abänderungen, die sich sinngemäß aus den beiden für das Wandgebiet und das Innere angegebenen Geschwindigkeitsverteilungen herleiten lassen, vgl. hierzu die Ausführungen über den Rohrwiderstand in § 9.

Die letzte Flüssigkeitsschicht an der Wand haftet auch bei turbulenter Strömung an der Wand fest, und es bildet sich zunächst der Wand eine dünne Schicht aus, in der die Strömung laminar verläuft, so zwar, daß dort, glatte Wand vorausgesetzt, in Abweichung von der vorstehenden Beziehung $\frac{du}{dy} = \frac{\tau_{\text{Wand}}}{\mu}$ ist. Bei größeren Reynoldsschen Zahlen ist wegen der heftigen Vermischungsbewegung im Innern τ_{Wand} sehr beträchtlich, daher erfolgt der Anstieg $\frac{du}{dy}$ ungemein rasch, die laminare Grenzschicht ist also sehr dünn; bei oberflächlicher Betrachtung machen daher die turbulenten Bewegungen

---

[1]) Aus dieser Unabhängigkeit konnte die Proportionalität der Geschwindigkeit mit $\sqrt[7]{y}$ auf Grund der Gl. (1) vorausgesagt werden.

den Eindruck, als ob bereits an der Wand selbst eine endliche Geschwindigkeit herrschte.

Bei rauhen Oberflächen hängt die Wandreibung sehr stark von der Art und Größe der Rauhigkeiten ab, so daß sich schwer allgemeine Angaben machen lassen. Die Wandreibung ist hier im großen und ganzen proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit und ist im übrigen eine Funktion der „relativen Rauhigkeit", d. h. des Verhältnisses Buckelgröße : Rohrradius [1]).

Bei Versuchen mit Platten, die nach Art von Fig. 91 angeströmt sind, hat sich gezeigt, daß auch hier bei genügend großer Reynoldsscher Zahl wl/ν turbulente Strömung in der die Platte begleitenden Reibungsschicht eintritt. Die kritische Reynoldssche Zahl ist hier etwa $wl/\nu = 500000$; diese hohe Zahl läßt sich so verständlich machen, daß hier die Grenzschichtdicke vor Eintritt der Turbulenz die entsprechende Rolle spielt, wie bei den Rohren der Rohrradius. Es ist mit der Formel für δ [Gl. (3) von § 3]

$$\frac{w\delta}{\nu} \sim \frac{w}{\nu}\sqrt{\frac{\nu l}{w}} = \sqrt{\frac{wl}{\nu}} = \text{rund } 700.$$

Unsere Abschätzung hatte die Zahlenfaktoren vernachlässigt. Bei richtiger Einfügung dieser Faktoren wird obige Zahl wesentlich vergrößert, so daß die Übereinstimmung mit dem Rohre sehr gut wird.

Die Impulsbetrachtungen im Anschluß an Fig. 91 lassen sich für das turbulente Reibungsgesetz nach Gl. (2) wiederholen. Man erhält dabei eine proportional mit $x^{4/5}$ wachsende turbulente Reibungsschicht (x = Abstand von der Vorderkante) und einen Widerstand proportional $\frac{\varrho w^2}{2}\left(\frac{wl}{\nu}\right)^{-1/5}$. Wenn am Anfang der Platte die Strömung laminar bleibt, wie das bei zugeschärften Platten der Fall ist, so verringert sich der Widerstand gegenüber der Formel um etwas [2]), um so mehr, je größer der Anteil des laminar beströmten Stückes ist. Über Versuchsergebnisse vgl. § 14.

Auch bei anderen Körpern beobachtet man, daß bei genügend großen Reynoldsschen Zahlen in der Reibungsschicht, die den Körper umgibt, Turbulenz auftritt (vgl. § 7 und 13).

Die Vorgänge beim Eintritt eines Flüssigkeitsstroms in ein Rohr bei hoher Reynoldsscher Zahl haben gewisse Ähnlichkeit mit denjenigen an der parallel angeströmten Platte. Für die Länge des laminaren Stücks bis zum Eintritt der Turbulenz findet man für einigermaßen störungsfreien Zustrom etwa $\frac{wl}{\nu} = 300000$; oder anders geschrieben:

$$\frac{l}{r} = \frac{300\,000}{\frac{wr}{\nu}} = \frac{300\,000}{\mathfrak{R}}.$$

Nimmt in einer in der Hauptsache wagerechten Strömung die Dichte des Mediums nach oben zu stark ab (wie z. B. bei einer Luftmasse mit nach oben hin zunehmender Temperatur, oder bei Schichtung von Süßwasser über Salzwasser), so muß bei der turbulenten Mischbewegung Schwereres über Leichteres gehoben und Leichteres unter Schwereres heruntergedrückt werden, es muß also aus dem Arbeitsvorrat, der für die Aufrechterhaltung der Turbulenz zur Verfügung steht (er stammt aus der Hauptbewegung), diese Arbeit gegen die Schwere geleistet werden. Daraus resultiert eine Schwächung der Turbulenz, die bis zur völligen Auslöschung gehen kann. Das Nachlassen der Turbulenz des Windes am Abend und im Zusammenhang damit das „Einschlafen des Windes" in den bodennahen Schichten hängt hiermit zu-

[1]) Vgl. etwa Hopf und Fromm, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 1923, S. 329 u. 339 und Hopf, Handb. d. Phys. Bd. VII, S. 146 u. f.

[2]) Vgl. z. B. L. Prandtl, Ergebnisse der aerodynamischen Versuchsanstalt, III. Lief., S. 4 und 87. München und Berlin 1927.

sammen (in den höheren Schichten besteht der Wind unvermindert weiter!). Umgekehrt wird durch Bestrahlung des Bodens, durch die die umgekehrte Schichtung in der Dichte entsteht, die Turbulenz vermehrt[1]).

Auch bei gekrümmten Strömungen findet man die Turbulenz durch die Zentrifugalkräfte abgeschwächt oder verstärkt, je nachdem die Geschwindigkeit von dem Krümmungszentrum nach außen hin zunimmt oder abnimmt[2]). Die verschieden großen Zentrifugalkräfte spielen dabei hier eine ähnliche Rolle wie bei der geschichteten Strömung die verschieden großen Schwerkräfte.

Befindet sich eine Flüssigkeit zwischen zwei rotierenden Zylindern, von denen der äußere rotiert, der innere aber ruht, so ergibt sich, wenn die Spaltweite $d = r_2 - r_1$ zwischen den Zylindern klein gegen r_1 und r_2 ist, nach Couette[3]) eine kritische Umfangsgeschwindigkeit u bei der Reynoldsschen Zahl $\frac{ud}{\nu} = 1900$. Bei weiteren Spalten wirkt sich die eben erwähnte Stabilisierung aus und die kritische Zahl geht stark in die Höhe. Wenn umgekehrt der innere Zylinder rotiert und der äußere ruht, so wird bereits die Laminarbewegung instabil; es treten regelmäßige, abwechselnd rechts und links drehende Wirbel mit Achsen parallel zur Umfangsrichtung auf. Die Bedingung für das Auftreten dieser Instabilität ist von G. J. Taylor[4]) theoretisch ermittelt und durch den Versuch bestätigt worden. Sie läßt sich folgendermaßen schreiben (mit r = Mittelwert der beiden Radien):

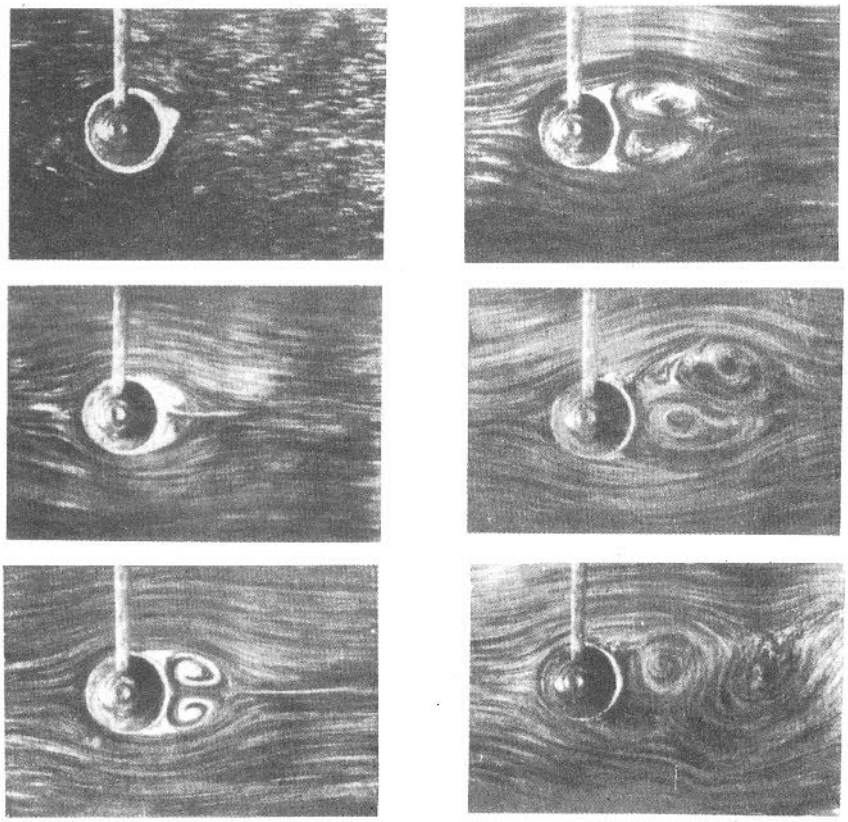
$$\frac{ud}{\nu} = 41{,}2\sqrt{\frac{r}{d}}.$$

§ 6. Wirbelbildung. Die durch die Wirkung einer kleinen Zähigkeit an der Körperoberfläche sich bildenden verzögerten Reibungsschichten, sowohl die schlicht wie die turbulent strömenden, haben noch eine äußerst wichtige Eigenschaft, die nun besprochen werden soll. Sie geben unter gewissen Bedingungen den Anlaß zur Bildung von freien Trennungsschichten und von Wirbeln (vgl. vorigen Abschnitt, § 6 und 11). Wenn in der äußeren Flüssigkeit, die an die Reibungsschicht grenzt, irgendwelche beschleunigende oder verzögernde Druckunterschiede vorhanden sind, so wirken diese Druckunterschiede auch auf die Flüssigkeit der Reibungsschicht ein. Wird die äußere Strömung durch ein Druckgefälle in der Bewegungsrichtung beschleunigt, so erfahren auch die Flüssigkeitsteilchen in der Reibungsschicht, die langsamer strömen, einen Antrieb in der Bewegungsrichtung, die Strömung wird daher in allen ihren Teilen ihren Weg längs der Körperoberfläche fortsetzen. Besteht dagegen ein Druckgefälle entgegen der Strömungsrichtung, das die äußere Strömung verzögert, so werden dadurch die bereits langsameren Teilchen der Reibungsschicht noch stärker aufgehalten und werden daher nach völliger Aufzehrung ihrer kinetischen Energie zur Umkehr gebracht; während also

[1]) Vgl. etwa Beitrag von Prandtl in: Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandten Gebieten (Aachen 1929), Berlin 1930, S. 1.
[2]) L. Prandtl, a. a. O.; A. Betz, am gleichen Ort, S. 10.
[3]) M. Couette, Ann. de chim. et phys. (6) 21, 433, 1890.
[4]) G. J. Taylor, Phil. Trans. (A) 223, 317, 1923.

die mit größerer Energie begabte äußere Strömung weiter vorwärts fließt, ergibt sich jetzt zunächst der Wand eine Rückströmung. Da nun immer neues Flüssigkeitsmaterial längs der Wand, das stromaufwärts eine Bremsung erfahren hat, dasselbe Schicksal erleidet, sammelt sich in kurzer Zeit immer mehr abgebremste Flüssigkeit zwischen der Wand und der äußeren Strömung an, so daß sich der rückläufige Strom rasch verbreitert und durch ihn die äußere Strömung mehr und mehr von der Wand abgehoben wird (sich von dieser „ablöst"). Die auf diese Weise entstandene Trennungsschicht rollt

Fig. 96. Fig. 97.



Entwicklung des Wirbelsystems hinter einem nicht rotierenden Zylinder.

sich nun rasch in der in § 6 des vorigen Abschnitts beschriebenen Weise zu einem Wirbel zusammen. Das gebremste Material, das durch die Reibung in Rotation versetzt ist, findet sich dabei zum Teil in dem endlich ausgedehnten Wirbelkern wieder. Die hier beschriebenen Vorgänge werden durch Fig. 96[1]) und 97 gut illustriert, die aufeinanderfolgende

[1]) Die Figuren 96, 97 und 99, 100 sind mit freundlicher Erlaubnis des Verlages R. Oldenbourg, München, dem Werke „Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen", III. Lieferungen von Prandtl und Betz, entnommen.

Stadien der Strömung um einen Kreiszylinder wiedergeben [1]). Beim Bewegungsbeginn stellt sich der Theorie entsprechend die Potentialströmung ein, die sich hinter dem Zylinder ebenso schließt, wie sie sich vor ihm geöffnet hatte. Während aber auf der Vorderseite, wo die Strömung beschleunigt verläuft, dieser Zustand andauert, stellen sich auf der Rückseite, wo die Flüssigkeit längs der Wand verzögert strömt, sehr bald Rückströmungen und in deren Gefolge ausgeprägte Wirbel ein. Die Trennungsschicht, die aus ursprünglich an der Zylinderwand befindlichen Wasserteilchen besteht, ist dabei durch eine (durch Kapillarkräfte verursachte) Anhäufung der auf das Wasser gestreuten Aluminiumflitterchen auf mehreren Bildern deutlich zu erkennen. Die letzten Bilder der Reihe zeigen, wie die Wirbel, die immer neue Stücke der Trennungsschicht in sich aufnahmen, immer mehr anwachsen, bis sie schließlich, instabil werdend, zerfallen und einem mehr oder minder regelmäßigen Wechsel von rechts und links ausgebildeten Wirbeln Platz machen (vgl. auch S. 133).

Die wesentliche Erkenntnis aus dem Vorangehenden ist also die, daß in einer Strömung mit in der Strömungsrichtung zunehmender Geschwindigkeit die Flüssigkeit immer an der Wand anliegend vorwärts strömt, daß aber in einer Strömung mit in der Strömungsrichtung abnehmender Geschwindigkeit durch die Umkehr der inneren Teile der Reibungsschicht eine Ablösung der äußeren Strömung von der Wand und eine Bildung beträchtlicher Wirbel entstehen kann; sie wird sicher eintreten, wenn die Geschwindigkeitsabnahme stark genug ist; bei schwächerer Abnahme kann sie aber auch ausbleiben, vgl. § 7.

Diese Beziehungen gelten natürlich nicht nur für die Vorgänge bei der Umströmung von Körpern, sondern auch für diejenigen bei der Strömung durch Kanäle u. dgl. Wo der Querschnitt in der Strömungsrichtung abnimmt, also die Geschwindigkeit zunimmt, wird die Strömung den Querschnitt immer sehr gleichförmig ausfüllen. Wo aber der Querschnitt zunimmt, wird leicht Rückströmung auftreten, die allerhand Unregelmäßigkeiten zur Folge hat. Bei starker Querschnittserweiterung auf verhältnismäßig kurzer Strecke wird sich im Verlauf der Ablösungsvorgänge ein freier Strahl ausbilden, ähnlich den bei scharfkantigen Öffnungen auftretenden Strahlen. Bei geringerer oder mehr allmählicher Erweiterung löst sich der Strahl unter Wirbelbildung wieder auf oder legt sich unregelmäßig an eine der Kanalwände an.

Die in § 6 des vorigen Abschnitts beschriebene Ablösung der Strömung an einer umströmten scharfen Kante unter Bildung einer Trennungsschicht kann von dem neuen Gesichtspunkt aus so verstanden werden, daß man zunächst eine abgerundete Kante betrachtet. Die Geschwindigkeit der Potentialströmung ist innerhalb der Rundung am größten und nimmt stromabwärts von ihr rasch ab. Die Bedingung für die Rückströmung und für die Ausbildung der Trennungsschicht ist also hier wieder auf Grund der Reibungs-

[1]) Gewonnen aus kinematographischen Aufnahmen, vgl. Tietjens, Naturw. **13**, 1050, 1925.

vorgänge gegeben, die Trennungsschicht wird von der Rundung ihren Ausgang nehmen. Läßt man nun in Gedanken die Rundung immer kleiner und kleiner werden, so ändert sich nur so viel, daß wegen der schroffer werdenden Geschwindigkeitsunterschiede die Ausbildung der Rückströmung und ihrer Folgeerscheinungen immer rascher vor sich gehen wird. So gelangt man zu dem Schluß, daß an scharfen Kanten sich äußerst schnell eine Trennungsschicht ausbildet, daß also die Annahme von § 6 des vorigen Abschnitts sehr wohl begründet war.

Erfährt eine Flüssigkeit, die entlang einer Wand strömt, eine seitliche Ablenkung parallel zu der Wand, so werden unter dem zugehörigen Druckgefälle die wandnahen Schichten wegen ihrer geringeren Geschwindigkeit stärker abgelenkt als die schneller strömenden, weiter von der Wand entfernten Flüssigkeitsteile; ihre Strömungsrichtung wird daher unter Umständen stark von der Richtung der Kernströmung verschieden sein. Kreist z. B. Flüssigkeit in einem zylindrischen

Fig. 98a.

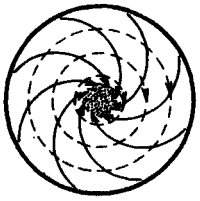
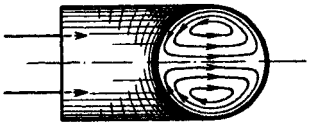


Fig. 98b.



Sekundärströmungen.

Gefäß mit flachem Boden, so ist die Strömung in der bodennahen Schicht einwärts gerichtet (ihre „Zentrifugalkraft“ ist kleiner als die der darüberliegenden Schichten, die den Druckverlauf bestimmen). Eine alltägliche Beobachtung lehrt, daß kleine, auf dem Boden eines solchen Gefäßes befindliche Körperchen nach der Gefäßmitte hingeschleppt und dort angehäuft werden. Die erwähnte Bodenströmung, die in Fig. 98a veranschaulicht ist, liefert die Erklärung für diesen Vorgang. Strömt Flüssigkeit durch eine gekrümmte Rohrleitung, so sucht die Kernströmung mit der größten Geschwindigkeit möglichst geradeaus zu gehen, die Randschichten werden aber um so stärker abgelenkt, streben also der Innenseite des Bogens zu. Es überlagert sich deshalb in der gekrümmten Rohrstrecke der Strömung parallel der Rohrmittellinie eine „Sekundärströmung“, die in der Rohrmitte nach außen, in der Nähe der Rohrwand aber nach innen verläuft (vgl. Fig. 98b). Die Sekundärströmung hat zur Folge, daß die Stelle größter Geschwindigkeit nahe an den äußeren Rand verschoben wird. Bei den natürlichen Flußläufen hat die Sekundärströmung in den Flußkrümmungen die Wirkung, daß die Ablagerungen von Sand, Kies u. dergl., die mit der Bodenströmung wandern, von der äußeren Seite der Krümmung weggeholt und auf der inneren angehäuft werden, wodurch das Bett außen vertieft und innen verflacht wird. Dies führt dazu, daß die Flußkrümmung sich immer mehr verstärkt. Deshalb zeigen die natürlichen Flüsse überall, wo die Möglichkeit dazu vorhanden ist, stark gekrümmten Lauf („Mäanderbildung“).

§ 7. Verhütung der Wirbelbildung. In den Betrachtungen von § 5 ist der Vereinfachung wegen ein Umstand unerwähnt geblieben, durch den die Wirbelbildung bei schwächeren Verzögerungen der Strömung unterbleiben kann. Es handelt sich um folgendes: Die Reibungsschicht wird nicht nur durch ihre Berührung mit der Wand gebremst, sondern sie wird auch durch ihre Berührung mit der äußeren Strömung wieder angetrieben. Wenn daher die Verzögerung nur sehr allmählich eingeleitet wird, dann kann dieser Antrieb genügen, um Rückströmung zu vermeiden, und dann wird auch die Ablösung ausbleiben. Bei den schlicht strömenden Grenzschichten ist der Antrieb der äußeren Strömung auf das Grenzschichtmaterial allerdings ziemlich gering;

viel stärker ist er bei den turbulenten Reibungsschichten infolge des lebhaften Impulsaustausches durch die Mischbewegung. Durch diesen Umstand wird auch bewirkt, daß bei hinten stumpf abgerundeten Körpern (z. B. Kugeln) die Ablösungsstelle wesentlich weiter hinten liegt, das Wirbelgebiet also kleiner wird, wenn die Reibungsschicht turbulent ist (vgl. § 13, Widerstand einer Kugel).

In der Technik ergibt sich die Aufgabe, trotz Druckanstiegs eine Ablösung der Strömung zu vermeiden, weil nur so die Strömungsverluste klein gehalten werden können. Die Aufgabe wird in der Weise gelöst, daß die

Fig. 99.

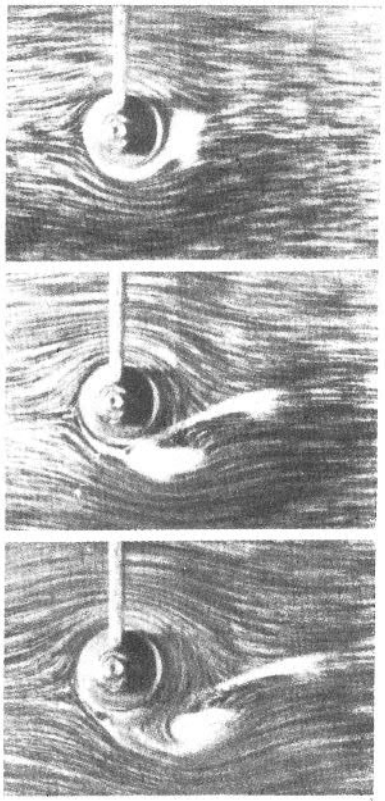
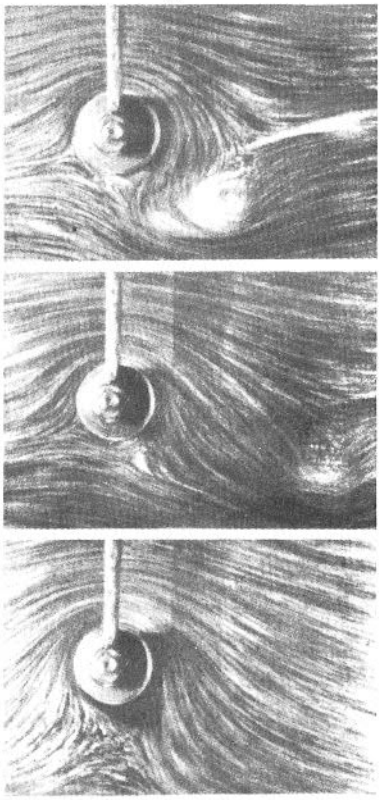


Fig. 100.



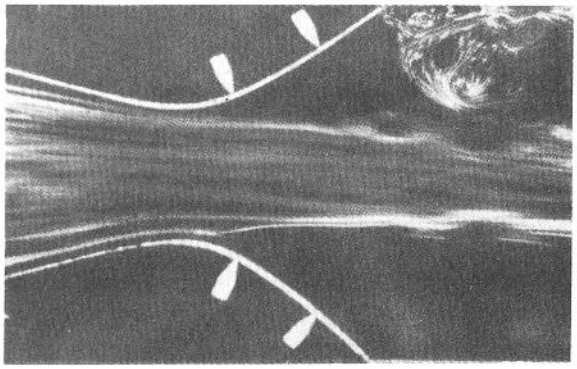
Entwicklung der Strömung um einen rotierenden Zylinder.

Kanäle nur sehr allmählich erweitert werden bzw. die Form der Körper genügend schlank gehalten wird, um dem Antrieb der äußeren Strömung das Übergewicht über den Druckanstieg zu ermöglichen. Die Lösung gelingt aber im allgemeinen nur in dem Falle befriedigend, daß die Reibungsschicht in dem verzögerten Teile turbulent strömt.

Man kann im übrigen die Reibungsschichten auch künstlich so beeinflussen, daß die Ablösung verhindert wird. Läßt man z. B. einen quer angeströmten Zylinder so rotieren, daß die Umfangsgeschwindigkeit gleich oder größer als die größte Strömungsgeschwindigkeit ist, die am Zylinderumfang

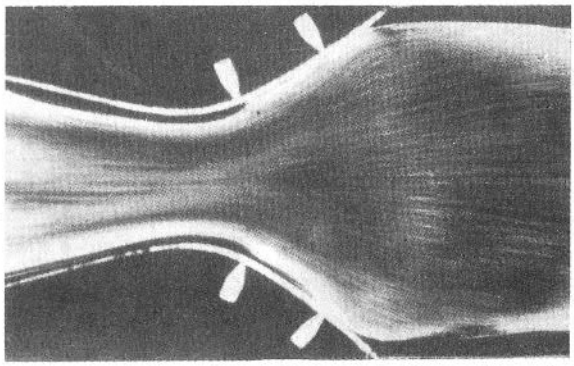
auftritt, so wird auf derjenigen Seite, wo die Flüssigkeit und die Wand sich gleichsinnig bewegen, überhaupt keine Bremsung der Reibungsschicht entstehen, diese wird vielmehr durch die voreilende Wand beschleunigt; dadurch wird sie mehr als die äußere Strömung befähigt, verzögernde Druckanstiege zu überwinden, und es kommt daher auf dieser Seite nicht zur Rückströmung und daher auch nicht zur Ablösung der Strömung. Auf der anderen Seite bewegt sich die Wand der Flüssigkeit entgegen und bremst die dortige

Fig. 101.



Gewöhnliche Strömung in einem stark erweiterten Kanal.

Fig. 102.



Strömung in einem stark erweiterten Kanal mit Absaugung an den Wänden.

Reibungsschicht, so daß hier erst Rückströmung und dann Ablösung eines kräftigen Wirbels entsteht. Gleichzeitig mit dem Wirbel entsteht, wie in § 10 des vorigen Abschnitts dargelegt wurde, eine dem Wirbel gegenläufige Zirkulation um den Zylinder, und es entsteht der Quertrieb des „Magnuseffekts", wie er in § 10 beschrieben wurde. Die größte Geschwindigkeit am Zylinderumfang ist bei der gewöhnlichen Potentialbewegung $= 2v$; kommt noch eine Zirkulationsbewegung von $2v$ hinzu, dann wird auf der einen Seite die Geschwindigkeit $= 0$, auf der anderen $= 4v$. Die Versuche mit rotierenden Zylindern zeigen, daß dieser Zustand ungefähr das Maximum des Magnus-

effekts ergibt und dann eintritt, wenn die Umfangsgeschwindigkeit u rund $= 4v$ gewählt wird. Die Wirbelbildungsvorgänge bei $u = 4v$ sind in Strömungsaufnahmen von Fig. 99 und 100 dargestellt.

Ein anderes Mittel der Beeinflussung der Reibungsschicht besteht darin, daß man an den Stellen, wo sich sonst rückwärts strömende Flüssigkeit ansammeln würde, durch Schlitze oder durch Poren der Wand Flüssigkeit nach dem Körperinnern zu absaugt. Wenn dadurch die Ansammlung gebremster Flüssigkeit verhindert wird, so unterbleibt auch die Ablösung der Strömung. Unterstützend kommt hinzu, daß durch das Absaugen der Druck in der Strecke unmittelbar vor dem Schlitz erniedrigt und so hier eine Ablösung verhindert wird. Man kann auf diese Weise nicht Widerstand sparen, aber man kann noch bei wesentlich kürzeren oder plumperen Körperformen eine Strömung ohne nennenswerte Wirbelbildung erhalten, als es sonst möglich wäre.

Fig. 101 und 102[1]) zeigen eine Strömung in einem erweiterten Kanal, in dem sich bei anliegender Strömung die Flüssigkeit des zunehmenden Querschnitts wegen stark verzögern muß, einmal ohne, einmal mit Absaugen an den Seitenwänden. Nur im letzten Falle liegt die Strömung an, im ersteren Falle bildet sich ein Strahl.

Eine dritte Art der Beeinflussung der Reibungsschicht besteht darin, daß man den Antrieb durch die äußere Strömung vermehrt. Dieses Mittel ist im allgemeinen weniger wirksam als die beiden anderen; es wird aber z. B. bei dem Düsenflügel nach Handley Page und Lachmann erfolgreich angewandt. Die Reibungsschicht des ersten Flügelteils in Fig. 103 wird in die äußere Strömung hinausgetragen und die am zweiten Teil ausgebildete durch den Strom, der durch den Schlitz fließt, angetrieben. Man erreicht mit diesem Flügel ein Anliegen der Strömung bis zu wesentlich größeren Anstellwinkeln, als dies sonst möglich ist, und damit einen erheblich größeren Auftrieb, allerdings auf Kosten eines stark vergrößerten Widerstandes.

Fig. 103.

Spaltflügel.

§ 8. Strömungen mit überwiegender Zähigkeit. Wie bereits in § 3 auseinandergesetzt wurde, kann bei stark überwiegender Zähigkeit die Trägheit gegenüber den Reibungskräften vernachlässigt werden. Diese „schleichenden Strömungen“ weisen das gemeinsame Merkmal auf, daß die Bewegungswiderstände proportional der ersten Potenz der Geschwindigkeit sind. Das Kennzeichen, daß die Zähigkeit überwiegt, ist bei den stationären Bewegungen eine sehr kleine Reynoldssche Zahl, die entweder durch sehr große Zähigkeit oder sehr kleine Geschwindigkeit oder sehr kleine Raumabmessungen erhalten werden kann (auch der Fall der sehr geringen Dichte ist zu erwähnen, der bei der Strömung eines Gases in stark evakuierten Rohrleitungen Anwendung findet). Drei Beispiele solcher Bewegungen mögen hier näher besprochen werden.

[1]) Nach Zeitschr. f. Flugtechn. u. Motorluftschiffahrt 1927 mit freundl. Erlaubnis des Verlages R. Oldenbourg, München.

a) Ein praktisch wichtiges Beispiel solcher Strömungen bildet die Strömung von Wasser und Luft durch Sand, Gerölle u. dgl.; die hierfür ermittelten Gesetze werden z. B. bei der rechnerischen Ermittlung von Grundwasserströmungen im Erdboden angewandt. Die Strömung, die hier in Wirklichkeit in den Zwischenräumen zwischen den einzelnen Sandkörnern erfolgt, läßt sich im großen so verfolgen, daß man die Menge angibt, die jeweils sekundlich durch die Flächeneinheit eines durch die Sandmasse gezogen gedachten Schnittes fließt. Diese Größe ist eine Geschwindigkeit und kann durch die Komponenten u, v, w (Ergiebigkeiten für Flächen senkrecht zur X-, Y- und Z-Achse) angegeben werden. Diese Geschwindigkeit kann bei der schleichenden Bewegung gemäß dem oben Gesagten oder in Analogie zu dem Hagen-Poiseuilleschen Gesetz für Rohre proportional dem Druckgefälle gesetzt werden, also in Komponenten

$$u = -k\frac{\partial p}{\partial x}; \quad v = -k\frac{\partial p}{\partial y}; \quad w = -k\frac{\partial p}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung (II. Abschnitt, § 2):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

die hier unverändert angewandt werden kann, ergibt sich gemäß (1):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Der Druck p folgt also denselben Beziehungen wie das Flüssigkeitspotential Φ in § 8 und 9 des vorigen Kapitels, und u, v, w werden hier (bis auf das hierfür unwesentliche Minuszeichen) aus p ebenso abgeleitet wie bei den reibungslosen Potentialbewegungen aus Φ. Ein wesentlicher Unterschied ist aber, daß p seiner physikalischen Natur nach überall eindeutig sein und stetig verlaufen muß, während Φ an Trennungsflächen unstetig sein darf, bei den Strömungen mit Zirkulation sogar mehrdeutig ist.

Man kann mit den vorstehenden Gleichungen das Strömen des Grundwassers in verschiedenen typischen Fällen verfolgen, so z. B. die Verhältnisse untersuchen, die sich in der Umgebung eines Brunnens einstellen, aus dem Wasser weggepumpt wird. Doch soll hier nicht näher darauf eingegangen werden.

b) Mit den Grundwasserströmungen in gewisser Weise verwandt sind die Strömungen zwischen zwei parallelen Platten. Im einzelnen hat man hier eine der Hagen-Poiseuilleschen Strömung ähnliche Strömung mit parabolischer Geschwindigkeitsverteilung, vgl. Fig. 95 in § 5. Der Mittelwert der Geschwindigkeit über die Spaltweite kann aber bei genügend kleinen Geschwindigkeiten wieder dem Druckgefälle proportional gesetzt werden, also in Komponenten

$$u = -k\frac{\partial p}{\partial x}; \qquad v = -k\frac{\partial p}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1a)$$

Die Kontinuitätsgleichung

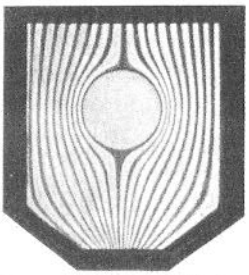
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

liefert hier also

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2a)$$

wieder in Analogie zu dem Potential der ebenen reibungslosen Strömung. Man kann daher die Stromlinien der reibungslosen Potentialströmung im Falle des eindeutigen und stetigen Potentials durch einen Versuch mit stark überwiegender Reibung nachahmen. Dies ist zuerst von Hele Shaw[1]) gemacht worden. Er führte in die zwischen Glasplatten strömende Flüssigkeit (Wasser, Glycerin) Streifen von gefärbter Flüssigkeit ein; diese gaben die Stromlinien der verschiedensten Potentialströmungen sehr schön wieder. Ein neuerer Apparat dieser Art, der mit Wasser und Tinte arbeitet, ist von R. Pohl angegeben worden; Fig. 104 ist mit diesem Apparat gewonnen worden.

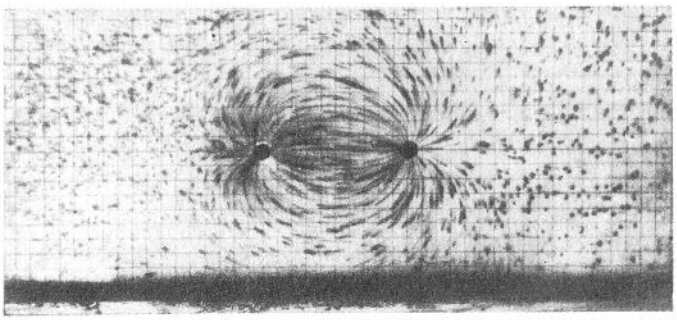
Fig. 104.



Umströmung eines Zylinders nach Pohl.

F. Prasil hat ähnliche Strömungen in einem großen flachen Becken erhalten, das wenige Millimeter hoch mit Wasser gefüllt war und in das kleine Kristalle von Kaliumpermanganat gestreut waren; vgl. Fig. 105[2]), die eine Quellsenkenströmung

Fig. 105.



Quellsenkenströmung nach Prasil.

darstellt (Eintritt durch das linke, Austritt durch das rechte Loch). Da die Druckverteilung gänzlich anderer Art ist, wie bei schwacher Reibung, nämlich immer Druckgefälle in der Strömungsrichtung[3]), sind hier nirgends

---

[1]) Nature 58, 34, 1898; Roy. Inst. Proc. 16, 49, 1899.

[2]) Nach Prasil, Technische Hydrodynamik, 2. Aufl. Mit freundl. Erlaubnis des Verlages Julius Springer, Berlin 1926.

[3]) Bei der reibungslosen Potentialströmung dagegen Druckgefälle in der Richtung des Gradienten von $\frac{w^2}{2}$!

Rückströmungen zu beobachten. Es mag daher ausdrücklich hervorgehoben werden, daß die in der beschriebenen Weise erhaltenen Strömungen auf derselben Linie stehen, wie die aus den Formeln gerechneten Potentialströmungen. Über die wirklichen Strömungen bei großen Reynoldsschen Zahlen geben sie keinen Aufschluß. Strömungen mit Trennungsflächen können allenfalls mit einem solchen Apparat erhalten werden, wenn man die Trennungsfläche durch eine Scheidewand verwirklicht und die strömenden Flüssigkeitsmengen beiderseits geeignet reguliert.

Es mag hier noch bemerkt werden, daß bei den hier beschriebenen Strömungen Abweichungen der Bahnen der inneren und äußeren Flüssigkeitsschichten eintreten, wenn die Flüssigkeitsschicht zu dick oder die Geschwindigkeit zu groß ist. Die Bahnen der wandnahen Schichten sind dann stärker gekrümmt, die der inneren Schichten gestreckt (Sekundärbewegungen, vgl. das Kleingedruckte am Schluß von § 6). Bei den Versuchen ist darauf zu achten, daß dieser Vorgang vermieden wird.

c) Ein weiteres Beispiel von Strömungen mit überwiegender Zähigkeit bilden die technisch sehr wichtigen Vorgänge in den geschmierten Lagern und Führungen von Maschinen. Es hat sich gezeigt, daß — besonders bei rascher Bewegung — zwischen den beiden gegeneinander bewegten Maschinenteilen (Zapfen und Lager bzw. Gleitschuh und Führung) eine selbst in strömender Bewegung befindliche dünne Ölschicht vorhanden ist, die die beiden festen Körper völlig vor gegenseitiger Berührung schützt. Die Fähigkeit eines Zapfenlagers und einer Gleitschuhführung, große belastende Kräfte bei kleiner Reibung aufzunehmen, muß also als Ergebnis eines Strömungsvorganges der Ölschicht verstanden werden. Hier mag als besonders einfaches Beispiel der Gleitschuh auf ebener Führung behandelt werden, wobei zur weiteren Vereinfachung noch angenommen werden soll, daß die gleitenden Flächen in der Richtung senkrecht zur Bewegung sehr ausgedehnt sein sollen, so daß man, zum mindesten in der mittleren Zone, eine ebene Bewegung annehmen darf[1]). Damit wir eine stationäre Bewegung erhalten, wollen wir ein Bezugssystem wählen, in dem der Gleitschuh ruht und die (wesentlich längere) Führung mit der Geschwindigkeit v nach rechts bewegt wird. Als Vorarbeit sei die Strömung durch einen Spalt von der Höhe h unter der Annahme untersucht, daß die obere Wand des Spaltes (der Gleitschuh) ruht, und die untere Wand (die Führung) parallel zur oberen mit der Geschwindigkeit v bewegt wird, und daß gleichzeitig in dieser Richtung ein Druckanstieg oder -gefälle herrscht. Die X-Achse sei in die Bewegungsrichtung gelegt, die Y-Achse sei senkrecht zu den Wänden. Der Druckanstieg ist dann $= \frac{\partial p}{\partial x}$, wofür zur Abkürzung p' geschrieben werden soll. p' darf dabei wegen der geringen Schichtdicke h als unabhängig von y angesehen

[1]) Diese zweidimensionale Theorie ist erstmalig von O. Reynolds entwickelt worden (nicht nur für den Gleitschuh, sondern auch für den Zapfen im Lager), vgl. Phil. Trans. Roy. Soc. 1886, Part I = Papers II, S. 228 = Ostwalds Klassiker Nr. 218, S. 39.

werden. Die Strömungsgeschwindigkeit, die hier in die X-Achse fällt, sei u (auch im allgemeineren Falle nicht völlig paralleler Wände ist die Geschwindigkeit durch die X-Komponente u hinreichend charakterisiert. Die Y-Komponente hat nur für die Kontinuität Bedeutung). Gemäß den Bemerkungen am Schluß von § 1 ist hier bei Vernachlässigung der Trägheit und unter der Annahme, daß in der X-Richtung der Zustand sich nur langsam ändert (langsam gegenüber den starken Änderungen nach y, was zur Vernachlässigung von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ gegen $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ führt):

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = p'.$$

Durch Integration folgt daraus

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = p' y + C_1$$

und weiter

$$\mu u = p' \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2.$$

Die Forderung, daß für $y = 0$ $u = v$ sein soll, wird erfüllt durch $C_2 = \mu v$; für $y = h$ soll $u = 0$ werden; dies ist erfüllt, wenn

$$C_1 = -\left(\frac{\mu v}{h} + \frac{p' h}{2}\right)$$

gesetzt wird. Damit wird

$$u = \frac{p'}{2\mu}(y^2 - h y) + \frac{v}{h}(h - y) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

Die Reibungskraft pro Flächeninhalt an der oberen Wand wird

$$\tau_1 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_h = -\mu \frac{v}{h} + p' \frac{h}{2} \cdot \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

(Die Reibungskraft an der unteren Wand ist entsprechend $\tau_0 = C_1 = -\mu \frac{v}{h} - p' \frac{h}{2}$.) Bei der Diskussion dieser Ergebnisse ist zu beachten, daß einem Druckanstieg in der Richtung der positiven X-Achse ein positives p' entspricht; ein negatives p' bedeutet ein Druckgefälle. Weiter interessiert noch die strömende Flüssigkeitsmenge, die wir im folgenden zur Formulierung der Kontinuität brauchen. Die Menge in der Höhe h wird für die Längeneinheit in der Breitenrichtung

$$Q = \int_0^h u\, dy.$$

Die sehr einfache Ausrechnung gibt

$$Q = \frac{v h}{2} - \frac{p' h^3}{12 \mu} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir uns der eigentlichen Aufgabe zuwenden. Es soll eine solche Lösung gefunden werden, bei der der Druck p, von dem Luftdruck p_0 beginnend, mit x stark anwächst und hinterher wieder auf p_0 abnimmt, denn der „Gleitschuh" soll ja Lasten tragen können, was nur bei einem derartigen Druckverlauf möglich ist. Mit einem konstanten Wert

der Spalthöhe h gelingt dies nicht, denn wegen der Kontinuität muß $Q = const$ gesetzt werden. v ist die Geschwindigkeit des Gleitschuhes, also konstant; damit wird auch der Druckanstieg p' konstant. Wir müssen also h mit x veränderlich annehmen; dann liefert Gl. (3)

$$p' = \frac{dp}{dx} = 12\mu\left(\frac{v}{2h^2} - \frac{Q}{h^3}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

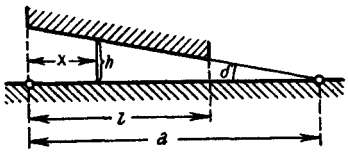
woraus durch Integration $p(x)$ erhalten wird. Die Bedingung, daß für Anfang und Ende des Gleitschuhes $p = p_0$ sein muß, liefert dann den bis dahin noch unbekannten Wert von Q. Damit ist aber der Verlauf von p bekannt, und es kann nun durch weitere Integrationen die resultierende Druckkraft des Gleitschuhes, für die Einheit in der Breitenrichtung $= \int_0^l p\,dx$, sowie das Moment $\int_0^l p\,x\,dx$ berechnet werden. Der Quotient Moment : Kraft liefert dann die Entfernung des Angriffspunktes der Kraft von der Stelle $x = 0$. Die Reibungskraft wird unter Benutzung von Gl. (2) $= \int_0^l \tau_1\,dx$, so daß damit die resultierende Kraft auf den Gleitschuh nach Größe, Richtung und Lage für jeden gegebenen Verlauf der Spalthöhe h ermittelt werden kann. Meist ist die resultierende Druckkraft gegeben, woraus dann eine Angabe über die Spalthöhe folgt.

Der einfachste Fall einer veränderlichen Spalthöhe wird erhalten, wenn man Gleitschuh und Führungsfläche eben, aber gegeneinander um einen kleinen Winkel δ geneigt annimmt. Der Gleitschuh reiche von $x = 0$ bis $x = l$; die Höhe sei

$$h = (a - x).\delta \cdots\cdots \quad (5)$$

was bedeutet, daß die Schnittkante der beiden Ebenen in der Entfernung a von der Vorderkante des Gleitschuhes ($x = 0$) liegt (vgl. Fig. 106). Damit wird

Fig. 106.



$$\int_0^x \frac{dx}{h^3} = \frac{1}{2\delta^3}\left(\frac{1}{(a-x)^2} - \frac{1}{a^2}\right) = \frac{2ax - x^2}{2\delta^3 a^2 (a-x)^2}$$

und

$$\int_0^x \frac{dx}{h^2} = \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}\right) = \frac{x}{\delta^2 a(a-x)};$$

also wird

$$p = p_0 + \frac{6\mu x}{\delta^2 a(a-x)}\left(v - \frac{Q(2a-x)}{\delta a(a-x)}\right) \cdots\cdots \quad (6)$$

Nach Gl. (6) ist für $x = 0$ $p = p_0$; damit auch für $x = l$ $p = p_0$ wird, muß dort die Klammer in (6) verschwinden, also

$$Q = \frac{v.\delta a(a-l)}{2a-l} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7)$$

sein. Nach leichter Vereinfachung ergibt sich hiermit, wenn noch für $\delta(a-x)$ wieder h gesetzt wird:

$$p = p_0 + \frac{6\mu v x(l-x)}{h^2(2a-l)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Zur Abschätzung des mittleren Druckes mag zunächst der Druck p_1 in der Mitte des Gleitschuhes $\left(x = \frac{l}{2}\right)$ angeschrieben werden. Dieser ist zwar nicht das Druckmaximum, da h gemäß Gl. (5) mit x veränderlich ist, aber er wird, wenn diese Veränderlichkeit nicht allzu stark ist, die Größenordnung dieses Maximums noch richtig angeben. Es ist gemäß Gl. (8) mit $h = \delta(a - l/2) = h_m$

$$p_1 - p_0 = \frac{3}{2}\,\frac{\mu v l^2}{h_m^2(2a-l)}\,.$$

Nimmt man eine angenähert parabelförmige Verteilung des Druckes an, so ist der mittlere Überdruck p_m genähert $= {}^2/_3\,(p_1 - p_0)$, also

$$p_m = \frac{\mu v l^2}{h_m^2(2a-l)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Diese Formel zeigt deutlich, daß auch bei verhältnismäßig kleinem μ durch sehr kleine mittlere Schichtdicke h_m sehr große Drucke erzielt werden können.

Fig. 107.

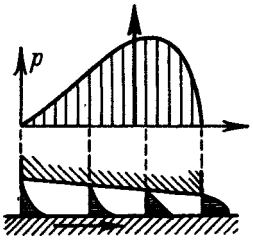
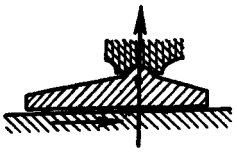


Fig. 108.



Gleitschuh.

Das Druckmaximum liegt gemäß Gl. (8) wegen der Abnahme von h in der Strömungsrichtung hinter der Mitte, daher liegt auch die resultierende Kraft hinter der Mitte. Fig. 107 zeigt eine solche Verteilung gemäß Formel (8). Darunter ist die zugehörige Geschwindigkeitsverteilung angedeutet, aus deren verschiedener Krümmung die Druckunterschiede deutlich sichtbar werden. Die besondere Art der Druckverteilung hängt dabei noch von dem Verhältnis l/a ab; die Lage der resultierenden Druckkraft ist nur von l/a abhängig. Mitchell gab den Gleitschuhen des nach ihm benannten Lagers eine gelenkige Befestigung etwas hinter der Mitte der Gleitfläche (vgl. Fig. 108) und erzielte dadurch ein unter allen Belastungen gleichmäßig gutes Arbeiten. Es stellt sich automatisch eine bestimmte Schräglage (genauer ein bestimmtes a) ein, denn bei stärkerer Neigung liegt der Druckmittelpunkt weiter hinten, bei schwächerer weiter vorn; die richtige Lage weist daher eine starke Stabilität auf.

In Wirklichkeit strömt bei solchen Gleitschuhen von der an der Eintrittskante erfaßten Ölmenge ein gewisser Teil an den Seitenkanten aus; dadurch erfährt der Druck im Innern eine wesentliche Abschwächung[1]); qualitativ bleibt der Vorgang jedoch von der beschriebenen Art.

[1]) Vgl. A. G. H. Mitchell, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 52, 123, 1905 = Ostwalds Klassiker Nr. 218, S. 202.

Die Schubspannungen am Gleitschuh sind wegen des Druckfeldes am Eintritt kleiner, am Austritt aber größer als die einfache Spaltreibung, aber sie bleiben doch im allgemeinen von derselben Größenordnung. In unserem Beispiel wird, wie sich leicht aus Gl. (4) und (7) ergibt:

$$\tau_1 = -\frac{\mu v}{h}\left(6\,\frac{a\,\delta\,(a-l)}{h\,(2\,a-l)} - 2\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

wobei die Veränderlichkeit von h gemäß Gl. (5) noch zu berücksichtigen ist. Ebenso wie oben bei Gl. (8) liegt auch hier keine grundsätzliche Schwierigkeit vor, durch Integration nach x die Resultierende der Schubspannungen zu ermitteln. Wir wollen uns jedoch auch hier mit einer Abschätzung begnügen. Die Verteilung von τ_1 nähert sich bei großem a der Trapezform. Wir wollen also lediglich den Wert für die Mitte des Gleitschuhes berechnen und dieses für den gesuchten Mittelwert τ_m nehmen. Nach leichter Rechnung ergibt sich

$$-\tau_m = \frac{\mu v}{h_m}\left(1 - \frac{3\,l^2}{(2\,a-l)^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Der Normaldruck p liefert wegen der Neigung δ der Gleitschuhfläche ebenfalls eine Kraft, die der Bewegung entgegenwirkt, vom Betrage $p\,.\,\delta$ auf der Flächeneinheit; im Mittelwert ergibt sich also, mit $\delta = \dfrac{h_m}{a - \dfrac{l}{2}}$ gemäß (9)

$$p_m\,.\,\delta = \frac{2\,\mu\,v}{h_m}\cdot\frac{l^2}{(2\,a-l)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Durch Vereinigung der beiden Widerstandsanteile ergibt sich also

$$-\tau_m + p_m\,\delta = \frac{\mu\,v}{h_m}\left[1 - \left(\frac{l}{2\,a-l}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

Mit Hilfe von Gl. (9) läßt sich in diesem Ausdruck noch die Schmierschichtdicke h_m fortschaffen. Es ist

$$h_m = \sqrt{\frac{\mu\,v\,.\,l^2}{p_m\,(2\,a-l)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

und damit

$$\tau_m + p_m\,\delta = \sqrt{\frac{\mu\,v\,p_m}{l}}\left[1 - \left(\frac{l}{2\,a-l}\right)^2\right]\cdot\sqrt{\frac{2\,a-l}{l}} \quad \ldots (15)$$

Der Ausdruck $\dfrac{\mu v}{l}$ stellt die (sehr kleine) Reibungsspannung dar, die bei einer Ölschicht von der Dicke l (!) auftreten würde. Der Größenordnung nach stellt also die wirkliche Reibungsspannung das geometrische Mittel aus dieser kleinen Reibungsspannung und der mittleren Belastung des Gleitschuhs dar. Der Gleitwiderstand verändert sich also bei festen Werten von l und a proportional der Wurzel aus der Zähigkeit, und auch proportional der Wurzel der Belastung und ebenso derjenigen der Geschwindigkeit. Diese Gesetzmäßigkeit kommt übrigens nicht nur unsern hier betrachteten Mittelwerten zu, sondern würde sich aus den genauen Formeln ebenso ergeben haben (hier natürlich mit einer anderen Funktion von a/l!).

Der in der Coulombschen Theorie der Reibung fester Körper betrachtete „Reibungskoeffizient" (Reibung: Normalkraft) würde hier durch

$$f = \frac{\tau_m + p_m \delta}{p_m}$$

dargestellt. Es wäre also bei festen Werten von l und a, d. h. gegebenen Abmessungen des Gleitschuhs nach Fig. 108, proportional $\sqrt{\frac{\mu v}{p_m l}}$.

Zahlenbeispiel: Es sei $\mu = 1$ CGS, $v = 100$ cm/sec, $p = 10$ kg/cm² $\approx 10^7$ dyn/cm², $l = 10$ cm. Dann ist

$$\sqrt{\frac{\mu v}{p_m l}} = 10^{-3}.$$

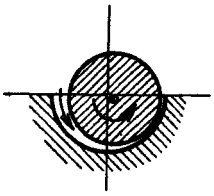
Ist ferner $a = 2l$, so ist der Zahlenfaktor von Gl. (15) $= \frac{8}{9}\sqrt{3} = 1{,}54$, also wird $f = 1/650$. Die mittlere Dicke der Schmierschicht ergibt sich aus Gl. (40), die auch

$$h_m = l\sqrt{\frac{\mu v}{p_m l}} \cdot \sqrt{\frac{l}{2a - l}}$$

geschrieben werden kann, zu $10\,\text{cm} \,.\, 10^{-3} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}0577$ mm.

Beim Zapfen im Lager sind die Verhältnisse weniger einfach, da hier in der Spaltweite s bei zentrischer Lage des Zapfens (Differenz des Lagerhalbmessers $r + s$ und des Zapfenhalbmessers r), auch „Lagerspiel" genannt, eine neue, fest gegebene Größe auftritt, zu der durch Verschiebung des Lagermittelpunktes in wagerechter und senkrechter Richtung noch zwei Unbekannte hinzutreten. Im wesentlichen kommt es auch hier darauf hinaus, daß ein keilförmiges Ölpolster gebildet ist, durch das das Öl von dem rotierenden Zapfen von der weiten Seite zur engen durchgeschleppt wird (vgl. Fig. 109). Die Rechnungen sind hier sehr umständlich, sie werden aber einfacher, wenn man annehmen darf, daß die Zapfenexzentrizität e klein ist gegen das Lagerspiel s. Dies trifft bei in Öl badenden, schnell laufenden und mäßig belasteten Zapfen zu. Man kann in diesem Falle $h = s + e\cos(\varphi + \alpha)$ setzen (φ = Zentriwinkel) und in den Formeln die Nenner binomisch entwickeln. Bei dieser Rechnung, deren Durchführung ganz analog derjenigen für den Gleitschuh ist, wird $\frac{e}{s}$ proportional der dimensionslosen Größe $L = \frac{p_m s^2}{\mu v r}$, worin p_m den mittleren Lagerdruck, r den Zapfenradius und v die Umfangsgeschwindigkeit bedeutet. Der Bau dieser „Lagerbelastungszahl" oder kürzer „Lagerzahl" läßt sich im übrigen auch an Hand unserer Formel (9) für den Gleitschuh einsehen, die auch so geschrieben werden kann:

Fig. 109.



Lager.

$$\frac{l}{2a - l} = \frac{p_m h_m^2}{\mu v l}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist rein geometrischer Natur und hat eine ganz verwandte Bedeutung wie e/s; rechts tritt h_m statt s auf und l statt r.

Im allgemeineren Fall[1]) eines nicht kleinen e/s erweist sich diese Größe als eine Funktion der Lagerzahl L, ebenso der Winkel α zwischen der Kraftrichtung und der Richtung der Verbindungslinie Zapfenmittel—Lagermittel. Dieser Winkel ist meist in der Nähe von 90°; der Punkt des kleinsten Abstandes zwischen Zapfen und Lager liegt dabei gegen die Richtung des Zapfendrucks in der Drehrichtung voraus.

Der Einfluß verschiedener Lagerbelastung, verschiedenen Lagerspiels, verschiedener Ölzähigkeit und Umfangsgeschwindigkeit kommt in der Lagerzahl richtig zum Ausdruck, es erweist sich deshalb auch richtig, Versuchsergebnisse unter Zuhilfenahme dieser Größe zu ordnen[2]).

Bei den vorstehenden Ausführungen war natürlich stillschweigende Voraussetzung, daß durch reichliche Ölzufuhr und nicht zu kleine Geschwindigkeit bzw. nicht zu große Lagerbelastung ein die ganze Lagerfläche bedeckender „Ölfilm" vorhanden ist, der jede metallische Berührung verhindert. Mit Rücksicht darauf, daß der Genauigkeit, mit der sich Lager und Zapfen bzw. Gleitschuh und Führung herstellen lassen, Grenzen gezogen sind, ist bei zu kleiner Spaltweite h eine metallische Berührung nicht mehr zu vermeiden, und es treten dann Zustände ein, die durch die gewöhnliche Reibung der festen Körper besser erklärt werden können. Auch der Fall, daß im Ölfilm größere negative Drucke eintreten, muß bei Benutzung der Formeln ausgeschlossen werden. In diesem Falle ist statt dessen Zerreißen des Ölfilms zu erwarten; dies ändert zum mindesten die Berechnungsgrundlagen.

§ 9. Strömung durch gerade Röhren und Kanäle von gleichbleibendem Querschnitt. Das in § 1 angegebene Hagen-Poiseuillesche Gesetz, wonach der Druckabfall proportional der Geschwindigkeit wächst, gilt nur unterhalb der kritischen Geschwindigkeit (vgl. § 4). Oberhalb der kritischen Geschwindigkeit, also bei turbulenter Strömung, ist der Druckabfall, wie in § 4 schon erwähnt, mehr oder minder genau proportional der zweiten Potenz der Geschwindigkeit. Die Schubspannung an der Wand kann dann $= \lambda' \varrho \frac{w^2}{2}$ geschrieben werden, wo λ' eine von den näheren Umständen, besonders von der Wandrauhigkeit abhängige Zahl und w die mittlere Geschwindigkeit ist. Der Druckabfall in einem Rohr- oder Kanalstück von der Länge l muß den Schubspannungen an der Wandfläche das Gleichgewicht halten, vgl. die an Fig. 89a anknüpfende Betrachtung in § 1. Es ist daher mit $F =$ Querschnittsfläche und $U =$ „benetzter Querschnittsumfang"[3])

$$(p_1 - p_2)\, F = \tau l U = \lambda' \varrho \frac{w^2}{2} l U,$$

---

[1]) Vgl. O. Reynolds, l. c.; A. Sommerfeld, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 50, 97, 1904 = Ostwalds Klassiker Nr. 218, S. 108.

[2]) Über Einzelheiten vgl. etwa Gümbel-Everling, Reibung und Schmierung im Maschinenbau. Berlin 1925.

[3]) Bei einem offenen Gerinne (Fluß oder Kanal) gehört der freie Spiegel nicht zu dem „benetzten Umfang".

also

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = \lambda' \frac{U}{F} \frac{\varrho w^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Man nennt $F/U = r_h$ den hydraulischen Radius. Bei einem unter der Wirkung der Schwere fließenden Gewässer, z. B. einem Fluß, wird gewöhnlich das Spiegelgefälle $i = \frac{z_1 - z_2}{l}$ angegeben, vgl. Fig. 110, das mit dem Druckgefälle längs einer wagerechten Linie durch die Beziehung $p_1 - p_2 = g\varrho(z_1 - z_2)$ zusammenhängt (Abschnitt I, § 6); damit wird $i = \frac{1}{g\varrho} \frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{\lambda'}{r_h} \frac{w^2}{2g}$. Durch Umkehrung ergibt sich hieraus

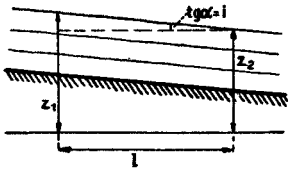
$$w = \sqrt{\frac{2g}{\lambda'} r_h i}.$$

In der Anwendung auf Flüsse und Kanäle wird diese Formel meist

$$w = C \sqrt{r_h i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

geschrieben und als Chézysche Formel bezeichnet. Der Wert von C, der noch als eine Funktion des hydraulischen Radius und der Wandrauhigkeit angesehen werden muß, schwankt für Wassertiefen von 0,5 bis 3 m von 80 $m^{1/2} s^{-1}$ bei Kanälen aus glattem Holz oder glatt geputztem Mauerwerk bis 30 bis 50 bei Erdwänden und 24 bis 40 bei Gerölle. Es sind vielfach Formeln vorgeschlagen worden, die die Beobachtungen genauer wiedergeben sollen, z. B. kann C bei gleicher Wandbeschaffenheit etwa der 6. bis 8. Wurzel aus dem hydraulischen Radius proportional gesetzt werden, jedoch besteht immer die Schwierigkeit, die gerade vorliegende Wandrauhigkeit richtig einzuschätzen. Der Einfluß verschiedener Querschnittformen wird durch den hydraulischen Radius in befriedigender Weise wiedergegeben, was darauf hindeutet, daß wirklich, wie in obiger Ableitung stillschweigend angenommen, die Schubspannung an allen Wandstellen ungefähr gleich groß ist.

Fig. 110.



In § 16 des vorigen Abschnitts wurde erwähnt, daß die Geschwindigkeit $\sqrt{gh}$, mit der ein niedriger Schwall fortschreitet, die Grenze zwischen „Strömen" und „Schießen" bilde. Setzt man $h = r_h$, was bei breiten Flußläufen zutrifft, so ist im Grenzfall

$$w = C \sqrt{r_h i_1} = \sqrt{g r_h},$$

also

$$i_1 = g/C^2;$$

für $C = 50\ m^{1/2} s^{-1}$ ist also z. B. $i_1 = 1/250$. Für $i < i_1$ findet Strömen, für $i > i_1$ Schießen statt.

Für Röhren von Kreisquerschnitt (Radius r) ist

$$\frac{F}{U} = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2}.$$

Schreibt man λ_1 für $2\lambda'$, so wird aus Gl. (1)

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{\lambda_1}{r} \frac{\varrho w^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

λ_1 heißt Widerstandsziffer. Es muß dabei bemerkt werden, daß die Ingenieure meist statt des Radius r den Durchmesser $d = 2r$ in die Formel einsetzen, wodurch die Widerstandsziffer λ_2, um dasselbe Zahlenergebnis zu erhalten, doppelt so groß wie hier, also $\lambda_2 = 2\lambda_1 = 4\lambda'$ gesetzt werden muß.

Eine Ähnlichkeitsbetrachtung ergibt für rauhe Rohre, daß man dieselben Zahlenwerte für λ bei zwei Röhren verschiedenen Durchmessers erwarten kann, wenn die Abmessungen der Rauhigkeiten sich wie die Rohrweiten verhalten. Hopf und Fromm[1]) fanden, daß, wenn k eine Längenabmessung der Rauhigkeit (z. B. ihre Höhe) ist, λ für geometrisch ähnliche Rauhigkeiten proportional $\left(\frac{k}{r_h}\right)^{0,314}$ ist. — Durch Vergleich mit Gl. (2) ergibt sich $\lambda_1 = 4g/C^2$; dies gibt für die obigen Werte von C λ_1-Werte von 0,006 bis 0,068.

Über das Verhalten der turbulenten Strömung in glatten Rohren liegen ausgedehnte und zum Teil sehr genaue Versuchsreihen vor. Vom theoretischen Standpunkt läßt sich zunächst nur sagen, daß die Widerstandsziffer λ in solchen Fällen denselben Zahlwert haben muß, wo die Reynoldssche Zahl $\mathfrak{R}$ der Strömung (vgl. § 2) denselben Wert hat. λ kann daher noch eine Funktion von $\mathfrak{R}$ sein. In der Tat zeigt sich eine Abnahme von λ mit wachsender Reynoldsscher Zahl. Bis etwa $\mathfrak{R}_1 = \frac{wr}{\nu} = 40000$[2]) kann

$$\lambda_1 = 0{,}1330\,\mathfrak{R}_1^{-1/4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

geschrieben werden [Blasius[3]), nach Versuchen von Saph und Schoder]. Spätere Versuche, die bis $\mathfrak{R}_1 = 200000$ ausgedehnt wurden, zeigten, daß die Formel

$$\lambda_1 = 0{,}0036 + 0{,}24\,\mathfrak{R}_1^{-0,35} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

das wirkliche Verhalten bis zu diesem Wert von $\mathfrak{R}_1$ besser darstellt [Lees, nach Versuchen von Stanton und Pannell[4]), ferner Jakob und Erk nach eigenen Versuchen][5]).

Neuerdings hat R. Hermann[6]) nach eigenen nahe an $\mathfrak{R}_1 = 10^6$ reichenden Versuchen die Formel

$$\lambda_1 = 0{,}00270 + 0{,}161\,\mathfrak{R}_1^{-0,3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

aufgestellt.

---

[1]) Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **3**, 329 u. 339, 1923.

[2]) In der Literatur findet man als die Länge, die in die Reynoldssche Zahl von Röhrenströmungen eingeführt wird, sowohl den Halbmesser r wie den Durchmesser d, seltener den hydraulischen Radius r_h Hier wird, entsprechend dem physikalischen Brauche, r bevorzugt. Zur Unterscheidung wird $\frac{wr}{\nu} = \mathfrak{R}_1$ und $\frac{wd}{\nu} = \mathfrak{R}_2$ geschrieben ($\mathfrak{R}_2 = 2\mathfrak{R}_1$).

[3]) Forschungsarbeiten des Ver. Deutsch. Ing. 1913, Heft 131.

[4]) Phil. Trans. Roy. Soc. London (A) **214**, 199, 1914; Proc. Roy. Soc. London (A) **91**, 46, 1915.

[5]) Forschungsarbeiten des Ver. Deutsch. Ing. 1924, Heft 267.

[6]) Dissertation Leipzig 1930.

Vor kurzem ist auch eine Inangriffnahme des Problems des Rohrwiderstandes von der theoretischen Seite geglückt. Es gelang Th. v. Kármán[1]) im Zusammenhang mit den in § 5 dargestellten Überlegungen über die Geschwindigkeitsverteilung, eine Näherungsformel anzugeben, die bei großen Reynoldsschen Zahlen die Messungsresultate sehr genau wiedergibt. Diese Formel lautet in leichter Abänderung (mit der mittleren Geschwindigkeit statt der maximalen)

$$\lambda_1 = \frac{A}{\left(log_{10}(\mathfrak{R}_1 \sqrt{\lambda_1}) + B\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Durch diese Abänderung überdeckt die Formel nun mit recht geringen Abweichungen den ganzen Bereich. Nach den bis $\mathfrak{R}_1 = 1{,}6 \,.\, 10^6$ reichenden Versuchen von Nikuradse[2]) ist $A = 0{,}125$ und $B = 0{,}051$ zu setzen. λ_1 kann allerdings aus Formel (7) nur in schrittweiser Annäherung gerechnet werden, doch genügt meist schon die erste Näherung, wenn der erste Wert von $\sqrt{\lambda_1}$ einigermaßen richtig war.

Ein Überblick über den Verlauf von λ_1 für glatte Rohre ergibt sich aus folgenden in runden Werten angegebenen Zahlen. Es wird

$\lambda_1 =$	0,020	0,015	0,010	0,008	0,006	0,004
für $\mathfrak{R}_1 = \frac{wr}{\nu} =$	2000	6000	30000	90000	420000	5400000

Aus der Blasiusschen Formel (4) ist durch Berechnung der Schubspannung an der Wand die Formel (1) in § 5, b erhalten worden, in der nur durch Anbringung eines Zahlenkoeffizienten von der mittleren Geschwindigkeit zur Geschwindigkeit in der Rohrmitte übergegangen ist. Aus der Annahme, daß die Schubspannung an der Wand von der Strömung an der Wand, nicht aber von der Entfernung der Rohrmitte von der Wand abhängen muß, ist die Form (2) der Gleichung für die Schubspannung in § 5 gewonnen worden. Aus der Unabhängigkeit des τ_{Wand} von y kann, wie dort erwähnt, auf $u^{3/4}/y^{1/4} = const$ für ein und dieselbe Strömung oder u proportional $y^{1/7}$ geschlossen werden. Diese Beziehung ist im Bereich der Reynoldsschen Zahlen $u\,y/\nu$, für die Gl. (4) gilt, durch die Versuche sehr gut bestätigt worden. Für größere Reynoldssche Zahlen ist u genähert proportional $y^{1/8}$ bzw. $y^{1/9}$ usw.

Das Hagen-Poiseuillesche Gesetz, das mit $w = Q/\pi r^2$ auch in der Form

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{8\mu w}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

geschrieben werden kann, läßt sich ebenfalls unter die Form von Gl. (3) bringen, wenn man

$$\lambda_1 = \frac{16}{\mathfrak{R}_1} = \frac{16\mu}{\varrho w r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8a)$$

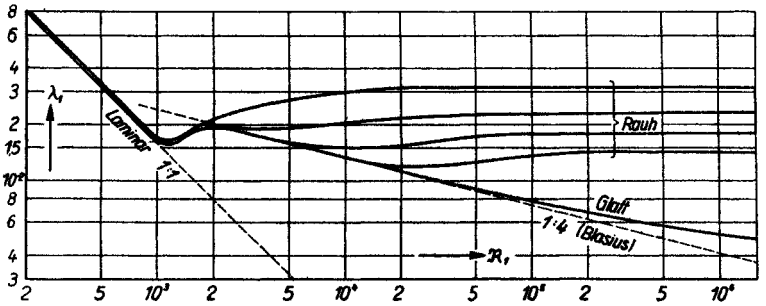
setzt. Das Diagramm Fig. 111 stellt λ_1 als Funktion von $\mathfrak{R}_1$ dar, wie es sich aus den Beobachtungen ergibt.

Die kleinste Reynoldssche Zahl $\mathfrak{R}_1 = \frac{wr}{\nu}$, bei der eine turbulente Bewegung in einem genügend langen geraden Rohr noch bestehen kann, ist nach L. Schiller[3]) $\mathfrak{R}_1 = 1160$. Die größte Reynoldssche Zahl, bei der die

[1]) A. a. O., vgl. Fußnote 1 von S. 97.
[2]) Stockholmer Vortrag 1930, Verhandl., Bd. I, S. 239.
[3]) Forschungsarbeiten des Ver. Deutsch. Ing. 1922, Heft 248, S. 16.

Laminarströmung noch bestehen kann, ist abhängig von der Größe der Störungen, mit denen der Zufluß der Flüssigkeit zum Rohr behaftet ist oder die an der Rohreintrittsstelle (durch scharfe Kanten oder dergleichen) erzeugt werden. Bei gut abgerundetem Einlauf und gut beruhigtem Wasser im Behälter läßt sich leicht $\frac{wr}{\nu} = 10000$ und mehr erhalten. Die Ursachen für die Entstehung der ersten Turbulenz in einem solchen Falle sind noch nicht hinreichend geklärt. Wahrscheinlich geben schwache Wirbel mit Achse parallel der Rohrachse, die durch geringe noch vorhandene Strömungen im Behälter verursacht werden, zunächst Anlaß zu labilen Geschwindigkeitsverteilungen im Rohr; diese führen dann einen raschen Zerfall der Strömung unter Bildung

Fig. 111.



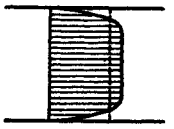
Verlauf der Widerstandszahl λ_1 abhängig von der Reynoldsschen Zahl, nach Nikuradse.

heftiger Querwirbel hervor, die dann nicht mehr verschwinden, da sie immer wieder Anlaß zu neuen instabilen Geschwindigkeitsverteilungen geben. Bei scharfkantigem Einlauf bildet sich dort eine Trennungsschicht, die leicht in Wirbel zerfällt und dann Turbulenz hervorruft. Ist das Rohr in eine ebene Wand so eingesetzt, daß es mit scharfer Kante an diese anschließt, so erhält man den Übergang zur turbulenten Strömung etwa bei $\mathfrak{R}_1 = 1400$.

Der Verlauf des Druckabfalls in einem Rohr, wie er durch die Gl. (8) bzw. (4) bis (7) und durch die Fig. 111 dargestellt ist, wird nur erhalten, wenn die „Meßstrecke", an deren Anfang und Ende die Drucke (durch Anbohrungen, vgl. vorigen Abschnitt, § 7) gemessen werden, genügend weit, z. B. 60 Durchmesser, vom Einlauf entfernt sind, und selbst dann können sich im laminaren Zustand noch gewisse Abweichungen zeigen. Mißt man näher am Einlauf, oder mißt man etwa den Druckabfall vom Behälter bis zum Rohrende, so kommen die Anlaufvorgänge noch wesentlich mit in Betracht. Zunächst hat man, abgerundeten Einlauf vorausgesetzt, einen Druckabfall $= \frac{\varrho w^2}{2}$ zur Erzeugung der Geschwindigkeit w im Eintrittsquerschnitt des Rohres. Die Geschwindigkeit ist zunächst im Querschnitt praktisch gleichförmig verteilt, da jedes Teilchen dasselbe Druckgefälle durchlaufen hat. Die Bremsung durch Reibung setzt von der Wand her ein, und es bildet sich eine

wachsende Schicht verzögerter Flüssigkeit, vgl. Fig. 112. Die Geschwindigkeit der Kernströmung in der Rohrmitte muß dabei in dem Maße zunehmen, daß durch jeden Querschnitt dieselbe Menge fließt; dieser Beschleunigung der Kernströmung entspricht ein Druckgefälle längs der Rohrachse gemäß der auf die Kernströmung angewandten Bernoullischen Gleichung. Dieses Druckgefälle, durch das auch die Randzone einen Antrieb erfährt, ist größer als das der Hagen-Poiseuilleschen Strömung. Beim Weiterströmen stellt sich durch Ausbreiten der Reibungszone allmählich der normale Strömungszustand der Hagen-Poiseuilleschen Strömung her. Der Übergang vollzieht sich nach Rechnungen und Beobachtungen von L. Schiller[1]) etwa nach einer Strecke

Fig. 112.



Geschwindigkeitsprofil der Anlaufströmung.

$$l_1 = 0{,}12\,\frac{r^2 w}{\nu} = 0{,}12\,r\,.\,\mathfrak{R}_1.$$

Bei $\mathfrak{R}_1 = 1000$ bzw. 10000 wird demnach $l_1 = 120$ bzw. $1200\,r$, also 60 bzw. 600 Rohrdurchmesser! Bei kurzen, an der Eintrittsstelle abgerundeten Rohrstücken ist daher, wenn die Reynoldssche Zahl nicht ganz klein ist, keine Rede davon, daß die Geschwindigkeit nach Gl. (3) von § 1, also nach einem Paraboloid verteilt wäre. Die Geschwindigkeit ist, wenn die Flüssigkeit aus einem größeren Raume kommt, hier vielmehr in der Hauptsache gleichförmig verteilt, und nur eine Randschicht ist durch Reibung verzögert.

Die turbulente Strömung bildet sich in verhältnismäßig kürzeren Strecken aus, wenn durch scharfe Kanten, durch Umlenken um eine Ecke oder dergleichen beim Eintritt in das Rohr für die nötigen Wirbel gesorgt ist. Bei glattem Einlauf bildet sich zunächst ein laminares Stück aus, am Ende dessen die Turbulenz einsetzt. Für große Reynoldssche Zahlen und störungslosen Zustrom kann diese Länge etwa $l_2 = 500000\,\nu/w = 500000\,r/\mathfrak{R}_1$ gesetzt werden (vgl. Plattenwiderstand, § 13).

Die vorstehenden Angaben treffen, wie ausdrücklich bemerkt werden möge, nur für gerade Rohre zu. In Krümmungen sind die Widerstände immer größer. Bei der Laminarbewegung ist der Einfluß selbst einer sehr schlanken Krümmung besonders auffällig, wenn die Reynoldssche Zahl nicht zu klein ist. Die schneller fließenden mittleren Partien der Strömung drängen sich dabei durch Zentrifugalwirkung nach außen, die langsameren Randpartien werden nach innen, d. h. nach dem Krümmungsmittelpunkt hin abgedrängt. Eine Theorie dieser Erscheinung ist von W. R. Dean[2]) entwickelt worden.

Qualitativ kann man sich in folgender Weise über diese Vorgänge Rechenschaft geben. Der Krümmungsradius R sei groß gegen den Querschnittsradius. Die Geschwindigkeit in der Mitte ist bei paraboloidischer Verteilung $= 2w$; dem entspricht ein Druckanstieg durch Zentrifugalkraft $= \frac{\varrho(2w)^2}{R}$ (für die Längeneinheit gerechnet). In den Randpartien sind die Zentrifugalkräfte nur klein. Der Druckunterschied Δp zwischen Innen- und Außenwand ist damit

$$\text{rd. } \frac{1}{2}\cdot 2r\cdot\frac{4\varrho w^2}{R} = 4\varrho w^2\frac{r}{R}.$$

Dieser Druckunterschied wirkt sich, da in den seitlichen Randpartien entsprechende Kräfte fehlen, in einer Sekundärströmung der erwähnten Art aus. Die Geschwindig-

[1]) Forschungsarbeiten des Ver. Deutsch. Ing., Heft 248; Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 2, 96, 1922.

[2]) W. R. Dean, Phil. Mag. (7) 4, 208, 1927 und 5, 673, 1928.

keit der Sekundärströmung kann für den Fall einer sehr schwachen Krümmung so abgeschätzt werden: Ein mittlerer Streifen habe die Geschwindigkeit v nach auswärts, zwei äußere Streifen eine gleiche Geschwindigkeit nach einwärts (mit Übergängen natürlich). Ist die Schubspannung zwischen beiden Streifen $= \tau_1$, so ist die Kraft am mittleren Streifen für die Längeneinheit in der Achsrichtung $=$ rd. $2\tau_1 . 2r$; diese hat die Druckresultierende $\Delta p . b$ im Gleichgewicht zu halten, wo b die Breite des mittleren Streifens ist. Wir setzen zur Vereinfachung $b = r$; andererseits kann $\tau_1 \approx \frac{2\mu v}{b/2}$ gesetzt werden (vgl. die Rechnungen in § 1).

Damit ergibt sich

$$16\mu v = 4\varrho w^2 r^2/R$$

oder

$$\frac{v}{w} = \frac{1}{4} \cdot \frac{wr}{\nu} \cdot \frac{r}{R} = \frac{1}{4}\mathfrak{R}\ \frac{r}{R}.$$

Dies ist eine Dimensionslose unseres Problems (die wir natürlich ähnlich auch aus einer einfacheren Dimensionsbetrachtung hätten anschreiben können).

Wenn die Krümmung stärker ist, dann wird durch die Sekundärströmung das Geschwindigkeitsprofil gänzlich geändert, die größte Geschwindigkeit ist jetzt nahe der Außenwand zu finden; die Sekundärströmung vollzieht sich hauptsächlich in einer Art Grenzschicht in den wandnahen Teilen. C. M. White[1]) fand auf Grund von Versuchen, daß der Widerstand der laminaren Strömung im krummen Rohr gleich der des geraden Rohrs nach Formel (8) multipliziert mit einer Funktion $f(\mathfrak{D})$ ist, wo $\mathfrak{D}$ das geometrische Mittel der Reynoldsschen Zahl $\mathfrak{R}$ und der obigen Dimensionslosen $\mathfrak{R} . r/R$ ist, also

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{R}\sqrt{\frac{r}{R}} = \frac{wr}{\nu}\sqrt{\frac{r}{R}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Die Funktion $f(\mathfrak{D})$ ist nicht viel von 1 verschieden für $\mathfrak{D} < 20$, für $20 < \mathfrak{D} < 1000$ kann die Näherungsformel

$$f(\mathfrak{D}) = 0{,}37\,\mathfrak{D}^{0{,}36} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

verwendet werden.

Bei turbulenter Strömung ist der Einfluß einer schlanken Krümmung nicht so groß, scharfe Krümmungen geben aber erhebliche Widerstandsvermehrungen. Bei Umlenkung um einen bestimmten Winkel mit anschließendem geraden Stück wird auch in diesem vermehrter Widerstand festgestellt, was mit dem abweichenden Geschwindigkeitsprofil beim Eintritt in das Geradenstück zusammenhängt. Der gesamte Zusatzwiderstand einer Umlenkung z. B. um 90° ist vom Krümmungsradius nicht sehr stark abhängig, da ein kurzer scharfer Bogen ungefähr ebensoviel bringt, wie ein längerer schlanker.

Für überschlägliche Abschätzungen über die Verluste in glatten Rohrkrümmern mit Krümmungsradien von $R = 4d$ bis $R = 10d$ mag die Angabe dienen, daß die Widerstandszahl ζ für Ablenkungen von $22^1/_2{}^0$; 45^0; 60^0 und 90^0 rund 0,045; 0,075; 0,09; 0,10 beträgt, bei schärferer Krümmung etwas mehr, desgl. bei rauhen Wänden[2]) (Formel: $p_2 - p_1 = \frac{\zeta\varrho u^2}{2} +$ gewöhnliche Rohrreibung).

§ 10. Strömung durch Kanäle mit Querschnittsänderungen. a) Der einfachste hierher gehörige Fall ist der Ausfluß aus Mündungen. Soweit keine hydraulischen Verluste dabei auftreten, ist die Aufgabe schon in § 4 des vorigen Kapitels behandelt, insbesondere ist dort betont, daß vermöge der Strahlkontraktion der Strahlquerschnitt meist nicht mit dem Lochquerschnitt (F) übereinstimmt: Strahlquerschnitt $= \alpha F$, wo α die Kontraktionsziffer heißt (bei scharfrandigen Öffnungen in ebener Wand etwa $\alpha = 0{,}61$). Die Geschwindigkeit in der Strahlmitte ist beim Ausfluß aus einem Gefäß, dessen Querschnitt groß gegen den Lochquerschnitt ist, meist sehr genau $= \sqrt{2gh}$; aber in der Randzone wird durch die Reibung der auf das Loch

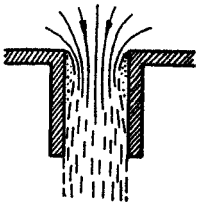
[1]) C. M. White, Proc. Roy. Soc. (A) **123**, 645, 1929.

[2]) Vgl. D. Thoma, Transactions Tokyo Sectional Meeting, Worlds Power Conference 1929, Bd. II, S. 446.

zufließenden Flüssigkeit an der Wand eine Geschwindigkeitsverminderung gefunden, die bei den Mündungen nach Fig. 26 größer ausfällt als bei solchen nach Fig. 25. Die mittlere Geschwindigkeit wird somit etwas kleiner als die theoretische und kann $w = \varphi \sqrt{2gh}$ geschrieben werden, mit $\varphi =$ Geschwindigkeitsziffer. Die Geschwindigkeitsziffer ist hauptsächlich bei kleinen Öffnungen und kleinen Geschwindigkeiten (bei kleiner Reynoldsscher Zahl!) merklich von 1 verschieden; bei großen Öffnungen und Geschwindigkeiten ist sie fast immer ganz nahe an 1 (vorausgesetzt, daß der Gefäßquerschnitt auch hier groß gegen den Lochquerschnitt ist). Der Ausflußvorgang eignet sich zur Mengenmessung. Man braucht nur den Lochquerschnitt F und die Flüssigkeitshöhe h zu messen, dann ist $Q = \alpha \varphi F \sqrt{2gh}$ die sekundliche Menge. Das Produkt $\alpha \varphi$ pflegt zu der „Ausflußziffer" μ zusammengefaßt zu werden: $\alpha \varphi = \mu$. Zur Ermittlung von μ kann man die in festgestellter Zeit ausgeflossenen Flüssigkeitsmengen wägen.

b) Bei scharfkantig an die Wand anschließenden Ansatzröhren, wie z. B. Fig. 113, werden dagegen erhebliche Verluste festgestellt. Man hat zunächst eine Kontraktion ähnlich wie bei einer Öffnung in dünner Wand, dann aber Wiederausbreitung unter Vermischung mit dem Totwasser, das den Strahl umgibt (in Fig. 113 punktiert). Für diese Vorgänge ergeben sich gemäß der Theorie im vorigen Abschnitt § 12, c, folgende Beziehungen: Ist w die mittlere Ausflußgeschwindigkeit am Ende des Ansatzrohres, so ist die Geschwindigkeit an der engsten Stelle $= \frac{w}{\alpha}$; es kommt also zu der Druckhöhe $w^2/2g$ noch die Verlusthöhe $\frac{w^2}{2g}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2$ hinzu. Die Summe beider Höhen ist gleich der Wasserhöhe im Gefäß zu setzen. Löst man nach der Geschwindigkeit auf, so ergibt sich eine Geschwindigkeitsziffer

Fig. 113.



Scharfkantiges Ansatzrohr.

$$\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - 2\alpha + 2\alpha^2}}.$$

Für $\alpha = 0{,}61$ ergibt sich $\varphi = 0{,}84$.

Fig. 114.

Scharfkantige Verengung.

c) Plötzliche Verengungen in einem Rohr, vgl. Fig. 114, bringen neben dem Bernoullischen Druckabfall einen Druckverlust analog dem hier behandelten, da auch hier eine Kontraktion eintritt. Die Kontraktionsziffer kann nach Weisbach zu $\alpha = 0{,}63 + 0{,}37 \left(\frac{F_1}{F_0}\right)^3$ angenommen werden.

Folgt auf die Verengung wieder eine plötzliche Erweiterung (vgl. Fig. 115), so ist entsprechend der Druckverlust

$$p_0 - p_2 = \frac{\varrho w_0^2}{2}\left(\frac{F_0}{\alpha F_1} - 1\right)^2.$$

Der Druckunterschied $p_0 - p_1$, der größer ist, wird vielfach zur Mengenmessung verwendet; er ist nach Bernoulli (wenn von kleinen Verlusten ab-

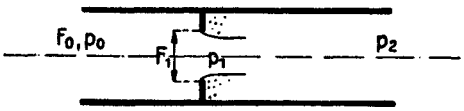
gesehen wird, siehe bei Fig. 116)

$$p_0 - p_1 = \frac{\varrho\, w_0^2}{2}\left[\left(\frac{F_0}{\alpha F_1}\right)^2 - 1\right].$$

Ist $p_0 - p_1$ durch Druckmessung vermittelst je einer Anbohrung vor und hinter der Verengung („Drosselscheibe", „Blende") gemessen und α durch anderweitige Versuche bekannt, so folgt aus der Gleichung w_0 und damit die sekundliche Menge $= F_0 w_0$. Nach E. Buckingham[1]) kann zwischen $F_1/F_0 = 0{,}05$ und $F_1/F_0 = 0{,}55$ für α die Formel verwendet werden

$$\alpha = 0{,}598 + 0{,}395\left(\frac{F_1}{F_0}\right)^2.$$

Fig. 115.

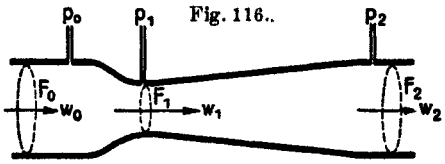


Drosselscheibe.

Knierohre und kurze Krümmer können auf ganz ähnlicher Grundlage beurteilt werden wie die Röhre Fig. 115; auch hier ergeben sich bei den raschen Umlenkungen Kontraktionserscheinungen mit darauffolgendem Wiederausgleich der Geschwindigkeiten. Der Druckhöhenverlust wird $= \zeta \frac{w^2}{2g}$ geschrieben, wo ζ eine empirisch für jeden Einzelfall zu ermittelnde Widerstandsziffer ist. Über die Zahlwerte für typische Fälle geben die Ingenieurhandbücher Auskunft, vgl. z. B. Hütte, Bd. I, 26. Aufl., S. 378 u. f., ferner Mitteilungen des Hydraulischen Instituts der Technischen Hochschule München, Heft 2, 1928.

d) Allmähliche Verengungen bringen sehr kleine Strömungsverluste mit sich, wesentlich größere dagegen die allmählichen Erweiterungen, da hier Neigung der Strömung zur Ablösung von der Wand besteht. Immerhin sind die Druckwiedergewinne wesentlich höher als bei plötzlicher Erweiterung. Der Druckhöhenverlust $p_0 - p_2$ in Fig. 116 kann $= \zeta \frac{\varrho}{2}(w_1^2 - w_2^2)$ geschrieben werden, mit $\zeta = 0{,}15$ bis $0{,}2$. Ein Rohr nach Art von Fig. 116 wird Venturirohr genannt und wird ebenfalls zur Mengenmessung verwandt. Beobachtet werden p_0 und p_1, die Rechnung ist ganz entsprechend der früheren, nur daß hier α bei guter Formgebung $= 1$ gesetzt werden kann. Die Geschwindigkeitsziffer ist dagegen nicht genau $= 1$, und auch die Ungleichförmigkeit in der Zuströmung ist von Einfluß, so daß sich eine empirische Eichung empfiehlt, wenn höhere Genauigkeitsansprüche gestellt werden. Für die Drosselscheiben nach Fig. 115 gilt das gleiche.

Fig. 116.



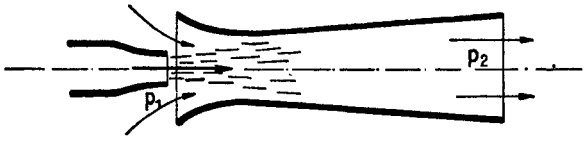
Venturi-Düse.

Die Drucksteigerung $p_2 - p_1$ in einem plötzlich oder allmählich erweiterten Rohr wird in den Strahlapparaten nach Fig. 117 dazu verwendet, andere Flüssigkeiten anzusaugen und fortzuschaffen. Unter den Anwendungen sind

[1]) Persönliche Mitteilung.

zu nennen die Wasserstrahlluftpumpe, mit der man beträchtliche Luftleere herstellen kann (damit $p_2 - p_1$ gleich einer Atmosphäre wird, muß w_1 etwa 20 m/sec sein), ferner der Bunsenbrenner, bei dem der aus einer Düse austretende Gasstrahl Luft ansaugt und sich mit ihr mischt. Eine andere Anwendung ist das Lokomotivblasrohr, bei dem der aus dem Zylinder strömende

Fig. 117

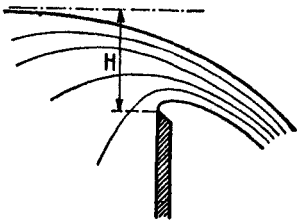


Strahlpumpe.

Dampf die Verbrennungsgase aus der Rauchkammer absaugt und so die Verbrennung unterhält. Eine sehr merkwürdige Anwendungsform ist der Injektor, der mittels Dampf aus einem Dampfkessel kaltes Wasser aus einem Brunnen oder dgl. ansaugt und es in denselben Kessel pumpt (die Wirkung ist durch die Dichtevermehrung zu erklären, die der Dampf bei seiner Kondensation auf dem Wasser erfährt; ein großes Volumen wird dem Kessel entnommen, ein viel kleineres zurückbefördert). Auf die Theorie des Strahlapparats, die sich auf dieselben Beziehungen aufbaut wie die der vorgenannten Apparate, kann hier nicht näher eingegangen werden.

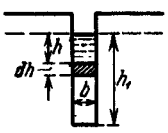
e) Für offene Wasserläufe ist der „Überfall über ein Wehr" (vgl. Fig. 118) ein sehr brauchbares Mittel zur Mengenmessung. Eine Abschätzung der überfallenden Wassermenge, soweit es sich um den Bau der Formel handelt, ist bereits durch die Betrachtungen in § 16 des vorigen Abschnitts gewonnen worden. Man kann diese Formel aber auch aus einer ganz anderen, scheinbar nur entfernt verwandten Aufgabe gewinnen: Ausfluß aus einem schmalen senkrechten Schlitz in der Wand eines offenen Gewässers (vgl. Fig. 119). Hier kann ohne Bedenken der Ausflußquerschnitt in Elemente $b\,dh$ zerlegt werden; durch ein solches Element fließt eine Menge $\alpha\, b\, dh \sqrt{2gh}$. Die Integration von 0 bis h_1 liefert dann die Gesamtmenge

Fig. 118.



Überfall über ein scharfkantiges Wehr.

Fig. 119.



$$Q = \frac{2}{3}\,\alpha\, b\, h_1^{3/2} \sqrt{2g},$$

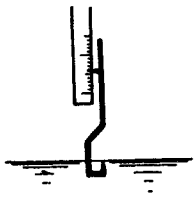
was mit Formel (1) in § 16 übereinstimmt, wenn $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ gesetzt wird (für h_1 steht dort s). Die formale Übereinstimmung hängt damit zusammen, daß die Abmessungen des Überfalls in die Formel aus Dimensionsgründen gar nicht anders eingehen können. Der Versuch zeigt nun aber, daß selbst die Zahlwerte für den senkrechten Überfall nach Fig. 118 und den Spalt

nach Fig. 119 fast genau übereinstimmen. Für Überfälle zwischen parallelen Wänden (Überfälle ohne Seitenkontraktion) mit scharfkantiger senkrechter Überfallwand und mit Luftzufuhr unter dem Strahl liegen besonders sorgfältige Messungen vor. Nach Rehbock[1]) ist hierfür

$$\alpha = 0{,}605 + \frac{h'}{3\,(h_1 - h')} + \frac{0{,}08\,h_1}{a},$$

wobei h' eine vermutlich mit Kapillarwirkungen zusammenhängende kleine Höhe von 2,85 mm und a den Abstand der Überfallkante von dem Boden des Zulaufgerinnes bedeutet. h_1 ist die Überfallhöhe, d. h. die Höhe des Oberwasserspiegels über der Wehrkante, gemessen in einiger Entfernung vom Wehr; die Messung gelingt z. B. mit einem Gerät nach Fig. 120 mit guter Genauigkeit, da man das Austauchen der Metallspitze aus dem Wasser sehr scharf feststellen kann (besser als das Eintauchen einer nach unten gerichteten Spitze).

Fig. 120.



Vorrichtung zur Wasserspiegelmessung.

Bei Wehren mit flacher Wehrkrone wird durch die Versuche der theoretische Wert von $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577$ (siehe oben) gut bestätigt.

§ 11. Widerstand von Körpern in Flüssigkeit. a) Allgemeine Vorbemerkungen über die Widerstandsformel. Für den Widerstand, den eine Flüssigkeit der Bewegung eines in ihr befindlichen Körpers vermöge ihrer Trägheit entgegensetzt, hat schon Newton den Schluß gezogen, daß dieser Widerstand proportional der Flächenausdehnung des Körpers quer zur Bewegungsrichtung (F), ferner proportional der Dichte der Flüssigkeit (ϱ) und dem Quadrat der Geschwindigkeit (v) sein muß. Dieses Ergebnis läßt sich durch eine sehr einfache Betrachtung nachprüfen: Der Körper muß sekundlich eine Flüssigkeitsmasse $M = \varrho F . v$ aus seiner Bahn räumen und erteilt dabei jedem Massenelement eine Geschwindigkeit, die seiner Geschwindigkeit proportional gesetzt werden kann. Der Widerstand ist gleich der sekundlich erteilten Bewegungsgröße, also proportional mit

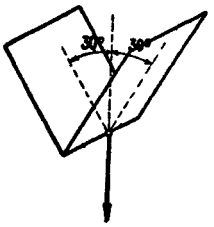
$$M v = \varrho F v^2.$$

Die näheren Einzelheiten der Newtonschen Theorie, die den Flüssigkeitswiderstand nach den Gesetzen des elastischen Stoßes behandelt (Newton dachte sich das Medium als aus frei schwebenden ruhenden Massenteilchen bestehend, die von dem bewegten Körper in regelmäßiger Weise reflektiert werden), haben sich allerdings nicht halten lassen; an Stelle der Newtonschen Auffassung ist die hydrodynamische Auffassung getreten, nach der der Widerstand aus den bei der Umströmung des Körpers entstehenden Druckdifferenzen und Reibungsspannungen besteht. Ein prinzipieller Unterschied zwischen den Ergebnissen der alten und der neuen Auffassung ist der,

[1]) Vgl. etwa die Rehbocksche Abhandlung in De Thierry und Matschoss, Die Wasserkraftlaboratorien Europas, S. 104. Berlin 1926.

daß bei der alten nur die Gestaltung der nach vorn gekehrten Flächen des Körpers in Betracht gezogen wird, während man jetzt weiß, daß die eigentlichen Widerstandsvorgänge hinter dem Körper zu suchen sind, und daß daher die Ausbildung der hinteren Teile von größter Bedeutung sein kann. Auch ist hervorzuheben, daß die alte Theorie den Widerstand irgendeines Körpers durch einfache Summierung über alle Flächenelemente (unter Verwendung eines für ebene Platten gewonnenen Gesetzes) erhalten wollte, während nach der hydrodynamischen Anschauung sofort einzusehen ist, daß dies unzulässig ist. Das folgende Beispiel mag dies erläutern: die Strömung um ein Diëder, vgl. Fig. 121, muß einen ganz anderen Verlauf nehmen, als die um zwei entfernt stehende, gleich geneigte Platten, da im letzteren Falle die Flüssigkeit zwischen den beiden Platten durchströmen kann, im ersteren aber nicht. Nach Versuchen von Eiffel[1]) ist denn auch der Widerstand eines aus zwei quadratischen Platten mit Winkeln von 30° gegen die Bewegungsrichtung bestehenden Diëders etwa 60 Proz. des der einzeln stehenden Platten, während nach der alten Theorie beide Objekte den gleichen Widerstand haben müßten. Ein anderes sehr auffälliges Beispiel ist das folgende: Eine Kreisscheibe, ein Kreiszylinder von einer Länge gleich dem Durchmesser und einer von einer Länge gleich dem Anderthalbfachen des Durchmessers (alle senkrecht zur Kreisfläche bewegt) haben nach Eiffel[2]) (Fallversuche am Eiffelturm) eine Widerstandsziffer 1,12, 1,10, 0,80. Die Zahlen sind in der Göttinger Modellversuchsanstalt (künstlicher Luftstrom) nachgeprüft und bestätigt worden. Daß der längere Zylinder weniger Widerstand hat als der kürzere, kann nur so erklärt werden, daß in diesem Falle das Wirbelsystem durch Anlegen der Strömung an die Mantelfläche des Zylinders kleiner ausfällt und dadurch die Saugwirkung auf die Hinterfläche geringer wird als in den beiden anderen Fällen.

Fig. 121.



Diëder.

Über die allgemeine Form des nach der Hydrodynamik zu erwartenden Widerstandsgesetzes für eine bestimmte Art von Körpern läßt sich zunächst aussagen, daß dieser Widerstand durch Druckdifferenzen und Reibungsspannungen zustande kommt. Die ersteren überwiegen im allgemeinen; sie können proportional gesetzt werden dem zur Geschwindigkeit v gehörigen Staudruck $\frac{\varrho v^2}{2}$ (vgl. § 4, c des vorigen Abschnitts), also ergibt sich der Widerstand als Produkt einer solchen Druckdifferenz mit der dargebotenen Fläche, ist also proportional mit $F \cdot \frac{\varrho v^2}{2}$. Der Staudruck, der durch das Staugerät (§ 7 des vorigen Abschnitts) gemessen werden kann, wird in der Aerodynamik vielfach mit q bezeichnet; neuerdings scheint sich durch Beschluß einer Kommission

[1]) Recherches expérimentales sur la résistance de l'air exécutées à la tour Eiffel, S. 78 u. f. Paris 1907.
[2]) l. c. S. 54.

des Vereins Deutscher Ingenieure eine bei den Maschineningenieuren schon länger übliche Bezeichnung, p_d („dynamischer Druck"), durchzusetzen, weshalb sie auch hier verwendet werden soll. Da die Geschwindigkeit v meist durch Messung des Staudrucks ermittelt wird, ist dieser und nicht die Geschwindigkeit bei den Versuchen die ursprüngliche Größe; da es im übrigen sehr anschaulich ist, einen Widerstand als Wirkung eines Druckes auf eine Fläche darzustellen:

$$W = \text{Zahl} \,.\, F \,.\, p_d,$$

hat es sich nicht nur in Deutschland und Österreich, sondern neuerdings auch in Amerika und Italien eingebürgert, statt

$$W = \text{Zahl} \,.\, F \varrho v^2$$

zu schreiben

$$W = \text{Zahl} \,.\, F \frac{\varrho v^2}{2}.$$

Die neuen Zahlen sind offenbar das Doppelte der alten; sie sollen, dem Brauch der Aerodynamiker in den genannten Ländern entsprechend mit c, gegebenenfalls mit einem Index für Komponenten bezeichnet werden.

Über das Verhalten dieser „Widerstandszahl" läßt sich in Anwendung der Betrachtungen über mechanische Ähnlichkeit folgendes aussagen. Solange nur geometrisch und mechanisch ähnliche Fälle verglichen werden, bei denen also die Reynoldssche Zahl $\mathfrak{R} = \frac{vl}{\nu}$ (l ist irgendeine Vergleichslänge) denselben Wert hat, werden die Druckdifferenzen und Reibungsspannungen in demselben Verhältnis zusammenwirken, die Reibungsspannungen ändern sich in den zu vergleichenden Fällen proportional zu den Druckdifferenzen, die ihrerseits wieder dem Staudruck proportional gesetzt werden dürfen, so daß die obige Form des Widerstandsgesetzes, also

$$W = c\,F p_d = c\,F \frac{\varrho v^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

hier ein genaues Gesetz darstellt. Die Widerstandszahl c ist dabei natürlich nur so lange unveränderlich, wie die Reynoldssche Zahl unveränderlich ist; sie ändert sich im allgemeinen mit dieser, kann also als Funktion von $\mathfrak{R}$ geschrieben werden:

$$c = f(\mathfrak{R}).$$

Ist in einem bestimmten Falle eine merkliche Wirkung der Reibung nicht zu erwarten, so ergibt sich dem Vorstehenden gemäß eine merklich genaue Proportionalität des Widerstandes mit $\frac{F\varrho v^2}{2}$ für alle in Betracht kommenden Verhältnisse, d. h. die Funktion von $\mathfrak{R}$ wird eine Konstante. Dies ist bei Platten, die senkrecht zu ihrer Ebene bewegt werden, und bei ähnlichen scharfkantigen Objekten ziemlich genau der Fall. Für kreisförmige Platten ist der Faktor c etwa gleich 1,12.

Spielt dagegen die Reibungswirkung die Hauptrolle, wie z. B. bei Platten, die in ihrer Ebene bewegt werden, so sind starke Abweichungen von der Newtonschen Proportionalität zu erwarten, vgl. § 13. Für die aller-

kleinsten Geschwindigkeiten ($\mathfrak{R}$ klein gegen 1) hat man alleinige Wirkung der Zähigkeit; hier findet das schon in § 3 erwähnte Stokessche Gesetz (Widerstand proportional v) Anwendung. Man kann auch dieses in die Form der Gl. (1) bringen, indem man ein zu $1/\mathfrak{R}$ proportionales c einführt.

b) Zerlegung des Widerstandes. Der Widerstand eines in der Flüssigkeit bewegten Körpers läßt sich immer in zwei Teile zerlegen, den Druckwiderstand und den Reibungswiderstand.

Man kann nämlich auf jedem Flächenelement die von der Flüssigkeit auf den Körper übertragene Kraftwirkung in eine Normalkomponente und eine Tangentialkomponente, das ist in eine Druckkraft und eine Reibungskraft, zerlegen. Die Resultante aller Druckkräfte ist der Druckwiderstand, die Resultante aller Reibungskräfte der Reibungswiderstand. (Bei rauhen Oberflächen wird man dabei aus praktischen Rücksichten die Zerlegung nach einer dem mittleren Verlauf der Fläche angepaßten glatten Idealfläche vornehmen. Der nach der strengen Definition auf die einzelnen Rauhigkeiten entfallende Druckwiderstand wird somit zum Reibungswiderstand geschlagen.) Die Trennung des Gesamtwiderstandes in diese beiden Teile läßt sich im Versuch so durchführen, daß man die Druckverteilung über die Körperoberfläche durch Anbohrungen beobachtet und daraus durch Rechnung den Druckwiderstand als die Resultierende aus den Druckkräften auf die einzelnen Teile der Oberfläche ermittelt. Ist der Gesamtwiderstand durch eine Kraftmessung beobachtet, so ergibt die Differenz den Reibungswiderstand. Über eine unmittelbare Messung des Reibungswiderstandes vgl. § 20 c. Von der Vorstellung ausgehend, daß zwar der Druckwiderstand stark von der Form des Körpers abhänge, daß aber der Reibungswiderstand im wesentlichen nur von der Größe der Oberfläche und nicht von der Form des Körpers abhängig sei, hat man die Trennung des Widerstandes in einen Formwiderstand und einen Oberflächenwiderstand vorgeschlagen. Neuere Versuche weisen indes darauf hin, daß auch der Reibungswiderstand recht merklich von der Formgebung abhängt, so daß sich diese Art der Trennung nicht streng aufrechterhalten läßt.

Bei Körpern, die sich an der freien Oberfläche der Flüssigkeit bewegen, kommt noch ein weiterer Widerstand, der Wellenwiderstand hinzu, der durch das von dem Körper bei der Bewegung erzeugte Wellensystem verursacht wird. Da die Wellenbewegung unter dem Einfluß der Erdschwere vor sich geht (von den Kapillarkräften sei abgesehen), so ist hier ein anderes mechanisches Ähnlichkeitsgesetz maßgebend wie bei den Reibungsvorgängen. Aus Geschwindigkeit (v), Länge (l) und Erdschwere (g) läßt sich eine dimensionslose Zahl $\frac{v^2}{gl}$ bilden. Das zu erwartende Wellensystem wird bei zwei verschieden großen Ausführungen einer Schiffsform (z. B. Modell und Schiff) geometrisch ähnlich ausfallen, wenn diese Zahl denselben Wert annimmt, wenn sich also die Geschwindigkeiten verhalten wie die Wurzeln aus den Längen (Froudesches Gesetz).

Der Wellenwiderstand ist mit kleinen Änderungen der Schiffsform und der Geschwindigkeit sehr stark veränderlich; bei einer Verlängerung des

Schiffskörpers kann er sowohl wachsen wie abnehmen, je nachdem die Heckwelle, die mit dem vom Bug kommenden Wellensystem interferiert, dieses verstärkt oder abschwächt. Der Widerstand wird groß, wenn das Heck in einem Wellental des Bugwellensystems liegt, und klein, wenn es mit einem Berg des Bugsystems zusammenfällt[1]). — In seichtem Wasser kann sich das Wellensystem ganz erheblich modifizieren. Der Widerstand wächst ganz erheblich an, wenn das Schiff gerade mit der Geschwindigkeit der Grundwelle (§ 15 des vorigen Abschnitts) fährt. Bei Geschwindigkeiten oberhalb dieser Geschwindigkeit wird der Wellenwiderstand wieder kleiner.

Der Wellenwiderstand macht sich am Schiff selbst als ein Teil des Druckwiderstandes geltend. Die vom Schiff gegen den Wellenwiderstand geleistete Arbeit wird bei der Ausbreitung des Wellensystems hinter dem Schiff als kinetische Energie der Wellenbewegung fortgetragen. Der andere Teil des Druckwiderstandes, der dem gewöhnlichen Druckwiderstand eines allseitig von Flüssigkeit umgebenen Körpers entspricht, findet sich zusammen mit dem Reibungswiderstand in dem Impuls der Kielwasserwirbel wieder; dieser Betrag heißt deshalb auch Kielwasserwiderstand. Die ihm entsprechende Widerstandsarbeit findet sich in der kinetischen Energie der Wirbel wieder, die später allmählich in Wärme verwandelt wird. Gleiches gilt vom Reibungswiderstand.

Da der Reibungswiderstand und der Kielwasserwiderstand, abgesehen von den Störungen durch die Wellenbildung, die Reynoldssche Ähnlichkeit befolgt, der Wellenwiderstand aber die Froudesche Ähnlichkeit, sind streng übertragbare Modellversuche unmöglich. Da bei den Schiffen der Wellenwiderstand das Hauptinteresse besitzt, hält man sich bei den Versuchen in den Schiffsmodell-Schleppanstalten an die Froudesche Ähnlichkeit und berücksichtigt die Veränderlichkeit der anderen Widerstandsanteile mit dem Größenmaßstab des Objektes nach Erfahrungsregeln.

Es gibt auch noch andere Fälle, in denen durch den Widerstandsvorgang kinetische Energie in solcher Form erzeugt wird, daß sie lange Zeit hindurch erhalten bleibt. Ein Beispiel dafür bieten die Flugzeugtragflügel, bei denen gemäß den Darlegungen von § 7 des vorigen Abschnitts von dem Flügel eine kräftige, sehr regelmäßige Wirbelbewegung erzeugt wird, vgl. auch § 5 des gegenwärtigen Abschnitts. Der Druckwiderstand kann auch hier in zwei Teile zerlegt werden, von denen der eine die Arbeit zur Erzeugung der in der ganzen Flüssigkeit verteilten kinetischen Energie der Wirbelbewegung leistet und der andere mit dem Reibungswiderstand zusammen die „Kielwasserströmung", auch „Nachlauf" genannt, erzeugt. Dieser Kielwasserwiderstand läßt sich durch Anwendung des Impulssatzes auf den Nachlauf ermitteln, vgl. § 20, c.

c) Bewegter Körper und bewegte Flüssigkeit. Eine wichtige Frage ist noch die, wie sich der Widerstand eines Körpers in ruhender Flüssigkeit zu der Kraft verhält, die eine strömende Flüssigkeit auf einen ruhenden Körper ausübt. Wenn die strömende Flüssigkeit sich in allen Teilen vollkommen gleichförmig bewegt, so kann nach den Gesetzen der allgemeinen

---

[1]) Über die theoretische Berechnung des Wellenwiderstandes vgl. etwa die Abhandlung von G. Weinblum, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 10, 453, 1930.

Mechanik zwischen beiden Fällen kein Unterschied bestehen, da die Hinzunahme einer gemeinsamen gleichförmigen Bewegung (entgegengesetzt gleich der Geschwindigkeit des Körpers, so daß dieser in Ruhe versetzt wird) an dem Ablauf von mechanischen Vorgängen nichts ändert. Einen Unterschied aber macht es, ob die Flüssigkeit bei ihrer Bewegung gegen den Körper vollkommen gleichförmig, oder ob sie turbulent strömt. Die Widerstände sind in der Regel im zweiten Falle größer, doch kommen Ausnahmen vor (Kugel im kritischen Gebiet, vgl. § 13). Da natürliche Flüssigkeitsströmungen (z. B. Wasser- oder Luftströmung in Kanälen usw.) bei großen Abmessungen regelmäßig turbulent sind, wird man solche Unterschiede immer beobachten. Will man zum Zwecke von Widerstandsversuchen die Verhältnisse eines in ruhender Flüssigkeit bewegten Körpers mit einem in strömender Flüssigkeit ruhenden Modell nachahmen, so wird man durch geeignete Einrichtungen für einen möglichst gleichförmigen Flüssigkeitsstrom zu sorgen haben. vgl. § 20, c.

§ 12. Der Flüssigkeitswiderstand in der hydrodynamischen Theorie. Die gewöhnliche Potentialströmung der reibungslosen Flüssigkeit ergibt für einen gleichförmig bewegten Körper in einer allseitig unendlich ausgedehnten Flüssigkeit niemals einen Widerstand in der Bewegungsrichtung und auch keinen Auftrieb senkrecht dazu, gleichgültig, welche Gestalt der Körper auch habe. Dieses zuerst vielleicht verwunderliche Resultat läßt sich gut einsehen, wenn man den Impulssatz für eine den Körper in einiger Entfernung umschließende Kontrollfläche anwendet. Nähere Untersuchung zeigt, daß die durch den Körper verursachten Störungsgeschwindigkeiten nach allen Seiten sehr rasch, mindestens mit der umgekehrten dritten Potenz der Entfernung abklingen, die Druckunterschiede desgleichen; läßt man die Kontrollfläche ins Unendliche wachsen, wobei ihr Flächeninhalt proportional dem Quadrat des Halbmessers wächst, so gehen also die Beiträge zum Impuls usw. gegen Null. Da der Impulssatz für jede Kontrollfläche dasselbe Resultat ergeben muß, kann es also nur Null sein.

Bildet man die Impulsmomente, so kommt eine Potenz der Entfernung als Hebelarm dazu; daraus ist ersichtlich, daß die Impulsmomente nicht zu verschwinden brauchen, und in der Tat erhält man für schräg angeströmte Körper Drehmomente (und zwar solche, die die Körper quer zur Strömung stellen wollen, wie sich aus der Diskussion der Druckverteilung unschwer ergibt).

Mit der obigen Betrachtung steht nicht im Widerspruch, daß Körper, die sich in der Nähe einer Wand oder eines anderen Körpers bewegen, Kräfte durch die Strömung erfahren (hier ist es nicht möglich, die Kontrollfläche ins Unendliche zu rücken). Kugeln werden z. B., wenn sie sich parallel zu einer Wand bewegen, mit Kräften proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit und umgekehrt proportional der vierten Potenz der Entfernung von der Wand angezogen.

Es ist nicht ohne Interesse, daß gemäß näherer Untersuchung bei einem sehr länglichen Körper entsprechend Fig. 52 nicht nur der Widerstand im ganzen, sondern auch die Druckresultierende des Vorder- bzw. Hinterteils für sich allein verschwindet.

Bei beschleunigten Körpern findet man auch in der reibungslosen Flüssigkeit Kräfte zwischen der Flüssigkeit und dem Körper, die aber nur von der Art sind, als ob die Masse des Körpers durch die der von ihm mitgenommenen

Flüssigkeit vergrößert wäre. Man spricht hier von einer „scheinbaren Masse" der mitbewegten Flüssigkeit. Bei einer Kugel ist die scheinbare Masse halb so groß wie die von der Kugel verdrängte Flüssigkeitsmasse. Da beim Bewegungsbeginn aus der Ruhe heraus immer zunächst angenähert eine Potentialbewegung entsteht, hat dieses Resultat auch für die wirklichen Flüssigkeiten Bedeutung.

Daß der Widerstand bei der gleichförmigen Bewegung eines Körpers in reibungsloser Flüssigkeit gleich Null ist, läßt sich auch aus einer Energiebetrachtung schließen. Beim Fehlen von Reibung könnte die für die Überwindung des Widerstandes aufzuwendende Arbeit nur in Form von kinetischer Energie in der Flüssigkeit aufgespeichert werden. Wenn sich aber, wie bei den Potentialbewegungen, die Flüssigkeit hinter dem Körper ebenso schließt, wie sie sich vor ihm geöffnet hat, und also keine Störung in ihr zurückbleibt, so ist auch kein Widerstand möglich. Ein Fall, in dem auch in der reibungslosen Flüssigkeit ohne freie Oberfläche kinetische Energie in der Flüssigkeit zurückbleibt, und daher auch ein Widerstand auftritt, ist bereits in § 11, b kurz erwähnt worden und wird bei der Behandlung der Flugzeugtragflügel in § 15 und 16 ausführlich behandelt werden.

Ein anderer Fall betrifft das an der freien Wasseroberfläche fahrende Schiff, bei dem, wie schon erwähnt, durch das sich bildende Wellensystem, dessen Ausdehnung mit der Länge der Fahrt dauernd zunimmt, Energie zerstreut wird. Der Energiezerstreuung entspricht hier der Wellenwiderstand.

Das Auftreten eines Auftriebs ohne Hinterlassung von kinetischer Energie in der Flüssigkeit wird durch die Energiebetrachtung nicht ausgeschlossen, da der Auftrieb senkrecht zum Wege des Körpers in der Flüssigkeit wirkt und daher keine Arbeitsleistung erfordert. Das Auftreten eines solchen Auftriebs (oder Quertriebs) ist bereits in § 10 des vorigen Abschnitts behandelt worden.

Die mit der scheinbaren Masse zusammenhängenden Flüssigkeitskräfte bei der Beschleunigung eines Körpers lassen sich vom Standpunkt des Energiesatzes gut verstehen, wenn man überlegt, daß die Arbeiten dieser Kräfte erforderlich sind, um die in der Flüssigkeitsbewegung steckende kinetische Energie zu erzeugen oder — bei der Verzögerung — wieder aus der Flüssigkeit fortzuschaffen.

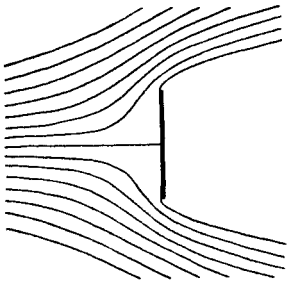
Daß in Wirklichkeit die meisten Körper einen über den unvermeidlichen Reibungswiderstand (vgl. § 3 und 5) weit hinausgehenden Widerstand aufweisen, liegt daran, daß sich an ihnen in der in § 6 beschriebenen Art Trennungsschichten und Wirbel ausbilden. Diese sind als eigentlicher Sitz des Widerstandes anzusehen. Sie verhindern, daß sich die Strömung hinten ebenso schließt, wie sie sich vorn geöffnet hatte, und veranlassen so eine Unsymmetrie der Druckverteilung (vorn voller Staudruck, hinten nicht); sie sorgen auch dafür, daß dauernd kinetische Energie vom Körper weggeführt wird.

Von den verschiedenen Versuchen, das Widerstandsproblem im Rahmen der Theorie der idealen Flüssigkeit zu behandeln, seien hier zwei als besonders

typisch behandelt, die Kirchhoffsche Strömung um die Platte mit Trennungsfläche und die Kármánsche Wirbelstraße.

Kirchhoff[1]) fand ein sehr schönes Beispiel der Anwendung der Helmholtzschen Diskontinuitätsflächen (vgl. § 7 des vorigen Abschnitts) in der Umströmung einer ebenen Platte gemäß Fig. 122. Die Strömung teilt sich vor der Platte und fließt von den Kanten seitlich nach hinten zu ab, während der Raum hinter der Platte von einer ruhenden Flüssigkeit eingenommen wird. Da in diesem Raume, wenn von Schwere abgesehen wird, der Druck überall konstant ist, erhält man für die Trennungsfläche die Bedingung, daß auch auf ihr der Druck konstant und also wegen der Bernoullischen Gleichung auch die Geschwindigkeit konstant ist. Die Theorie liefert bei Einhaltung dieser Bedingung nur solche Lösungen, bei denen die Trennungsflächen ins Unendliche reichen und die Geschwindigkeit auf der Trennungsfläche gleich der Geschwindigkeit der ungestörten Flüssigkeit (d. h. gleich der Geschwindigkeit im Unendlichen) wird. Die Druckverteilung ist leicht zu übersehen vor der Platte in der Mitte Staudruck, nach den Rändern zu bis auf den Druck der ungestörten Flüssigkeit abfallend; auf der Hinterseite konstanter Druck gleich dem der ungestörten Flüssigkeit. Dies gibt im ganzen einen Widerstand proportional der Plattenfläche und proportional dem Staudruck, also konstantes $c\left(=\frac{2\pi}{4+\pi}=0{,}880\right)$.

Fig. 122.



Kirchhoffsche Strömung an einer ebenen Platte.

In Wirklichkeit sind, wie bereits mehrfach hervorgehoben, solche Trennungsflächen stark labil und zerfallen unter Bildung von großen und kleinen Wirbeln. Deshalb reicht das Totwasser in Wirklichkeit nicht ins Unendliche, und die Strömung schließt sich hinter der Platte bald wieder zusammen. Hiermit steht im Zusammenhang, daß der Druck hinter der Platte erheblich unter dem ungestörten Druck liegt, und infolge dieser „Saugwirkung" der Widerstand erheblich größer ist als nach der Kirchhoffschen Rechnung In dem Fall der „unendlich breiten Platte" (Platte zwischen parallelen seitlichen Wänden) findet man etwa $c = 2{,}0$; bei einer rechtwinkligen Platte von endlichem Seitenverhältnis strömt über die Schmalseiten Flüssigkeit in den Saugraum nach und setzt dadurch den Unterdruck erheblich herab. Man erhält bei einem Seitenverhältnis

	1 : 20	1 : 10	1 : 4	1 : 1
$c =$	1,45	1,29	1,19	1,10

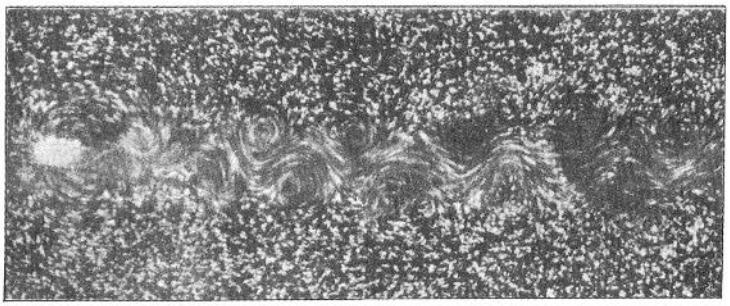
Die Kirchhoffsche Rechnung bezieht sich auf die unendlich lange Platte stimmt also mit dem zugehörigen Versuchsergebnis sehr schlecht; gute Übereinstimmung mit der Rechnung ergibt dagegen der Fall, daß bei der Strömung

[1]) Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen. Crelles Journ. 70 (1869).

von Wasser gegen eine Platte der Wasserstrom aufspaltet und der sich bildende Hohlraum mit Luft ausgefüllt wird (oder auch mit dem Dampf der Flüssigkeit, was bei sehr hohen Geschwindigkeiten vorkommt, sogenannte Kavitation). Da in diesem Falle die Trennungsfläche nicht oder nur unerheblich dem Zerfall ausgesetzt ist, sind die Bedingungen der Theorie gut erfüllt, und es dürfte daher auch der Widerstand dem gerechneten Wert entsprechen.

Bei solchen Strömungen um eine längliche Platte oder ein ähnliches Hindernis, bei denen eine Zerspaltung der Flüssigkeit von der oben erwähnten Art nicht auftritt, kommt unter gewissen Bedingungen eine regelmäßig pendelnde Bewegung hinter dem Hindernis zustande, bei der abwechselnd links und rechts ein kräftiger Wirbel erzeugt wird; die Wirbel ordnen sich dabei

Fig. 123.



Wirbelstraße hinter einer schmalen Platte (ruhende Kamera).

zu einer mehr oder minder regelmäßigen Reihe an, vgl. Fig. 123. Solche Beobachtungen veranlaßten Th. v. Kármán[1]), die Stabilität von parallelen geraden Wirbelfäden in derartigen Anordnungen zu untersuchen. Es ergab sich für die meisten Anordnungen eine mehr oder minder große Labilität; nur eine einzige gemäß Fig. 124, bei der das Verhältnis des Abstandes h der beiden Wirbelreihen zu der Teilung $l = 0{,}283$ war, ergab Stabilität[2]).

Die tatsächlich beobachteten Wirbelreihen zeigen sehr nahe das angegebene Verhältnis h/l, falls die Wirbel einigermaßen ausgeprägte Kerne haben. (Wenn durch die Reibung die Form der Wirbel verschwommen wird, dann rücken sie weiter auseinander, wie aus Fig. 123 zu erkennen ist.)

Der fortwährenden Neubildung von Wirbeln entspricht nach dem Energiesatz ein Widerstand, der im übrigen auch nach dem Impulssatz[3]) nach-

---

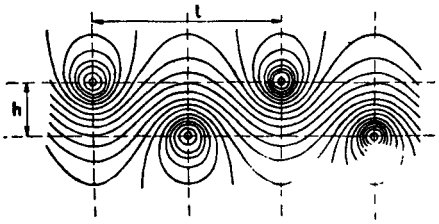
[1]) Kármán und Rubach, Physikal. Zeitschr. **13**, 49, 1912.

[2]) Genauer gesagt, ist die Anordnung gegen alle kleinen Abweichungen der Anfangslage der Wirbelfäden stabil mit Ausnahme einer besonderen Störung, bei der die um die Entfernung l voneinander abstehenden Wirbel immer gerade entgegengesetzte Verschiebungen aufweisen. Gegen diese Störung ist Indifferenz vorhanden, d. h. solche Störungen können mit der Zeit gleichförmig weiterwachsen.

[3]) Die Berechnung nach dem Energiesatz würde eine Angabe über den Durchmesser der Wirbelkerne erfordern, die nach dem Impulssatz kommt ohne diese Angabe aus, daher ist nur diese hier brauchbar.

gewiesen werden kann (zwischen den Wirbeln strömt die Flüssigkeit dem Körper nach). v. Kármán hat diese Rechnung durchgeführt. Es ist ein schöner Erfolg der Theorie, daß aus einer photographischen Ausmessung des Wirbelsystems und einer Beobachtung über die Geschwindigkeit der Wirbel im Verhältnis zur Körpergeschwindigkeit die Widerstandszahl des wirbelerzeugenden Körpers in guter Übereinstimmung mit der aus Versuchen bestimmten Widerstandszahl gefunden wurde. Der Zusammenhang der Abmessungen des Wirbelsystems mit den Abmessungen des Körpers hat sich allerdings bisher noch nicht theoretisch fassen lassen.

Fig. 124.



Stromlinien der Wirbelstraße nach Kármán.

§ 13. Experimentelle Feststellungen über den Flüssigkeitswiderstand.

Bei den Körpern mit einem größeren Flüssigkeitswiderstand ist, wie bereits erwähnt, die Ausbildung von Trennungsschichten maßgebend für das Zustandekommen des Widerstandes. Liegen, wie meist bei kantigen Körpern, die Ansatzstellen der Trennungsschichten, d. h. die Stellen, an denen sich die Strömung vom Körper ablöst, eindeutig fest, so findet man beim Versuch in ganz weitem Bereich konstante Widerstandszahlen. So ergaben z. B. Göttinger Versuche[1]) für senkrecht angeblasene ebene Kreisscheiben zwischen Reynoldsschen Zahlen $\mathfrak{R} = \frac{v\,r}{\nu}$ = rund 2000 bis 500000 keinen erkennbaren Gang in der Widerstandszahl, und es ist als sicher anzunehmen, daß auch noch bei weit größeren Reynoldsschen Zahlen keine Änderung in diesem Verhalten festgestellt werden würde; c ist dabei = 1,10 bis 1,12. Bei kleineren Reynoldsschen Zahlen zwischen 1500 und 40 ist der Verlauf der Widerstandszahl ziemlich unregelmäßig, was mit der Ausbildung von verschieden intensiven Pendelungen der Strömung zusammenhängt. c erreicht in diesem Gebiet bei etwa $\mathfrak{R} = 110$ einen Höchstwert von rund 1,8. Unterhalb $\mathfrak{R} = 40$ verläuft die Strömung ohne Pendelung; das Widerstandsgesetz geht allmählich zu dem Stokesschen Widerstandsgesetz über, das für kreisförmige Platten $c = \frac{10{,}2}{\mathfrak{R}}$ lautet und für Reynoldssche Zahlen unter 0,5 genau genug zutrifft. Nach Versuchen von Schmiedel[2]) ist bei

$\mathfrak{R} =$	40	10	2,5	1
$c =$	1,5	2,4	5,6	11,5.

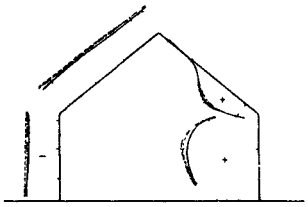
[1]) Vgl. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, 2. Lief., S. 28 u. f. München 1923.

[2]) J. Schmiedel, Experimentielle Untersuchungen über die Fallbewegung von Kugeln und Scheiben. Dissert. Leipzig 1928. Auch Physikal. Zeitschr. 29, 593, 1928.

Was für die Widerstandszahlen gilt, gilt auch für die Druckverteilungen. G. Eiffel[1]) hat die Druckverteilung an drei geometrisch ähnlichen Modellen eines Hauses gemessen, die eine Länge von 0,8, 5 und 40 cm besaßen. Die Ergebnisse stimmten dabei trotz der großen Verschiedenheit der Abmessungen sehr gut überein. Fig. 125 gibt diese Messungen wieder.

Wesentlich anders verhalten sich Körper von runden Formen, bei denen von vornherein keine bestimmte Stelle der Oberfläche für die Ablösung der Strömung bevorzugt in Betracht kommt. Die Lage der Ablösungsstelle wird hier durch die Vorgänge in der (meist dünnen) Reibungsschicht an der Oberfläche des Körpers bestimmt, vgl. § 6 und 7, und es sind deshalb oft scheinbar nebensächliche Umstände, wie z. B. eine leichte Rauhigkeit der Oberfläche oder kleinere oder größere Wirbligkeit der zuströmenden Flüssigkeit oder dergleichen, von recht merklichem Einfluß auf die Ablösungsstelle und damit auch auf die Größe und Lage des Wirbelgebildes und daher auch auf den Widerstand. Entscheidend ist aber, ob die Strömung in der Reibungsschicht bis zur Ablösungsstelle laminar verläuft oder vorher turbulent wird. Wie in § 7 bereits erwähnt wurde, rückt in dem letzteren Falle die Ablösungsstelle weit nach hinten, und der Widerstand verkleinert sich sehr erheblich. Diese Erscheinung wurde zuerst bei der Untersuchung des Widerstandes von Kugeln festgestellt[2]), dieser sinkt in der Gegend von $\frac{vr}{\nu} = 10^5$ von $c = 0{,}45$ bis 0,48 auf Werte herunter, die bei besonders reinen Versuchsbedingungen noch unter 0,10 liegen; bei größerer Reynoldsscher Zahl — etwa $= 10^6$ — geht c wieder auf etwa 0,18 herauf (bei rauher Oberfläche wesentlich höher). Das kritische Gebiet von Reynoldsschen Zahlen verschiebt sich durch Wirbligkeit des Versuchsluftstroms nach kleineren Werten. Daß tatsächlich das Turbulentwerden der Reibungsschicht an der Widerstandsverkleinerung schuld ist, geht aus folgendem Versuch deutlich hervor: Legt man um eine große Kugel etwas vor der Stelle, wo bei laminarer Strömung die Ablösung stattfinden würde, einen dünnen Drahtreif (z. B. von einer Drahtstärke gleich $^1/_{300}$ des Kugeldurchmessers) auf und macht dadurch die Reibungsschicht wirblig, so wird auch unter $\mathfrak{R} = 10^5$ der kleinere Widerstand beobachtet. Gleichzeitig erweist sich die Ablösungsstelle, die sonst etwa bei 80° vom vordersten Punkt liegen würde, auf etwa 110 bis 120° verschoben.

Fig. 125.



Winddruck auf ein Haus.

Der Widerstand von Kugeln ist von sehr kleinen Werten der Reynoldsschen Zahl bis zu $\mathfrak{R} = \frac{vr}{\nu} = 1{,}8 \cdot 10^6$ untersucht[3]). Für $\mathfrak{R}$ kleiner als

[1]) G. Eiffel, Nouvelles recherches sur la résistance de l'air et l'aviation, Paris 1914, S. 286 u. f.

[2]) G. Eiffel, Compt. rend. **155**, 1597, 1912; L. Prandtl, Göttinger Nachr., Math.-Physikal. Kl. 1914, S. 177, dort weitere Literatur; siehe auch C. Wieselsberger, Zeitschr. f. Flugtechn. u. Motorluftsch. **5**, 140, 1914.

[3]) Von $\mathfrak{R} = 0{,}1$ bis $4 \cdot 10^3$: Allen, Phil. Mag. (5) **50**, 323, von $\mathfrak{R} = 4 \cdot 10^3$ bis $4 \cdot 10^5$: Ergebnisse der Aerodyn. Vers. Anstalt, Göttingen, 2. Lief., S. 28; von 10^5

0,2 gilt genügend genau das Stokessche Gesetz, das in unserer Ausdrucksart

$$c = 12/\mathfrak{R}$$

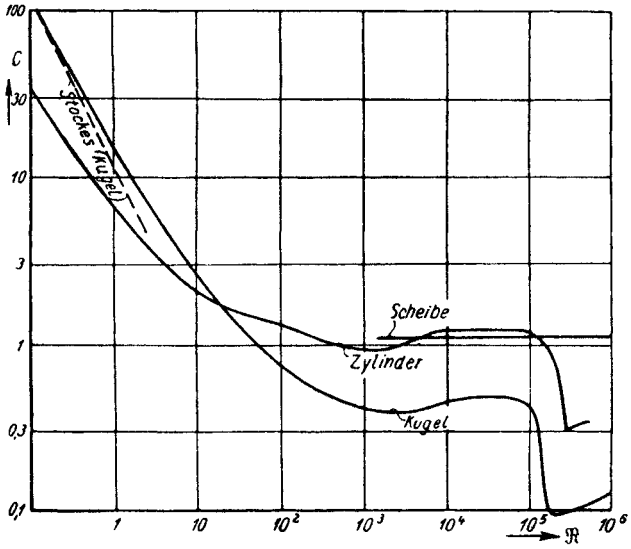
lautet. Für

$\frac{vr}{\nu} =$	0,1	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
ist c etwa =	120	14	2,6	0,75	0,42	0,45	0,44	0,18

Ganz ähnlich verhalten sich Kreiszylinder. Bei sehr langen Zylindern ($l \geqq 100$ Durchmesser) oder bei Zylindern, die an beiden Enden von parallelen Wänden begrenzt sind, gilt etwa[1]) für

$\frac{vr}{\nu} =$	0,1	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$c =$	34	6,5	2,0	1,30	0,92	1,20	1,15	0,35

Fig. 126.



Widerstandszahl von Kugel, Zylinder und Scheibe, abhängig von der Reynoldsschen Zahl.

Der Übergang von den großen Widerstandswerten zu den kleinen liegt zwischen $\frac{vr}{\nu} = 0{,}9 \cdot 10^5$ und $2{,}5 \cdot 10^5$. Der Widerstand fällt von $c = 1{,}2$ auf $c = 0{,}3$. Bei kleinem $\mathfrak{R}$ gilt hier statt der Stokesschen Formel eine verwickeltere von Lamb[2]):

$$c = \frac{4\pi}{\mathfrak{R}\,(1{,}309 - \ln \mathfrak{R})}.$$

Der Verlauf der c-Werte für Kreisplatte, Kugel und Zylinder ist in Fig. 126 wiedergegeben.

---

bis $1{,}8 \cdot 10^6$: Bacon und Reid, 9. Report des National Advisory Comm. f. Aeronautics 1923, Washington 1924.

[1]) Göttinger Ergebnisse, 2. Lief., S. 23 und Relf, Technical Report of the Advisory Comm. f. Aeronautics 1913/14, London 1914, S. 47.

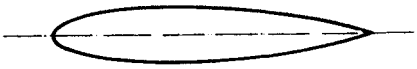
[2]) Phil. Mag. (5) 21, 120, 1911

Bei endlich langen Zylindern erhält man wieder wesentlich kleinere Widerstände als bei den unendlich langen; die Ursache ist, wie bei den endlich langen Platten, darin zu suchen, daß das Wirbelgebiet hinter dem Zylinder über die Zylinderenden belüftet wird und sich dort so ein kleinerer Unterdruck einstellt als bei fehlender Belüftung. Nach Göttinger Messungen ist für $l/r = 10$ bei

$\frac{vr}{\nu} =$	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$c =$	0,85[1]	0,68	0,74	0,75	0,35[1]

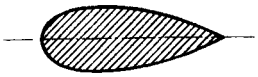
In der Technik der Luftfahrzeuge hat die Aufgabe eine besondere Bedeutung erlangt, Körper von kleinstem Luftwiderstand zu finden. Wir wissen, daß in der reibungslosen Flüssigkeit die Strömung, bei der sich die Flüssigkeit hinter dem Körper ebenso wieder schließt, wie sie sich vor ihm geöffnet hat, den Widerstand Null ergibt, gleichgültig, welche Form der Körper hat, da eben keine Störung in der Flüssigkeit zurückbleibt. Die genannte Aufgabe kann deshalb auch so formuliert werden: Wie muß ein Körper gestaltet werden, damit in der wirklichen Flüssigkeit jede Ablösung der Strömung an ihm unterbleibt. Wenn dies erreicht wird, dann ist dem

Fig. 127



Gute Luftschiff-Form.

Fig 128.



Gutes Strebenprofil.

Vorstehenden gemäß zu erwarten, daß der Widerstand eines solchen Körpers nur noch aus Reibungswiderstand besteht. Das ist nach den Versuchen in der Tat der Fall. Die Körperformen, für die ein Anliegen der Strömung erreicht wird, sind alle einigermaßen schlank und wohlgerundet und laufen nach hinten in eine Spitze oder Schneide aus, die allerdings auch etwas abgerundet sein darf. Vorn, wo ja keine Wirbelablösung zu befürchten ist, ist eine Zuspitzung nicht nötig, eine Form nach Art eines verlängerten Ellipsoids genügt völlig. (Anders liegt die Sache bei an der Wasseroberfläche fahrenden Schiffen, die einen schneidenartigen Bug haben müssen, damit nicht ein hoher Wellenberg vor dem Schiff entsteht.) Die Fig. 127 (Luftschiffkörper) und Fig. 128 (Strebenprofil) geben Beispiele von solchen Körpern.

Die beobachtete Druckverteilung stimmt hier in der Regel sehr gut mit der rechnerisch für die Potentialbewegung ermittelten überein, mit Ausnahme des hinteren Endes, wo wegen der Geschwindigkeitsverluste in der den Körper einhüllenden Reibungsschicht der theoretische Druckanstieg bis zum Staudruck fehlt. Die Figg. 129 a und 129 b zeigen zwei charakteristische Beispiele dafür.

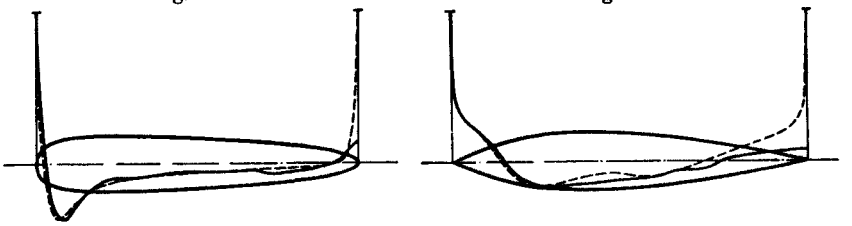
Für den Rotationskörper nach Fig. 127 ergibt sich nach den Versuchen $c = 0{,}04$, der Widerstand ist also nur der 28. Teil desjenigen einer Kreis-

[1]) Extrapoliert.

scheibe mit gleichem Durchmesser. Für einen quer zur Achse angeströmten Stab vom Querschnitt Fig. 128 liefert der Versuch etwa $c = 0{,}06$ bis $0{,}08$, wenn die Reynoldssche Zahl vd/ν über etwa 50 000 liegt.

Für den Reibungswiderstand mögen hier folgende Angaben genügen (vgl. auch § 5). Man pflegt ihn auf die gesamte reibende Oberfläche O zu beziehen; bei einer beiderseits beströmten rechteckigen Platte von der Breite b und der Länge l ist also $O = 2\,bl$; der Widerstand kann im allgemeinen der Breite senkrecht zur Bewegungsrichtung unmittelbar proportional gesetzt werden, die Breite ist also in O schon richtig enthalten, kommt daher in der Reibungswiderstandszahl c_f nicht mehr vor; die Länge l (in der Bewegungsrichtung) verhält sich dadurch anders, daß die hinteren Teile in dem durch die vorderen Teile schon teilweise gebremsten Strome stehen, so daß bei Ver-

Fig. 129 a. Fig. 129 b.



Druckverteilungen an Luftschiffmodellen.
Gestrichelt: berechnete Druckverteilung. Ausgezogen: beobachtete Druckverteilung.

dopplung der Länge der Widerstand nicht ganz verdoppelt wird. Bei laminarer Strömung in der Reibungsschicht ist er proportional $\sqrt{l}$, bei turbulenter für genügend große Reynoldssche Zahlen bei glatter Oberfläche proportional $l^{0,8}$ bis $l^{0,85}$, bei rauher Oberfläche proportional $l^{0,65}$ bis $l^{0,75}$. Führt man die mit l zusammenhängende Reynoldssche Zahl $\mathfrak{R} = \frac{vl}{\nu}$ ein, so ordnen sich die Versuchsergebnisse für glatte Oberflächen in der in Fig. 130 wiedergegebenen Art an. In dieser Figur sind c_f und $\mathfrak{R}$ in logarithmischem Maß aufgetragen. Die ausgezogenen und gestrichelten Linien bedeuten dabei verschiedene Formeln. Bei laminarer Strömung, vgl. Formel (5) von § 3, ist

$$c_f = 1{,}328/\sqrt{\mathfrak{R}}$$

(Nr. 3 in Fig. 130), bei turbulenter Strömung ist, wenn die Turbulenz gleich vorn beginnt, etwa

$$c_f = 0{,}074/\mathfrak{R}^{0,2}.$$

Diese Formel, Nr. 1 in Fig. 130, steht in innerem Zusammenhang mit der Blasiusschen Widerstandsformel für Rohre, § 9, Gl. (4)[1]). Wenn ein laminares Anfangsstück vorhanden ist und erst weiter hinten die Turbulenz einsetzt, so kann, entsprechend einer kritischen Reynoldsschen Zahl $\mathfrak{R} = 500\,000$,

$$c_f = 0{,}074/\mathfrak{R}^{0,2} - 1700/\mathfrak{R}$$

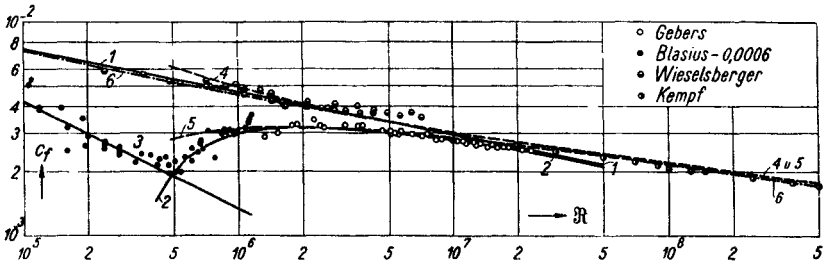
[1]) Vgl. etwa Prandtl, Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, III. Lief, S. 3. München 1927.

gesetzt werden (Nr. 2 in Fig. 130). Diese Formeln sind bis etwa $\mathfrak{R} = 5 \cdot 10^6$ gut. Entsprechend der Abweichung der Rohrwiderstände vom Blasiusschen Gesetz bei den ganz großen Reynoldsschen Zahlen liegen auch hier die Widerstände etwas höher. Aus den neueren Messungen an glatten Rohren haben Schiller und Hermann[1]) eine Formel für die örtliche Plattenreibung berechnet, die für die bereits von der Vorderkante an turbulente Strömung integriert

$$c_f = 0{,}024/\mathfrak{R}^{0{,}13} + 850/\mathfrak{R}$$

ergibt (Nr. 4 in Fig. 130). Für laminares Anfangsstück ist davon wieder $1700/\mathfrak{R}$ abzuziehen (Nr. 5). Diese Formeln gelten von $\mathfrak{R} = 3 \cdot 10^6$ aufwärts.

Fig. 130.



Reibungswiderstand von ebenen Platten, abhängig von der Reynoldsschen Zahl.

1. $c_f = 0{,}074/\sqrt[5]{\mathfrak{R}}$
2. $c_f = 0{,}074/\sqrt[5]{\mathfrak{R}} - 1700/\mathfrak{R}$
3. $c_f = 1{,}328/\sqrt{\mathfrak{R}}$
4. $c_f = 0{,}024\,\mathfrak{R}^{-0{,}13} + 850/\mathfrak{R}$
5. $c_f = 0{,}024\,\mathfrak{R}^{-0{,}13} - 850/\mathfrak{R}$
6. $c_f = \dfrac{0{,}455}{(\log \mathfrak{R})^{2{,}58}}$

Ganz neuerdings wurde von H. Schlichting eine neue Formel gefunden, die das ganze Gebiet überdeckt; sie lautet

$$c_f = \frac{0{,}455}{(\log_{10} \mathfrak{R})^{2{,}58}} \quad \text{(Nr. 6).}$$

Bei rauhen Oberflächen ist c_f von der Geschwindigkeit, also von der Reynoldsschen Zahl wenig oder gar nicht abhängig; Zahlenangaben mögen hier unterbleiben, da es schwierig ist, die Art der einzelnen rauhen Oberflächen genügend zu charakterisieren; vgl. indes die Ausführungen am Ende von § 5.

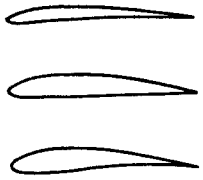
§ 14. Tragflügel. Bei der Behandlung der Widerstandsfragen sind hier bisher nur solche Fälle behandelt worden, wo vermöge einer vorhandenen Symmetrie die Widerstandskraft in die Bewegungsrichtung fällt. Im allgemeinen ergibt sich aber eine Kraft in irgendeiner allgemeinen Richtung, gegebenenfalls zuzüglich irgendeines ebenfalls allgemein orientierten Drehmoments. Beispiele, in denen eine seitliche Kraft oder ein Drehmoment als gewollte Wirkung vorkommen, sind der Flugzeugtragflügel und das Rad

[1]) Ingenieurarchiv I, S. 391, 1930.

einer Windmühle. In beiden Fällen kommt zu der gewollten Wirkung noch ein Widerstand in der Bewegungsrichtung hinzu.

Bei den Tragflügeln liegt die Aufgabe, wie leicht zu sehen ist, so, daß möglichst viel „Auftrieb" mit einem Minimum von Widerstand erreicht werden soll. Ebene Platten, die um einen kleinen Winkel („Anstellwinkel") gegen die Bewegungsrichtung geneigt sind, sind nicht ganz ungeeignet für diese Aufgabe. Besser sind aber, wie O. Lilienthal[1]) nachwies, flach gewölbte Platten. Statt der dünnen Platten können vorteilhafterweise auch ziemlich dicke „Profile" genommen werden, die man sich so entstanden denken kann, daß man um eine flach gewölbte Mittellinie ein Fischprofil nach Fig. 127 herumlegt. Daß auch recht beträchtlich dicke Profile noch sehr brauchbar sind, hat zuerst um 1917 Junkers durch Konstruktion seiner Metallflugzeuge erwiesen, deren Flügel vollständig durch Versteifungen getragen werden, die im Flügelinnern liegen. Einige heute gebräuchliche Flügelprofile sind in Fig. 131 wiedergegeben, sie haben mit den Profilen der Flügel von gut fliegenden Vögeln große Ähnlichkeit.

Fig. 131.



Gute Tragflügelprofile.

Um zahlenmäßige Angaben über die Eigenschaften von Tragflügeln zu machen, kann man die resultierende Luftkraft in zwei Komponenten zerlegen, entweder nach im Flügel festen Richtungen (Normalkraft N und Tangentialkraft T senkrecht und parallel zur „Flügelsehne" oder einer anderen passend gewählten Richtung) oder nach der Richtung der Bewegung und

Fig. 132.

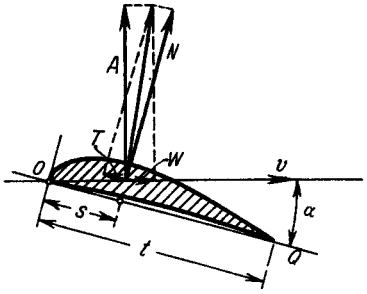
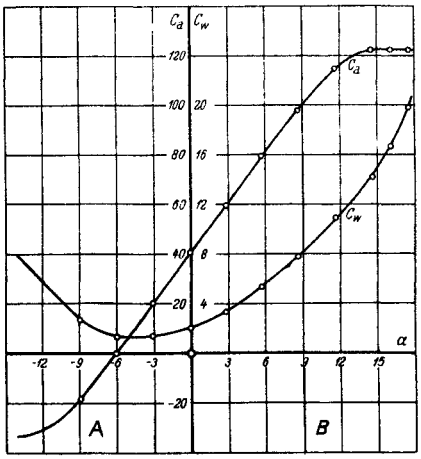


Fig. 133.



Auftrieb und Widerstand eines Tragflügels, abhängig vom Anstellwinkel.

senkrecht dazu (Auftrieb A und Widerstand W). Die dimensionslosen Widerstandszahlen werden hier zweckmäßig in der Weise gebildet, daß man sie nicht auf die veränderliche Projektionsfläche in der Bewegungsrichtung bezieht, sondern

[1]) Vgl. O. Lilienthal, Der Vogelflug als Grundlage der Fliegerkunst, 2. Aufl., S. 73 u. f. München 1910.

auf die „größte Projektionsfläche" des Flügels, also bei rechteckigen Flügeln einfach $F = b \cdot t$, mit b = Breite (Spannweite) und t = Tiefe (Ausdehnung in der Flugrichtung). Ist wieder $p_d = \frac{\varrho v^2}{2}$ der Staudruck, so wird gemäß der in der deutschen Aerodynamik üblichen Bezeichnung geschrieben:

$$\left.\begin{aligned} A &= c_a F p_d, \quad W = c_w F p_d \\ \text{bzw.} \quad N &= c_n F p_d, \quad T = c_t F p_d \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Ist α der Winkel zwischen der Profilsehne und der Bewegungsrichtung (vgl. Fig. 132), so gelten für A und W einerseits und für N und T andererseits die bekannten Formeln für die Transformation von einem Koordinatensystem auf ein anderes um den Winkel α verdrehtes Koordinatensystem. Durch Division mit $F p_d$ erhält man hieraus die entsprechenden Formeln für c_a und c_w einerseits und c_n und c_t andererseits. Diese lauten:

$$\left.\begin{aligned} c_n &= c_a \cos\alpha + c_w \sin\alpha \\ c_t &= -c_a \sin\alpha + c_w \cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

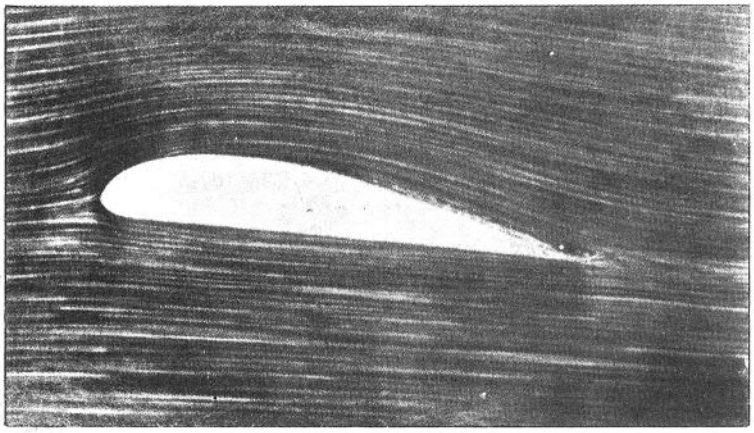
Die Strömungsformen sind je nach der Größe des „Anstellwinkels" α verschieden, daher sind auch c_a und c_w [und vermöge Gl. (2) auch c_n und c_t] als Funktionen von α zu betrachten. Fig. 133 stellt den typischen Verlauf dieser Funktionen für das erste der in Fig. 131 wiedergegebenen Profile dar (und zwar für ein Seitenverhältnis 1 : 5 des rechteckigen Flügels). Der Winkelbereich von A bis B entpricht der „gesunden Strömung", d. h. einer Strömung, die überall an dem Flügel anliegt; in den Bereichen jenseits A und B ist die Strömung auf der unteren bzw. oberen Seite des Flügels „abgerissen" und der Zwischenraum mit Wirbeln erfüllt, vgl. die Strömungsaufnahmen, Fig. 134 (gesunde Strömung) und Fig. 135 (oben abgerissene Strömung).

Eine andere viel verwendete Darstellung des Inhalts von Fig. 133 ergibt sich durch Auftragung von A senkrecht zu dem zugehörigen W oder auch von c_a senkrecht zu dem zugehörigen c_w; da A und W rechtwinklige Komponenten der resultierenden Luftkraft sind, stellt der Vektor vom Ursprung O nach einem Punkt der A-W-Kurve die resultierende Kraft nach Größe und Richtung dar. Für die c_a-c_w-Kurve gilt ganz Entsprechendes. Man nennt beide Kurven, da eine resultierende Kraft von einem Pol O aus aufgetragen ist, auch „Polarkurve". Diese anscheinend zuerst von O. Lilienthal angewandte Darstellung wurde von G. Eiffel dadurch verbessert, daß der meist sehr kleine Widerstand bzw. die Widerstandszahl in einem fünfmal größeren Maßstab aufgetragen wird als der Auftrieb bzw. die Auftriebszahl. Diese Auftragungsart hat sich sehr stark eingebürgert, da sie für die Verwendung in der Flugtechnik sehr bequem ist. Wenn an die einzelnen Punkte der Polarkurve die zugehörigen Anstellwinkel als Bezifferung angeschrieben werden, so enthält die Darstellung alle Angaben der zwei Kurven von Fig. 133 (vgl. Fig. 136, ausgezogene Kurve).

Eine weitere wichtige Angabe für die strömungstechnischen Eigenschaften eines Flügels ist die Lage der resultierenden Kraft zum Flügel für jeden

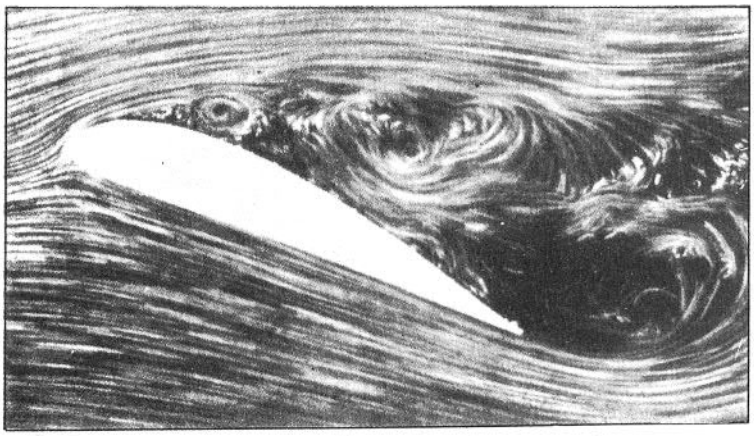
Anstellwinkel, die durch die Entfernung des Schnittpunkts der resultierenden Kraft mit der Profilsehne $\overline{OQ}$ von dem Bezugspunkt O, also s in Fig. 132, gegeben werden kann. Da jedoch s für $N = 0$ in der Regel unendlich wird, liefert s in seiner Abhängigkeit von α (die „Druckpunktwanderung") eine zeichnerisch und auch für Interpolationszwecke unbequeme Darstellung; besser

Fig. 134.



Gesunde Flügelströmung.

Fig. 135.



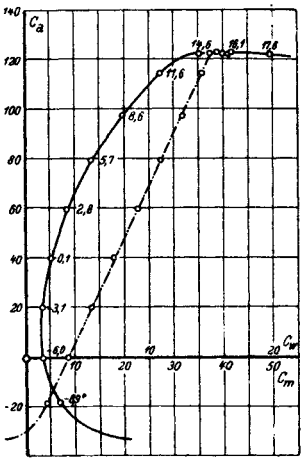
Abgerissene Flügelströmung.

ist es, das Drehmoment M der resultierenden Kraft für den Bezugspunkt O anzugeben, das einen sehr stetigen Verlauf zeigt. Es ist, wie leicht zu sehen, $M = Ns$, woraus bei gegebenem M und N s ermittelt werden kann. Um M durch eine dimensionslose Größe ausdrücken zu können, muß noch eine Länge eingeführt werden. Als solche bietet sich die Profiltiefe $\overline{OQ} = t$ dar. Damit wird $M = c_m F p_d t$. c_m heißt Momentenzahl. In Fig. 136 ist

durch die gestrichelte Kurve c_m (wagerecht) abhängig von c_a (senkrecht) wiedergegeben. Diese Darstellung empfiehlt sich dadurch, daß c_a in dem flugtechnisch vor allem in Frage kommenden Gebiet der gesunden Strömung mit wachsendem Anstellwinkel ziemlich gleichmäßig wächst. Ein anderer Grund, warum die Wahl von c_a als unabhängige Veränderliche zweckmäßig ist, wird sich aus dem Folgenden ergeben (§ 15).

Die Eigenschaften der Tragflügel wie auch die der ebenen Platten erweisen sich als stark von dem Seitenverhältnis $t:b$ abhängig, in dem Sinne, daß der zu einem bestimmten Wert von c_a gehörige Wert von c_w um so kleiner ist, je kleiner $t:b$, d. h. je länglicher der Flügel ist. Ähnliches gilt auch für die zugehörigen Anstellwinkel. Soweit es sich um die gesunde Strömung handelt, können theoretische Betrachtungen über die reibungslose Strömung um Tragflügel zur Aufklärung dieser Dinge herangezogen werden; der Reibungswiderstand und etwaiger Druckwiderstand durch Ablösung der Strömung bleiben dabei natürlich unberücksichtigt, was beim Vergleich von Ergebnissen der Theorie mit solchen der Versuche immer zu berücksichtigen ist.

Fig. 136.



Polarkurve (ausgezogen) und Momentenkurve (strichpunktiert). Die Zahlen sind das Hundertfache von c_a, c_w und c_m.

Der einfachste Fall betrifft den Flügel von unendlicher Spannweite bzw. den Flügel zwischen parallelen dicht anschließenden Wänden, was im wesentlichen auf dasselbe hinauskommt. Die stationäre Strömung der reibungslosen Flüssigkeit für diesen Fall ist eine Potentialströmung mit Zirkulation, vgl. zweiten Abschnitt, § 10. Wie gut diese von W. M. Kutta[1]) und N. Joukowski[2]) entwickelte Theorie mit dem Versuch stimmt, mag aus Fig. 137[3]) entnommen werden, die Auftrieb und Widerstand eines Flügels zwischen Wänden im Vergleich mit der Theorie nach Versuchen von A. Betz[4]) abhängig vom Anstellwinkel darstellt. Das zugehörige Flügelprofil („Joukowskiprofil") ist das unterste von Fig. 131.

Der Widerstand ist theoretisch gleich Null, der praktische Widerstand besteht in der Hauptsache aus Reibungswiderstand, der praktische Auftrieb ist etwas kleiner als der theoretische, was ebenfalls auf Reibungseinflüsse zurückzuführen ist (Verkleinerung der Zirkulation durch die auf der Saugseite etwas breitere Reibungsschicht, die ebenso wirkt wie eine geringe

---

[1]) Sitzungsber. d. Bayr. Akad. d. Wiss. M.-Ph. Kl. 1910 u. 1911.

[2]) Zeitschr. f. Flugt. u. Motorluftsch. 1, 281, 1910; vgl. auch Joukowski, Aerodynamique, Paris 1916.

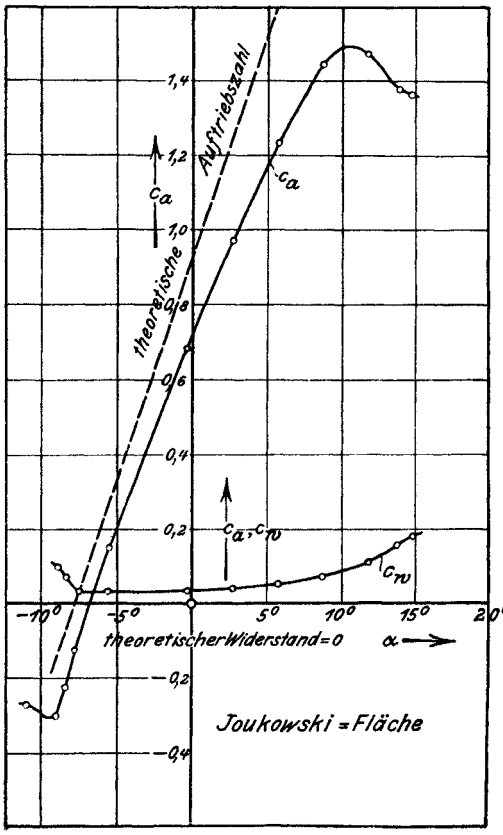
[3]) Die Figuren 137, 138, 144, 145, 146, 147, 148 sind mit freundl. Erlaubnis des Verlages Julius Springer (Berlin) dem Werke Kármán-Levi-Civita: „Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik" entnommen.

[4]) Zeitschr. f. Flugt. u. Motorluftsch. 6, 173, 1915.

Gestaltänderung des Profils). Die theoretisch gerechnete und die praktisch gemessene Druckverteilung an einem solchen Flügel für einen mittleren Anstellwinkel ist in Fig. 138 wiedergegeben.

Die Berechnungsmethoden für diese Potentialströmung mit Zirkulation sind durch Arbeiten von v. Mises[1]), Geckeler[2]), Wilh. Müller[3]), Höhndorf[4]) u. a. so ausgebildet, daß man die Rechnung für jedes praktisch vorkommende Profil mit der erforderlichen Genauigkeit durchführen kann.

Fig. 137.



Auftrieb und Widerstand bei der ebenen Strömung, nach A. Betz.

Ein eigenartiges Paradoxon ergibt sich aus den hydrodynamischen Betrachtungen über den Tragflächenauftrieb für die unter einem Winkel α gegen die Anströmungsrichtung geneigte ebene Platte, wenn die ideale nichtreibende Flüssigkeit zugrunde gelegt wird. Die resultierende Kraft setzt sich hier aus den Druckunterschieden an den einzelnen Stellen der Platte zusammen. Die Drucke haben aber überall dieselbe Neigung α gegen die Senkrechte, da sie überall senkrecht auf der Plattenebene gerichtet sind, also muß auch die Resultierende R diese Richtung haben, und daher neben dem Auftrieb $A = R \cos \alpha$ auch ein Widerstand $W = R \sin \alpha$ vorhanden sein.

Andererseits ergibt die Zirkulationstheorie von § 10 des II. Abschnitts und auch die Impulsbetrachtung in § 13, a des gleichen Abschnitts einen Auftrieb allein, und es ist auch nicht möglich, in dieser Theorie einen Widerstand unterzubringen, so lange es sich um eine zweidimensionale Strömung handelt. Von Kutta wurde auch bereits eine Potentialströmung um die geneigte ebene Platte angegeben und ein Auftrieb $A = \pi \varrho v^2 . t \sin \alpha$ und ein Widerstand $= 0$ dafür gefunden.

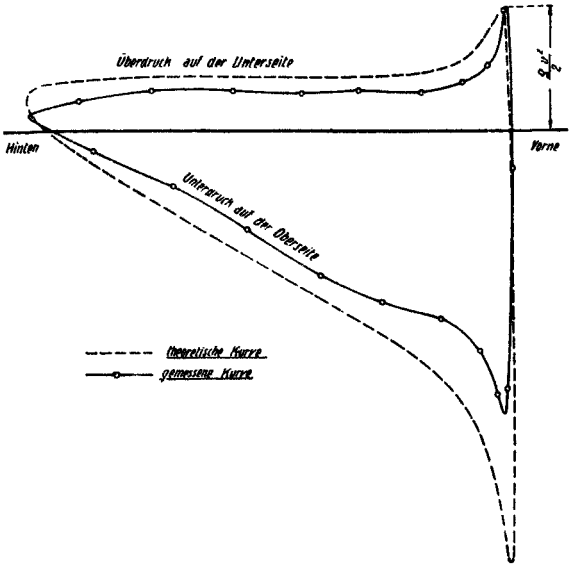
Die nähere Analyse dieser Kuttaströmung bringt auch die Lösung des Paradoxons[5]). An der Hinterkante der Platte fließt die Strömung glatt ab, ähnlich wie in Fig. 62, S. 60. An der Vorderkante ergibt sich aber eine Umströmung von der in Fig. 58, S. 57 dargestellten Art, mit unendlicher Geschwindigkeit an der Kante selbst. Der unendlichen Geschwindigkeit entspricht ein unendlicher negativer Druck. Man kann die Verhältnisse klarer übersehen, wenn man statt der unendlich dünnen Platte eine von endlicher, aber kleiner Dicke an-

---

1) Zeitschr. f. Flugt. u. Motorluftsch. 8, 157, 1917 u. 11, 68 u. 87, 1920.
2) Ebenda 13, 137, 176, 191, 1922.
3) Zeischr. f. angew. Math. u. Mech. 3—6, 1923—1926.
4) Ebenda 6, 265, 1926.
5) Von Kutta selbst angegeben (Sitzungsber. d. bayr. Akad. d. Wiss. 1910, 2. Abh.; siehe dort S. 25 und 42).

nimmt und dabei die Gegend der Vorderkante nach einer der Stromlinien von Fig. 58 abrundet. Dann hat man es nur mit endlichen Geschwindigkeiten und Unterdrucken zu tun. Die Unterdrucke auf dem endlich breiten Vorderende setzen sich nun zu einer „Saugkraft" zusammen, die der Widerstandskomponente der Druckresultierenden auf dem Hauptteil der Plattenoberfläche entgegenwirkt. Die nähere Durchrechnung ergibt nun, daß die resultierende Saugkraft von der Plattendicke praktisch unabhängig ist, indem die Unterdrucke um so höher werden, je kleiner der Krümmungsradius an der Vorderkante wird. Es liegt daher nahe, auch im Grenzfall der unendlich dünnen Platte mit einer Saugkraft von der gleichen Größe zu rechnen. Die Größe der Saugkraft ergibt sich mit dem obigen Wert von A zu $S = A \sin \alpha$, ihre Richtung liegt in der Plattenebene; die Resultierende der übrigen Druckkräfte, die senkrecht zur Platte steht, ergibt sich zu $R = A \cos \alpha$. Die wagerechte Komponente von R ist $R \sin \alpha = A \cos \alpha \sin \alpha$ nach hinten, die wagerechte Komponente der Saugkraft ist $S \cos \alpha = A \sin \alpha \cos \alpha$ nach vorne, so daß die gesamte wagerechte Kraft gleich Null wird.

Fig. 138.



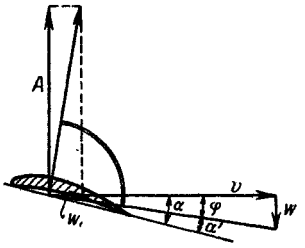
Druckverteilung gemäß Theorie und Messung, nach A. Betz.

Dieses Resultat bezieht sich natürlich nur auf die Potentialströmung der idealen Flüssigkeit mit Zirkulation. Bei der wirklichen Strömung um eine vorne zugeschärfte Platte treten natürlich keine unendlich hohen negativen Drucke auf, sondern es ergibt sich eine Ablösung der Strömung; diese legt sich allerdings bei kleinen Anstellwinkeln durch Vermittlung eines turbulenten Vorgangs wieder an die Saugseite an, so daß eine der theoretischen in den großen Zügen nicht unähnliche Strömungsform mit ähnlich großem Auftrieb entsteht. Bei dem Ausbleiben der Saugkraft erhält man natürlich hier einen Widerstand, der den Reibungswiderstand um $A \operatorname{tg} \alpha$ übersteigt. Das Äquivalent dieses zusätzlichen Widerstandes ist in der Geschwindigkeitseinbuße zu suchen, die durch den turbulenten Vorgang auf der Saugseite entsteht.

Der Wert der theoretischen Betrachtung über die Saugkraft besteht einerseits in der Aufklärung des obigen Paradoxons, andererseits aber in der Einsicht über die Bedeutung der vorderen Abrundung der Flügelprofile. Bei gut abgerundeten Profilen kommt die Saugkraft auch praktisch durchaus zur Geltung. Wenn die Resultierende eines Flügels mit 6^0 Anstellwinkel nur 2^0 gegen die Senkrechte geneigt ist, was häufig beobachtet wird, so ist darin deutlich die Wirkung der Saugkraft zu erkennen.

§ 15. Tragflügeltheorie[1]). Bei endlicher Spannweite des Tragflügels bildet sich an der Hinterkante eine Trennungsfläche aus, wie sie in § 6 des vorigen Abschnitts im Anschluß an Fig. 40 beschrieben ist. Durch das dort geschilderte Einrollen der Trennungsfläche entstehen zwei Wirbel, die sich in der ganzen Länge der Flugbahn nach hinten erstrecken. Da in jedem Zeitabschnitt ein Stück dieser Wirbel neu gebildet werden muß, ist nach dem Energiesatz leicht einzusehen, daß hierfür dauernd Arbeit geleistet werden muß; diese Arbeit kann nur in der Überwindung eines Widerstandes bestehen. Es ergibt sich also die Tatsache, daß der endliche Tragflügel auch in der reibungslosen Flüssigkeit einen Widerstand erfährt. Eine angenäherte Berechnung dieses Widerstandes ist in der im folgenden dargelegten Weise möglich.

Fig. 139.



Aus § 10 des vorigen Abschnitts wissen wir, daß in der reibungslosen Flüssigkeit der Auftrieb immer senkrecht zur Richtung der Geschwindigkeit v steht. Beim endlichen Tragflügel weicht die Flüssigkeit auf der Druckseite nach außen aus und strömt über die Flügelspitzen zur Saugseite. Diese Bewegung kann als ein Nachgeben der Flüssigkeit unter dem Druck des Flügels gedeutet werden, ihr entspricht auch eine Geschwindigkeitskomponente in Richtung dieser Druckkraft; die resultierende Strömung am Flügel setzt sich daher aus der ungestörten Geschwindigkeit v und der durch den Flügel selbst hervorgerufenen Geschwindigkeit w ($\perp v$) zusammen und hat daher die Neigung $tg\,\varphi = w/v$ (vgl. Fig. 139). Die resultierende Luftkraft steht senkrecht zu dieser Richtung und hat daher zwei Komponenten, den Auftrieb A und den Widerstand $W = A\,tg\varphi = A\frac{w}{v}$. Die Aufgabe der Tragflügeltheorie besteht nun darin, die vom Tragflügel „induzierte" Geschwindigkeit w zu ermitteln.

Die Ermittlung der induzierten Geschwindigkeit w gelingt unter der vereinfachenden Annahme, daß der Auftrieb A so klein ist, daß alle Ablenkungen der Strömung nur klein sind und daß es daher genügt, bei allen Größen nur die jeweils niedrigste Ordnung zu berücksichtigen, während alle Beiträge, die von höherer Ordnung klein sind, vernachlässigt werden. Diese Annahme schließt z. B. ein, daß man bei den Winkeln, die die relativen Stromlinien mit der Bewegungsrichtung bilden, Sinus, Tangens und Bogen verwechseln und den Kosinus $= 1$ setzen darf.

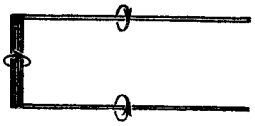
Das Feld der von einem Tragflügel induzierten Geschwindigkeiten läßt sich nun aus dem Wirbelsystem berechnen, das man für den Tragflügel und seine Trennungsfläche substituieren kann. Auftrieb ist immer mit Zirkulation verknüpft, und zwar ist nach dem Kutta-Joukowskischen Satz, der auch

[1]) Vgl. Prandtl, Götting. Nachr. 1918, S. 451 u. 1919, S. 107, wieder abgedruckt in „Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik", Göttingen 1927, ferner Kármán-Levi-Civita, Hydrodyn. Vorträge (Innsbruck 1921), Berlin 1923, Vorträge von Trefftz und Wieselsberger.

hier gilt, der Auftrieb pro Längeneinheit $= \varrho \Gamma v$ ($\Gamma =$ Zirkulation, vgl. § 10 und § 13, a des vorigen Abschnitts). Der Flügel wirkt deshalb auf die Flüssigkeitsteile, die weiter von ihm entfernt sind, wie ein Wirbellinienstück von der Wirbelstärke (Zirkulation) Γ. Da im übrigen für einen solchen Wirbel, der in Wirklichkeit ein Flügel ist, der Helmholtzsche Satz, daß der Wirbel immer aus denselben Flüssigkeitsteilchen besteht, nicht gilt, spricht man hier von einem „tragenden Wirbel", im Gegensatz zu den „freien Wirbeln", die dem Helmholtzschen Satz unterworfen sind.

Das einfachste Wirbelschema eines endlichen Tragflügels besteht nun aus einem tragenden Wirbel von der Stärke Γ mit zwei von den Flügelspitzen nach hinten parallel ins Unendliche laufenden freien Wirbeln von der gleichen Stärke, vgl. Fig. 140. (Der Satz, daß ein Wirbelfaden nirgends endigen kann und auf seiner ganzen Erstreckung die gleiche Stärke haben muß, ist rein kinematischer Natur und gilt deshalb für ein aus freien und tragenden Wirbeln zusammengesetztes Gebilde ebenso wie für freie Wirbel.) In Wirklichkeit pflegt die Auftriebsintensität nach den Flügelspitzen zu abzunehmen. Dies läßt sich in dem Wirbelbild durch Überlagerung sehr vieler Wirbelgebilde mit infinitesimaler Stärke nach Fig. 140 erreichen, von denen jedes eine andere Spannweite hat als die übrigen (vgl. Fig. 141). Wenn man so verfährt, so erhält man eine Näherungsdarstellung der früher besprochenen Trennungsfläche, bei der aber bewußt darauf verzichtet wird, die Umgestaltung, die die Trennungsfläche mit wachsendem Abstand vom Flügel erfährt, zu berücksichtigen. Je kleiner der Auftrieb ist, desto langsamer geht diese Umgestaltung vor sich, so daß man im Grenzfall sehr kleinen Auftriebs in der Tat diese Umgestaltung ganz vernachlässigen kann, wenn es gilt, das Geschwindigkeitsfeld in der Nähe des Flügels zu berechnen.

Fig. 140.



Vereinfachtes Wirbelsystem eines Tragflügels.

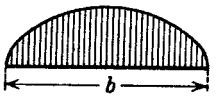
Fig. 141.

Verfeinertes Wirbelsystem.

Für die hier vorliegende Aufgabe braucht man nur die Geschwindigkeit parallel zur Auftriebskraft am Orte des Tragflügels zu berechnen. Unter Zugrundelegung eines Wirbelsystems nach Fig. 140 ergibt sich für die Mitte des Tragflügels das Folgende. Ein nach vorn und hinten unendlicher gerader Wirbel von der Stärke Γ gibt im Abstand a eine Geschwindigkeit $w = \Gamma/2\pi a$, vgl. § 11 des vorigen Abschnitts. Ein von der „Querebene" durch den Flügel nur nach hinten sich erstreckender Wirbel gibt aus Symmetriegründen in der Querebene gerade die Hälfte des obigen Betrags, also $\Gamma/4\pi a$. Ist b die Spannweite des Tragflügels, so ist für die Mitte des Tragflügels $a = b/2$, und es kommen zwei Beträge von dem rechten und linken Wirbel zusammen, so daß also $w_0 = 2 \cdot \frac{\Gamma}{4\pi b/2} = \frac{\Gamma}{\pi b}$ wird. Mit $\Gamma = \frac{A}{\varrho b v}$ nach dem Kutta-Joukowskischen Satz wird $w_0 = \frac{A}{\pi \varrho v b^2}$. Neben der Mitte ergeben sich

größere Geschwindigkeiten, wie leicht nachzurechnen ist, und in der Nähe der Flügelenden gehen sie gegen Unendlich. Das heißt nur, daß die Annahme eines bis zum Flügelende konstanten Auftriebs unzulässig ist. Die genauere, an Fig. 141 anknüpfende Theorie zeigt, daß man ein über die ganze Spannweite konstantes w erhält, wenn man den Auftrieb nach einer halben Ellipse (vgl. Fig. 142) über die Spannweite verteilt. Da hier die Zirkulation in der Mitte $4/\pi$-mal größer ist als der Mittelwert und im übrigen die einzelnen Wirbelfäden durchschnittlich näher zur Mitte liegen, wird w größer als w_0, und zwar ergibt sich durch Integration über alle Wirbelfäden [1]) gerade

Fig. 142.



Elliptische Auftriebsverteilung.

$$w = 2\,w_0 = \frac{2\,A}{\pi\,\varrho\,v\,b^2}\,. \qquad \cdot\;\cdot\;(1)$$

Damit wird

$$tg\,\varphi = \frac{w}{v} = \frac{2\,A}{\pi\,\varrho\,v^2\,b^2} = \frac{A}{\pi\,p_d\,b^2}\,. \qquad \cdot\;\cdot\;(2)$$

Da w, wie erwähnt, bei elliptischer Auftriebsverteilung über die ganze Spannweite konstant ist, ist es auch $tg\,\varphi$. Es ist also die obige Beziehung

$$W = A\,tg\,\varphi$$

unmittelbar anwendbar, und es ist daher

$$W = \frac{A^2}{\pi\,p_d\,b^2} \qquad (3)$$

Dieser Widerstand eines Tragflügels in der reibungslosen Flüssigkeit heißt „induzierter Widerstand" (der Name kommt von der Ähnlichkeit der Beziehungen zwischen den Wirbelfäden und den Geschwindigkeiten mit den zwischen elektrischen Leitern und ihrem Magnetfeld). Eine nähere Untersuchung hat ergeben, daß der Widerstand nach Formel (3) das Minimum des induzierten Widerstandes darstellt, das bei irgendeiner Verteilung des Auftriebs A in der Spannweite b erreicht werden kann; die Minimumseigenschaft hängt dabei ursächlich mit der Konstanz der induzierten Geschwindigkeit über die Spannweite zusammen. Da übrigens eine Größe in der Nähe des Minimums sich meist nur wenig zu ändern pflegt, ist Formel (3) auch für andere Auftriebsverteilungen, wenn sie nicht allzusehr von der elliptischen abweichen, als Näherungsformel zu brauchen. Für rechteckige Flügel von nicht allzu großem Seitenverhältnis ist dies z. B. der Fall.

Formel (3) zeigt, daß der mit der Erzeugung eines bestimmten Auftriebs verbundene induzierte Widerstand um so kleiner ist, auf eine je größere

---

[1]) Der Beitrag eines Wirbelfadens von der Stärke $\frac{d\,\Gamma}{d\,x'}\,d\,x'$ zu der Geschwindigkeit an der Stelle x ist gemäß Obigem

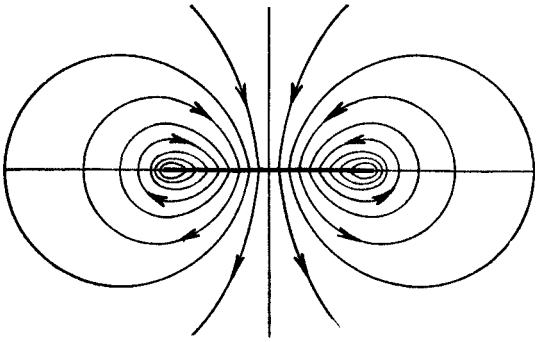
$$\frac{1}{4\,\pi\,(x - x')}\cdot\frac{d\,\Gamma}{d\,x'}\,d\,x'.$$

Dieses ist über die ganze Spannweite zu integrieren, wobei die Stelle $x' = x$ noch eine besondere Betrachtung erfordert, vgl. die zitierten Abhandlungen. (Es zeigt sich, daß von dem Integral der „Hauptwert" genommen werden muß.)

Spannweite der Auftrieb verteilt wird. Daß alle Flugzeuge Tragflügel von verhältnismäßig großer Spannweite bei geringer Tiefe aufweisen, hat hierin seinen Grund. Die Tiefe des Tragflügels in der Flugrichtung kommt in Formel (3) nicht vor, was so zu verstehen ist, daß es nur darauf ankommt, welcher Strömungszustand hinter dem Flügel zurückbleibt, nicht aber, ob dieser Zustand durch große Druckunterschiede in einer wenig tiefen Zone oder durch sanfte Drucke in einer etwas tieferen Zone erzeugt worden ist.

Die Betrachtung der hinter dem Tragflügel zurückbleibenden Störung führt zu einer anderen anschaulichen Darstellung der hier obwaltenden Beziehungen. Statt daß eine Stelle der Bahn des Flügels nach der anderen in rascher Aufeinanderfolge Drucke durch den Flügel erfährt, kann man sich denken, daß alle Stellen der durchlaufenen Bahn gleichzeitig eine kurze Zeit lang solche Drucke erfahren. Die so entstehende Bewegung ist eine ebene Potentialbewegung (vgl. § 9, c des vorigen Abschnitts); die Fläche, auf der die Drucke ausgeübt worden sind, ist dabei zu einer Trennungsfläche geworden. Fig. 143 [1]) stellt eine solche Strömung dar. Man kann die „Stoßdrucke" $\int_0^{t_1} p\,dt$ einerseits mit dem Strömungspotential, andererseits mit der Auftriebsverteilung in Verbindung bringen und so Formeln gewinnen, die den früher erwähnten gleichwertig sind. Hier soll lediglich eine vereinfachte Impuls- und Energiebetrachtung Platz finden, in der angenommen wird, daß sich nach dem Vorübergang des Tragflügels eine Flüssigkeitsmenge vom Querschnitt F_1 mit der Geschwindigkeit w_1 in der Richtung der auf die Flüssigkeit ausgeübten Kraft bewege, die übrige Flüssigkeit aber in Ruhe bleibe. (In Wirklichkeit hat man es mit einer Geschwindigkeitsverteilung zu tun, in der die Geschwindigkeiten in der Nähe der Bahn des Tragflügels von der Größenordnung w_1 sind und nach außen asymptotisch gegen Null abnehmen.) Die sekundlich neu in Bewegung gesetzte Masse ist gemäß unserer Annahme $m = \varrho F_1 v$. Der Impuls in der Richtung von w_1, der der Wirkung des Auftriebs A in einer Sekunde äquivalent ist, ist also $m w_1 = \varrho F_1 v w_1$, die erzeugte kinetische Energie ist

Fig. 143.



Strömung hinter dem Tragflügel.

$$m \frac{w_1^2}{2} = \varrho F_1 v \frac{w_1^2}{2}.$$

[1]) Nach Jahrbuch der Wiss. Gesellschaft für Luftschiffahrt 1920 mit freundl. Erlaubnis der Verlagsbuchhandlung Julius Springer, Berlin.

Diese muß gleich der sekundlichen Arbeitsleistung des induzierten Widerstandes am Tragflügel sein, also

$$\varrho F_1 v \frac{w_1^2}{2} = W v;$$

nimmt man

$$\varrho F_1 v w_1 = A$$

hinzu, so kann w_1 eliminiert werden, und man erhält

$$W = \frac{A^2}{2 \varrho v^2 F_1} = \frac{A^2}{4 p_d F_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Der Vergleich von Gl. (3) und (4) zeigt, daß beim Eindecker mit elliptischer Auftriebsverteilung die Hilfsfläche $F_1 = \frac{\pi}{4} b^2$ gesetzt werden muß, also gleich der Fläche des Kreises ist, der über der Spannweite als Durchmesser beschrieben werden kann. Die Formel (4) gilt übrigens, kleinen Auftrieb vorausgesetzt, ganz allgemein für jedes geradlinig bewegte Flügelsystem. Es muß nur jedesmal die Fläche F_1 besonders ermittelt werden.

Bei einem Doppeldecker steht jeder Flügel außer seiner Wirkung auf sich selbst auch unter derjenigen des anderen Flügels (Selbstinduktion und gegenseitige Induktion); unter der Annahme kleinen Auftriebs überlagern sich die Einzelwirkungen additiv, und der induzierte Widerstand besteht aus vier Beiträgen:

$$W = W_{11} + W_{12} + W_{21} + W_{22}$$

(W_{12} = Widerstand des 1. Flügels unter der Wirkung des 2. Flügels usw.). Die Rechnungen für Doppeldecker sind sehr weit durchgeführt und haben eine Reihe bemerkenswerter Beziehungen zutage gefördert, doch kann hier darauf nicht näher eingegangen werden[1]). Ein praktisches Ergebnis wird am Schlusse des nächsten Paragraphen mitgeteilt werden.

§ 16. Praktische Anwendung der Tragflügeltheorie; Bestätigung durch den Versuch. Will man die Ergebnisse der Tragflügeltheorie praktisch anwenden, so muß man berücksichtigen, daß bei den wirklichen Flüssigkeiten Reibungswiderstand und auch Widerstand durch Ablösung der Strömung vorhanden ist. Dieser Widerstandsanteil kann isoliert beobachtet werden durch Versuche mit Tragflügeln zwischen parallelen Wänden, vgl. § 14[2]); bei diesen ist der induzierte Widerstand gleich Null, wenigstens in einem allseitig geschlossenen Kanal[3]).

Beim endlichen Tragflügel kommt zu diesem Widerstand W_o, den man „Profilwiderstand" nennt, der induzierte Widerstand W_i dazu:

$$W = W_o + W_i.$$

---

[1]) Vgl. hierüber etwa Prandtl, Gött. Nachr. 1919, S. 107—123 oder Ergebnisse d. Aerodyn. Vers.-Anstalt 2, 9, 1923 und 3, 9, 1927; auch B. Eck, Zeitschr. f. Flugtechn. u. Motorluftsch. 1925, S. 183.

[2]) Eine andere Methode, die den Impulssatz auf das Gebiet verminderter Geschwindigkeit hinter dem Flügel anwendet, ist in § 20, c näher geschildert.

[3]) Bei einem oben und unten freien Strahl zwischen parallelen Seitenwänden ist ein induzierter Widerstand nach Formel (4) des vorigen Paragraphen mit F_1 = Strahlquerschnitt vorhanden.

Damit diese additive Zusammensetzung erlaubt ist, darf man aber nicht Zustände bei gleichem Anstellwinkel vergleichen, sondern es muß der Strömungszustand am Flügelelement derselbe sein: wenn dies der Fall ist, dann ist auch (unter Vernachlässigung kleiner Größen) die Auftriebsintensität am Flügelelement dieselbe. Wir erkennen also, daß man zweckmäßig von der Auftriebsintensität, also z. B. von der Auftriebszahl c_a ausgeht, wenn man die Beziehungen der Tragflügeltheorie verwerten will. (Die Auftriebszahl c_a stellt allerdings bereits eine Mittelbildung über verschieden große Auftriebsintensitäten von der Mitte bis zu den Flügelenden dar; da aber in dem Gebiet der gesunden Strömung c_a ungefähr linear mit α geht und die Profilwiderstandszahl c_{wo} nicht stark veränderlich ist, ist diese Mittelwertsbildung nicht bedenklich). Geht man in Formel (3) von § 15 von A und W_i zu c_a und c_{wi} über ($A = c_a F p_d$ und $W_i = c_{wi} F p_d$), so ergibt sich

$$c_{wi} = \frac{c_a^2 F}{\pi b^2}$$

und daher, nach dem Vorstehenden, für ein gegebenes c_a

$$c_w = c_{wo} + c_{wi} = c_{wo} + \frac{c_a^2 F}{\pi b^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

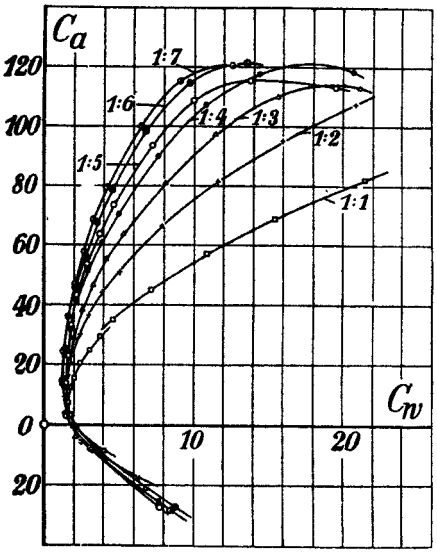
Diese Formel kann zur Berechnung der Widerstandszahl eines endlichen Tragflügels aus der des unendlich langen verwendet werden. Noch genauer ist sie aber für die Berechnung der Widerstandszahl eines endlichen Flügels aus einem Versuch mit einem anderen endlichen Flügel mit anderem F/b^2, denn hier ist die Verteilung des Auftriebs über die Spannweite in beiden Fällen ungefähr dieselbe, und die oben in der eingeklammerten Bemerkung erwähnte Mittelwertbildung findet in gleicher Weise für das Gegebene und das Gesuchte statt. Man überzeugt sich durch zweimalige Anwendung von Gl. (1), einmal auf den Flügel 1 (Spannweite b_1, Fläche F_1) und dann auf den Flügel 2 (Spannweite b_2, Fläche F_2), wenn gemäß dem früher Gesagten $c_{a2} = c_{a1}$ gesetzt wird, daß hier die Beziehung besteht:

$$c_{w2} = c_{w1} + \frac{c_a^2}{\pi}\left(\frac{F_2}{b_2^2} - \frac{F_1}{b_1^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Für rechteckige Flügel ist $F = b \,.\, t$, hier wird also, wie bemerkt werden mag, $\frac{F}{b^2} = \frac{t}{b}$, also gleich dem „Seitenverhältnis". Die Umrechnungsformel (2) hat sich in dem praktisch am meisten in Betracht kommenden Bereich von Seitenverhältnissen 1 : 3 bis 1 : 7 für alle vorkommenden Auftriebswerte sehr gut bewährt, obwohl sie zunächst nur für verschwindend kleine Auftriebe abgeleitet ist. Die Ablenkungen der Stromlinien durch solche Flügel sind eben hier im Bereich der gesunden Strömung, wenn man von der unmittelbaren Nachbarschaft des Flügels absieht, noch ziemlich klein. Bei einem Seitenverhältnis 1 : 2 oder gar 1 : 1 hat die Ersetzung des Flügels durch eine „tragende Wirbellinie" etwas zu Gewaltsames, und man kann nicht verlangen, daß hier noch Übereinstimmung mit den Formeln erreicht werden kann; trotzdem sind die Abweichungen selbst in diesen Fällen nicht allzu bedeutend. Die im

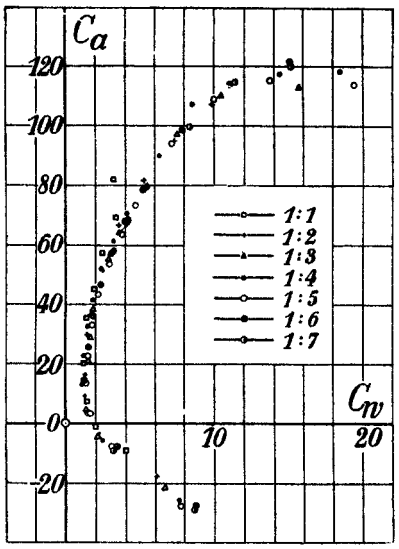
folgenden mitgeteilte Göttinger Versuchsreihe[1]) mag das Maß der Übereinstimmung mit Formel (2) erweisen. In Fig. 144 sind die Polarkurven für eine Reihe von Flügeln von gleichem Profil und vom Seitenverhältnis 1 · 1 bis 1 : 7 wiedergegeben. In Fig. 145 sind diese sämtlichen Messungen nach Formel (2) auf das Seitenverhältnis 1 : 5 umgerechnet, und man sieht, daß die Mehrzahl der Versuchspunkte sich eng an die gemessene Kurve 1 : 5 anschließt. Etwas weiter abseits liegt nur das Quadrat.

Fig. 144.



Polarkurven von sieben rechteckigen Tragflügeln verschiedenen Seitenverhältnisses.

Fig. 145.



Umrechnung der Versuchsergebnisse von Fig. 144 auf das Seitenverhältnis 1 : 5.

Die Zahlen sind das Hundertfache von c_a und c_w.

Eine andere Nutzanwendung dieser Beziehungen besteht darin, daß man bei den Polarkurven, die aus den Versuchen erhalten werden, die „Parabel" des induzierten Widerstandes beifügt, wodurch dann gemäß Gl. (1) dieses Paragraphen zwischen der Parabel und der Versuchskurve der Profilwiderstand abgelesen werden kann. In Fig. 146 ist diese Parabel zu der Polarkurve von Fig. 136 hinzugezeichnet.

Die Umrechnung der Anstellwinkel für gleiches c_a gelingt ebenso wie die der Widerstandszahlen. Hier führt die folgende Überlegung zum Ziel: Dem Anstellwinkel des unendlich langen Flügels in wagerechter Strömung entspricht beim endlichen Flügel der Winkel α' zwischen der Profilsehne und der unter dem Winkel φ geneigten Strömungsrichtung (vgl. Fig. 139, S. 146). Wir müssen also erwarten, daß die Abhängigkeit zwischen c_a und dem

[1]) Ergebnisse der Aerodyn. Vers.-Anst. 1, 50, 1921.

„wirksamen Anstellwinkel" $\alpha' = \alpha - \varphi$ bei allen in Betracht kommenden Seitenverhältnissen dieselbe sein wird. Nach Gl. (2) von § 15 ist

$$tg\,\varphi = \frac{A}{\pi\, p_d\, b^2} = \frac{c_a F}{\pi\, b^2},$$

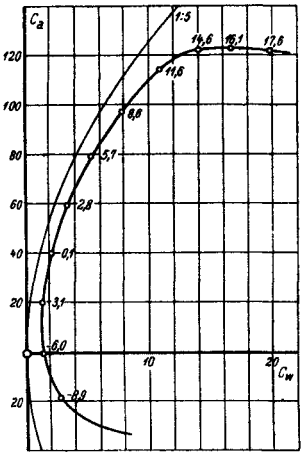
also ist, wenn $\alpha' = f(c_a)$ geschrieben wird,

$$\alpha = \alpha' + \varphi = f(c_a) + \frac{c_a}{\pi}\frac{F}{b^2} \quad \cdot \cdot \cdot (3)$$

Will man wieder für gleiches c_a einen Anstellwinkel α_2 eines Flügels 2 aus einem Versuch mit einem anderen Flügel 1 berechnen, so ergibt sich

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{c_a}{\pi}\left(\frac{F_2}{b_2{}^2} - \frac{F_1}{b_1{}^2}\right) \quad \cdot \cdot \cdot (4)$$

Fig. 146.

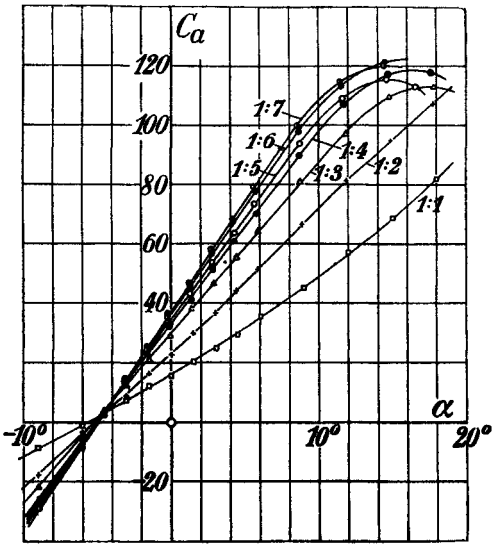


Parabel des induzierten Widerstandes.

Auch Gl. (4) ist durch Versuche gut bestätigt. Fig. 147 gibt den Verlauf von c_a mit dem Anstellwinkel bei den vorhin erwähnten Versuchen mit sieben Flügeln wieder; Fig. 148 zeigt die auf das Seitenverhältnis 1 : 5 umgerechneten Anstellwinkel. Auch hier ist die Übereinstimmung in den früher erwähnten Grenzen recht befriedigend.

Bei irgendwelchen zusammengesetzten Tragflügelanordnungen, wie z. B. bei Doppeldeckern, lassen sich sehr ähnliche Beziehungen angeben. Es zeigt sich, daß man die Formeln (1) und (2) auch für solche zusammengesetzte

Fig. 147.



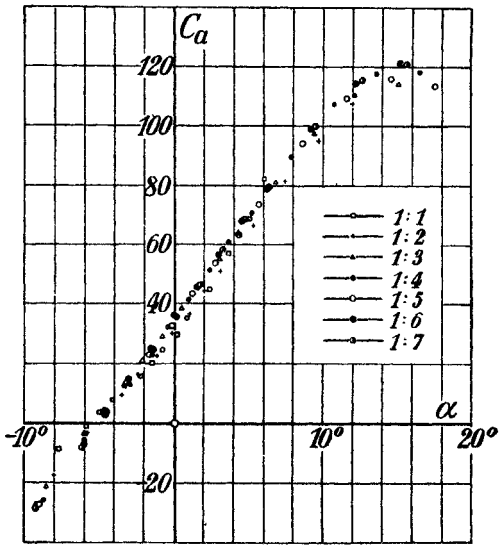
Auftriebszahlen von rechteckigen Tragflügeln verschiedenen Seitenverhältnisses, abhängig vom Anstellwinkel.

Flügelanordnungen verwenden kann, wenn $\varkappa \frac{F}{b^2}$ statt $\frac{F}{b^2}$ gesetzt wird, wobei $\varkappa$ ein nur von der Anordnung abhängiger Zahlwert ist; bei den günstigen Anordnungen ist $\varkappa$ regelmäßig kleiner als 1. Für Doppeldecker von gleicher Spannweite beider Flügel kann genähert

$$\varkappa = \frac{0{,}975 + 1{,}44\, h/b}{1 + 3{,}5\, h/b}$$

gesetzt werden; b ist dabei die Spannweite, h der Abstand der beiden Flügel voneinander. Die Formel kann von $b = 2h$ bis $b = 15h$ verwendet werden.

Fig. 148.



Umrechnung der Versuchsergebnisse von Fig. 147 auf das Seitenverhältnis 1 : 5.

An Stelle der Formeln (3) und (4) können ebenfalls mit gewisser Annäherung ähnliche Formeln gebraucht werden, aber mit einem Wert $\varkappa'$ an Stelle von $\varkappa$, der größer als $\varkappa$ ist [Einfluß der Stromlinienkrümmung, verursacht durch den anderen Flügel][1]).

§ 17. Propeller. Im Gegensatz zu den Tragflügeln, die eine zur Bewegungsrichtung senkrechte Kraft erzeugen sollen, haben die Propeller die Aufgabe, eine Kraft in der Bewegungsrichtung hervorzubringen und damit also Nutzarbeit zu leisten. Ist die Kraft $= S$ („Propellerschub") und die Relativgeschwindigkeit des Fahrzeuges gegen das Medium $= v$, so ist die sekundliche Nutzarbeit oder „Nutzleistung" $L_0 = Sv$. Nach dem Impulssatz arbeitet der Propeller so, daß er dauernd neue Flüssigkeitsmassen in Bewegung setzt. Ist die sekundliche Masse $= M$ und die erteilte Geschwindigkeit w, so wird der Propellerschub S gleich dem Impuls Mw. Mit der Erteilung der Geschwindigkeit w ist eine kinetische Energie der in Bewegung

[1]) Vgl. Ergebnisse der Aerodyn. Versuchsanstalt 8, 9.

gesetzten Flüssigkeitsmassen verbunden, deren Erzeugung einen zusätzlichen Energieaufwand bedeutet. Pro Sekunde wird hierfür eine Leistung $L' = M \frac{w^2}{2}$ verbraucht. Ist der Propellerschub, also das Produkt Mw gegeben, so wird L' offenbar um so kleiner, je kleiner w, also je größer M ist. Es gilt also, tunlichst große Massen M zu erfassen und diesen eine kleine Geschwindigkeit zu erteilen, um die aufzuwendende Leistung $L_0 + L'$ möglichst zu verringern. Diese Leistung ist noch nicht der Gesamtaufwand; dieser enthält noch einen dritten Anteil L'', der durch Reibung und Verwirbelung verbraucht wird. Man versteht unter dem Wirkungsgrad η das Verhältnis der Nutzleistung zum Aufwand, also

$$\eta = \frac{L_0}{L_0 + L' + L''} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Neben diesem „Gesamtwirkungsgrad" unterscheidet man noch den theoretischen Wirkungsgrad

$$\eta_{\text{th}} = \frac{L_0}{L_0 + L'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

und den hydraulischen Wirkungsgrad oder Gütegrad

$$\eta_h = \frac{L_0 + L'}{L_0 + L' + L''} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Wie leicht zu sehen, ist $\eta = \eta_{\text{th}} \cdot \eta_h$. Für den theoretischen Wirkungsgrad läßt sich wegen $L' = M \frac{w^2}{2} = S \cdot \frac{w}{2}$ (siehe oben) auch schreiben

$$\eta_{\text{th}} = \frac{S \cdot v}{S v + S w/2} = \frac{v}{v + w/2} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

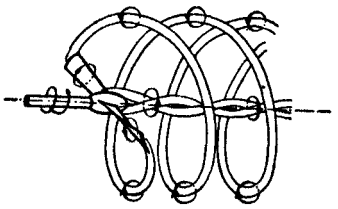
Hieraus ist zu ersehen, daß η_{th} immer nahe an 1 gebracht werden kann, wenn w klein gegen v gemacht wird, was nach dem Früheren dadurch erreicht wird, daß man große Flüssigkeitsmassen erfaßt, also den Querschnitt des vom Propeller verarbeiteten Flüssigkeitsstroms groß macht. In Wirklichkeit sind dem freilich durch technische Gesichtspunkte häufig ziemlich enge Grenzen gezogen, auch haben zu große Propeller einen kleineren hydraulischen Wirkungsgrad, wodurch unter Umständen der Gewinn wieder aufgehoben wird.

Die wichtigsten Arten der Propeller sind der Schaufelradpropeller und der Schraubenpropeller. Der erstere findet sich bei dem „Raddampfer" und wirkt so, daß die Schaufeln des Rades der Reihe nach in das Wasser eintauchen und dem zwischen den Schaufeln befindlichen Wasser eine Geschwindigkeit nach hinten erteilen. Die Schaufelkanten erzeugen dabei Trennungsflächen (vgl. vorigen Abschnitt § 6); das Wasser zwischen den Schaufeln erhält annähernd die Geschwindigkeit der Schaufeln und behält diese nach dem Herausziehen der Schaufeln zunächst bei (später erfolgt natürlich Vermischung mit dem übrigen Wasser entsprechend den Ausführungen von § 5 des vorliegenden Abschnitts). Bei einer Fahrgeschwindigkeit des Schiffes $= v$ und einer Rückwärtsgeschwindigkeit des angetriebenen Wassers $= w$ wird also die Umfangsgeschwindigkeit des Rades annähernd

$= v + w$; wird die Umfangskraft $= S$ gesetzt (genau genommen ist S nur die wagerechte Komponente der Schaufeldrücke, deren Richtung im allgemeinen gegen die Wagerechte abweicht!), so ergibt sich ein Leistungsaufwand $= S(v + w)$, also ein Wirkungsgrad $\eta = \frac{Sv}{S(v+w)} = \frac{v}{v+w}$. Der Vergleich mit dem Früheren lehrt, daß hier im ganzen die Leistung $L_0 + 2L'$ aufzuwenden ist, wovon das zweite L' auf Rechnung der durch die Schaufeln erzeugten Wirbel zu setzen ist. Durch allerhand Nebeneinflüsse ergeben sich noch weitere Verluste. Der Wirkungsgrad kann aber durch Wahl eines kleinen w, d. h. großer wirksamer Schaufelflächen immerhin ganz gut gemacht werden (z. B. Anordnung von Schaufelrädern hinter dem Schiff in der ganzen Schiffsbreite, wie dies bei neueren Donaudampfern ausgeführt ist). Die großen, langsam umlaufenden Räder sind aber vom maschinenbaulichen Standpunkt aus unerwünscht, so daß man sie nur bei Fluß- und Binnenseedampfern ausführt, wo des geringen Tiefgangs des Schiffes wegen Schraubenpropeller nicht anwendbar sind.

Diese letzteren sind da, wo der erforderliche Tiefgang vorhanden ist, durch ihren kleineren Durchmesser und ihre größere Drehungszahl (die leichtere Antriebsmaschinen ergibt) überlegen. Für den Antrieb von Luftfahrzeugen kommen praktisch allein die Schraubenpropeller in Betracht.

Fig. 149.



Wirbelsystem einer Luftschraube.

Die Schraubenpropeller erzeugen ihren Schub nach dem Tragflügelprinzip, das nur insofern abgeändert ist, als die „Schraubenflügel" sich durch die Drehung des Propellers bei gleichzeitigem Fortschreiten auf Schraubenlinien fortbewegen, statt der geradlinigen Bewegung der Tragflügel. Von den Enden der Flügel gehen auch hier Wirbel aus (vgl. Fig. 149); die in der Nähe der Nabe austretenden Wirbel der verschiedenen Flügel, die gleichen Drehsinn haben, vereinigen sich dabei zu einem „Nabenwirbel"; die äußeren Wirbel umschlingen schraubenförmig die ganze durch den Propeller hindurchgegangene Flüssigkeitsmasse[1]). Wenn wir vorübergehend sehr viele Propellerflügel annehmen, dann schließen die äußeren Wirbel einen nahezu geschlossenen Strahl ein (die enge Folge von Wirbeln ist nahezu einer Trennungfläche äquivalent, vgl. vorigen Abschnitt § 11, c). Der Strahl ist gegenüber der übrigen Flüssigkeit in fortschreitender und drehender Bewegung. Die fortschreitende Bewegung hängt unmittelbar mit der Aufgabe des Propellers zusammen, eine Schubkraft zu erzeugen; die drehende Bewegung ist ein notwendiges Übel; in günstigen Fällen ist ihre kinetische Energie verhältnismäßig gering.

Eine wirklich befriedigende Theorie der verwickelten Vorgänge im Schraubenpropeller ist bisher nicht vorhanden. Soweit man die vom Propeller

[1]) Vgl. H. Föttinger, Vortrag auf der flugwissenschaftl. Versammlung zu Göttingen 1911 (München 1912, S. 40).

erzeugten Zusatzgeschwindigkeiten als sehr klein gegen die Fahrgeschwindigkeit ansehen kann (schwach belasteter Propeller), lassen sich Überlegungen anwenden, die mit denen der Tragflügeltheorie verwandt sind [1]); jedoch sind die praktisch angewandten Propeller meist nicht schwach belastet. Hier mag es ausreichen, zwei Gesichtspunkte etwas näher herauszuarbeiten, die einen gewissen Überblick über die obwaltenden Verhältnisse vermitteln.

Der erste ergibt sich aus der Anwendung von Impuls- und Energiesätzen auf eine idealisierte Schraube, bei der angenommen wird, daß sie jedem durch den Schraubenkreis hindurchtretenden Flüssigkeitsteilchen eine Druckerhöhung erteilt. Eine solche Druckerhöhung durch die Wirkung eines Flügelsystems ist nach den Darlegungen von § 13, a des vorigen Abschnitts verständlich. Zur Vereinfachung soll nun angenommen werden, daß alle durch den Schraubenkreis hindurchtretenden Flüssigkeitsteilchen genau die gleiche Erhöhung ihres Druckes erfahren, was in den überwiegenden Teilen des Schraubenkreises durch geeignete Wahl der Flügelbreite möglich ist. In der Nähe der Nabe, wo die Umlaufgeschwindigkeit der Flügel ungenügend ist, und an den Flügelspitzen, wo die Flüssigkeit dem Flügel ausweichen kann, ist dies allerdings nicht möglich, doch kann man diese Umstände dadurch berücksichtigen, daß man als ideale Schraubenkreisfläche F eine Fläche wählt, die nach Abzug der unwirksamen Gebiete von der wirklichen Schraubenkreisfläche übrigbleibt.

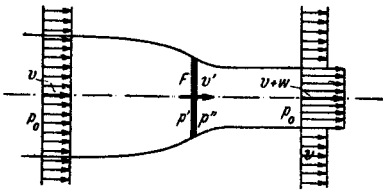
Weiter soll die Rotationsbewegung, die die Schraube der Flüssigkeit in Wirklichkeit erteilt, unberücksichtigt bleiben. Man hat also jetzt einen Idealpropeller, der jedem durch eine gegebene Kreisfläche F hindurchtretenden Flüssigkeitsteilchen eine Druckerhöhung (d. h. Erhöhung der Konstanten der Bernoullischen Gleichung) $= \Delta p$ erteilt, während natürlich die außerhalb des Propellerkreises vorbeiströmenden Flüssigkeitsteilchen eine solche Veränderung nicht erfahren. Da sich in einiger Entfernung vom Propeller der Druck völlig ausgleicht, erhält man also einen Strahl mit erhöhter Geschwindigkeit hinter dem Propeller. Die durch den Schraubenkreis gehenden Stromlinien bilden dabei die Strahlgrenze (vgl. Fig. 150). Im einzelnen liefert diese sogenannte „Strahltheorie" die folgenden Aussagen:

In einem Bezugssystem, in dem der Schraubenmittelpunkt ruht, hat man eine Zustromgeschwindigkeit v, die der Fahrgeschwindigkeit der Schraube entspricht. Die Abstromgeschwindigkeit ist dann $v + w$, beides in solchen Entfernungen von der Schraube, in denen das Druckfeld der Schraube als ausgeglichen gelten darf, also der ungestörte Druck p_0 herrscht. Die Durchflußgeschwindigkeit durch die Schraube ist unter dem Einfluß des Druckfeldes von v verschieden; sie liegt zwischen v und $v + w$ (vgl. Fig. 150). Wir wollen dabei die Schraube auch noch in der Weise idealisieren, daß wir ihre Erstreckung in der Strömungsrichtung vernachlässigen. Dann ist die Geschwindigkeit unmittelbar hinter der Schraube aus Gründen der Kontinuität

[1]) Vgl. etwa A. Betz, Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust, Göttinger Nachr. 1919, S. 193 = Vier Abhandl. zur Hydrodynamik und Aerodynamik, S. 68.

mit der unmittelbar vor der Schraube identisch; sie sei mit v' bezeichnet. Der Drucksprung Δp kommt nun so zustande, daß der Druck p' unmittelbar vor der Schraubenkreisebene niedriger ist als der ungestörte Druck, der Druck p'' hinter der Schraube aber höher als dieser. Die Bernoullische Gleichung liefert nun für die Zustände vor und hinter der Schraube

Fig. 150.



$$p_0 + \frac{\varrho v^2}{2} = p' + \frac{\varrho v'^2}{2}$$

$$p_0 + \frac{\varrho (v+w)^2}{2} = p'' + \frac{\varrho v'^2}{2}.$$

Für den Drucksprung $\Delta p = p'' - p'$ ergibt sich hieraus durch Subtraktion

$$\Delta p = \frac{\varrho (v+w)^2}{2} - \frac{\varrho v^2}{2} = \varrho w \left(v + \frac{w}{2}\right) \cdot \quad \cdots \quad (5)$$

Wir wenden nun den Impulssatz auf zweierlei Weise an:

1. Für eine Kontrollfläche, die die Schraubenkreisebene möglichst eng umschließt. Die Geschwindigkeit ist in der Grenze vor und hinter der Schraubenkreisebene gleich und $= v'$, trägt also zum Impuls nichts bei, dagegen bringt der Drucksprung Δp auf der Fläche F eine Kraft, die gleich dem Schraubenschub S ist:

$$S = F \Delta p = \varrho F w \left(v + \frac{w}{2}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

2. Für eine Kontrollfläche, die durch die Stromlinien durch den Schraubenkreis und eine Fläche weit davor und eine Fläche weit dahinter abgegrenzt ist. Die durchfließende Menge ist hier $= \varrho F v'$, sie hat vorher die Geschwindigkeit v, hinterher die Geschwindigkeit $v + w$; das Druckintegral bringt, wie eine nähere Untersuchung zeigt, keinen Beitrag, also wird der Schub S auch

$$S = \varrho F v' \cdot w \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

Der Vergleich von (6) und (7) liefert die bemerkenswerte Beziehung

$$v' = v + \frac{w}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

Die aufzuwendende Leistung unseres „idealen Strahlpropellers" läßt sich an Hand der Kontrollfläche I oder II berechnen. Die erste liefert die Pumpleistung

$$L = F v' \cdot \Delta p = S v' \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

(Volumen pro Zeiteinheit $\times$ Druckunterschied); die zweite in der früheren Weise Masse pro Zeiteinheit $\times$ Unterschied der halben Geschwindigkeitsquadrate:

$$L = \varrho F v' \left(\frac{(v+w)^2}{2} - \frac{v^2}{2}\right),$$

was dasselbe gibt. Die Nutzleistung ist wie früher $L_0 = S \cdot v$, so daß der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{S v}{S v'} = \frac{v}{v'} = \frac{v}{v + w/2} \cdots\cdots\cdots (10)$$

ist. Dies stimmt mit dem Ausdruck η_{th} von Gl. (4) überein. Der ideale Strahlpropeller ist somit gleichzeitig ein Idealbild für jede Propellerart und eignet sich daher für Vergleichsrechnungen mit ausgeführten Propellern.

Eine wichtige Beziehung ergibt sich noch, wenn man aus Gl. (6) w ausrechnet und diesen Wert in die Wirkungsgradformel (4) einführt. Man erhält zunächst

$$w = -v + \sqrt{v^2 + \frac{2S}{\varrho F}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

wofür man unter Einführung der „Belastungsziffer"

$$c_s = \frac{S}{{}^1/_2 F \varrho v^2}$$

auch schreiben kann:

$$\frac{w}{v} = -1 + \sqrt{1 + c_s} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11a)$$

(das andere Vorzeichen der Wurzel hat keinen physikalischen Sinn). Diese gibt nun

$$\eta_{th} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + c_s}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Man sieht, daß mit verschwindender Belastungsziffer η_{th} gegen 1 geht; mit wachsendem c_s nähert es sich dagegen der Null. Die Formel (12) liefert für jede Schraube, die einen verlangten Schub S mittels einer gegebenen Schraubenkreisfläche F bei gegebener Fahrgeschwindigkeit v hervorbringen soll, eine obere Grenze für den Wirkungsgrad. Sie liefert auch eine sehr willkommene Vergleichsbasis bei Versuchen. Das Verhältnis des gemessenen Wirkungsgrades η zu η_{th} ist der früher schon erwähnte Gütegrad.

Die vorstehende Beurteilung versagt offenbar bei Hubschrauben, die eine Last schwebend erhalten sollen. Hier ist zwar dauernd Leistung aufzuwenden, aber, falls kein Steigen vorliegt, ist keine Nutzleistung da. Man kann hier nur nach dem theoretischen Leistungsaufwand bei gleichem gehobenem Gewicht fragen und diesen mit dem wirklichen Aufwand vergleichen.

Wir können unser Formelsystem so verwenden, daß wir $v = 0$ setzen. Dann ist $v' = w/2$ und gemäß (9)

$$L_{th} = {}^1/_2 S w,$$

wobei hier S das gehobene Gewicht bedeutet. Gl. (6)

$$S = {}^1/_2 \varrho F w^2$$

liefert wieder das Mittel, um w fortzuschaffen. Es wird $w = \sqrt{\frac{2S}{\varrho F}}$ und daher

$$L_{th} = \sqrt{\frac{S^3}{2 \varrho F}}; \quad (13)$$

hieraus läßt sich wieder ein Gütegrad $= L_{th}/L$ bilden.

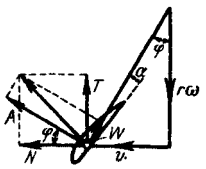
Die erforderliche Leistung einer Hubschraube ist also bei gleichbleibendem Gütegrad um so kleiner, je größer F gewählt wird! Andererseits wächst in

Wirklichkeit mit wachsender Größe der Hubschraube deren Eigengewicht und damit also auch das zu hebende Gewicht S.

§ 18. Weiteres über Schraubenpropeller; Windmühlen. Um den Einblick in die Wirkungsweise der Propeller zu verbessern, seien nun die Verhältnisse an einem einzelnen Flügelblatt etwas näher studiert (sogenannte „Flügelblatt-Theorie").

Wir behandeln einen Abschnitt eines Flügelblattes, der zwischen den Radien r und $r + dr$ liegt, wie ein Stück eines Tragflügels, und zwar, genauer gesagt, wie ein Stück eines unendlich langen Tragflügels, falls wir uns vorbehalten, diejenige Geschwindigkeit in die Rechnung einzuführen, die sich als Relativgeschwindigkeit zwischen dem Flügelelement und der Flüssigkeit am Ort des Flügelelements ergibt. Diese Geschwindigkeit ist nun wieder durch den ganzen Propeller beeinflußt, und es hat hier also eine Rechnung einzusetzen, die in ihren Grundgedanken mit der der Tragflügeltheorie verwandt ist. Auch hier mag wieder der Vereinfachung halber die Drehung der Flüssigkeit in der Schraube vernachlässigt werden. Die Beeinflussung der axialen Strömung durch die Schraube kann dadurch berücksichtigt werden, daß man die Geschwindigkeit dieser Strömung gleich dem Wert v' nach Gl. (8) des vorigen Paragraphen setzt, wobei mit w nach Gl. (11a)

Fig. 151.



$$v' = {}^1/_2\, v\,(1 + \sqrt{1 + c_s})$$

gesetzt werden kann. Die Umfangsgeschwindigkeit des Flügelblattes ist $r \cdot \omega$ (ω die Winkelgeschwindigkeit). Damit wird die Relativgeschwindigkeit des Schraubenblattes zur Flüssigkeit $= \sqrt{v'^2 + r^2\omega^2}$, die Richtung ist durch $tg\,\varphi = \dfrac{v'}{r\,\omega}$ gegeben (vgl. Fig. 151). Ist das Flügelprofil um den kleinen Winkel α gegen diese Richtung geneigt, so ergibt sich ein dem Staudruck der Relativgeschwindigkeit und diesem Anstellwinkel entsprechender Auftrieb A in Richtung senkrecht zur Relativgeschwindigkeit und ein Widerstand W entgegengesetzt der Relativgeschwindigkeit, wobei A und W auf die Längeneinheit des Flügelblattes bezogen sein mag (auf das Element dr würde sich also $A\,dr$ und $W\,dr$ ergeben).

Für die weitere Rechnung werden nun zweckmäßig die Komponenten normal zur Schraubenkreisebene (N) und tangential zur umlaufenden Bewegung (T) gebildet. Die ersteren wirken also in der Richtung von v, vgl. Fig. 151, die letztere entgegengesetzt zur Richtung von $r\,\omega$. Wie leicht zu sehen, wird

$$\left.\begin{aligned} N &= A\cos\varphi - W\sin\varphi \\ T &= A\sin\varphi + W\cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die Integration der Normalkomponenten ergibt den Schub, die der Momente der Tangentialkomponenten das Drehmoment D, also bei n Flügeln

$$S = n\int_0^r N\,dr; \qquad D = n\int_0^r T\,r\,dr \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Man hätte statt dessen auch die Arbeitsleistungen am Element, $N dr \cdot v'$ und $T dr \cdot r\omega$ integrieren können und hätte daraus die Schubleistung gegen die Geschwindigkeit v', $S \cdot v'$ (Pumpleistung) und die durch den Motor aufzubringende Leistung $D\omega$ erhalten. Ein einfacher Begriff sei hier noch erwähnt, der Wirkungsgrad des einzelnen Flügelelements

$$\eta_{Fl} = \frac{N dr \cdot v'}{T dr \cdot r\omega} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Mit den obigen Werten von N und T und unter Berücksichtigung von $v' = r\omega \cdot tg\,\varphi$ ergibt sich, wenn noch die „Gleitzahl" $W'A = \varepsilon$ eingeführt wird,

$$\eta_{Fl} = \frac{1 - \varepsilon\, tg\,\varphi}{1 + \varepsilon\, ctg\,\varphi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Dieser Ausdruck weist ein Maximum bei einem Steigungswinkel φ auf, der (genähert) bei $\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}$ liegt. Da die Profilgleitzahl ε sehr klein ist ($\varepsilon = {}^1/_{20}$ bis ${}^1/_{50}$), ist aber das Maximum so flach, daß auch Steigungswinkel φ weit ab von diesem Maximum vom Standpunkt des Flügelwirkungsgrades noch fast ebenso brauchbar sind. Erst bei sehr kleinen Neigungen wird der Flügelwirkungsgrad unzulässig klein. In der Praxis entscheidet der Umstand, daß bei größeren Werten $tg\,\varphi$ der Flüssigkeit eine stärkere Drehgeschwindigkeit erteilt wird [1]), die wegen ihrer kinetischen Energie schädlich ist; deshalb wählt man für die äußeren Flügelteile, auf die es wegen ihrer großen Umfangsgeschwindigkeit hauptsächlich ankommt, wesentlich kleinere Steigungen als das obige Optimum, z. B. $tg\,\varphi = {}^1/_3$ bis ${}^1/_5$.

Der Zusammenhang zwischen dem Auftrieb A des Flügelelements und dem zugehörigen Staudruck liefert nun einen Weg für die Ermittlung der zu wählenden Flügelbreite in Abhängigkeit von r und für die des zugehörigen Anstellwinkels α. Jedoch ergibt sich bei schnellaufenden Wasserschrauben die Notwendigkeit, noch darauf Rücksicht zu nehmen, daß die Wasserströmung durch Luftausscheidung und Dampfbildung zerreißt, sobald der absolute Druck im Wasser sich dem Wert Null nähert. Man nennt diese Erscheinung „Kavitation" oder Hohlraumbildung (vgl. § 11 von Abschnitt IV). Man wird deshalb bei sehr schnelläufigen Wasserschrauben genötigt, sehr flache Profile und sehr kleine Anstellwinkel zu verwenden, um die Unterdrücke auf der Saugseite der Profile klein zu halten, und man erhält dann sehr breite Flügelblätter. Fig. 152 enthält nebeneinander die Stirnansicht und einen Profilschnitt einer Luftschraube (a), einer langsam laufenden Wasserschraube für einen Frachtdampfer (b) und einer schnell laufenden Wasserschraube für einen Turbinen-Schnelldampfer (c). Bei Luftschrauben ergibt sich noch eine etwas anders geartete Störung, wenn die Umfangsgeschwindigkeit die Schallgeschwindigkeit erreicht. Auch hier ist es nötig, sehr flache Profile anzuwenden, die aber meist sehr schmal bleiben (Reedschraube).

---

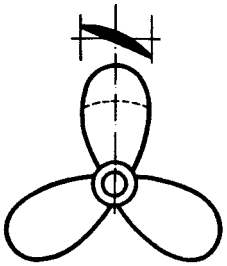
[1]) Man kann sich bei Untersuchung derartiger Verhältnisse auf die Theorie der Schaufelsysteme stützen, wie sie (allerdings ohne Reibung) in § 13, a des vorigen Abschnitts entwickelt worden ist.

Das wirkliche Verhalten der Wasser- und Luftschrauben pflegt durch Versuche festgestellt zu werden. Hier seien nur solche Versuche eingehender besprochen, bei denen die Schraube nicht in Verbindung mit dem Fahrzeug geprüft wird, sondern in der ungestörten Flüssigkeit für sich allein fährt. Im anderen Falle ergeben sich Störungen durch das Fahrzeug und Wechselwirkungen mit ihm, die das Gesamtbild sehr verwickelt machen [1]). Eine

Fig. 152a

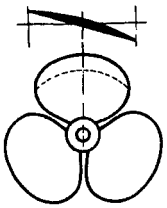
Luftpropeller.

Fig. 152b.



Langsam laufender Wasserpropeller.

Fig. 152c.



Schnell laufender Wasserpropeller.

maßgebende Größe für die Ordnung von Versuchsergebnissen ist offenbar das Verhältnis Fahrgeschwindigkeit : Umfangsgeschwindigkeit. Wir schreiben $\frac{v}{u} = \frac{v}{r\omega} = \lambda$ (v = Fahrgeschwindigkeit, u = Umfangsgeschwindigkeit r = Halbmesser des Schraubenkreises, ω = Winkelgeschwindigkeit) und nennen λ den Fortschrittsgrad. Für einen Schraubenpropeller, der aus Schraubenflächen von der Steigung h besteht, gibt es offenbar einen besonderen Fortschrittsgrad λ_1, bei dem die Schraube sich in der Flüssigkeit so verschiebt, daß sie nur Reibungswiderstand erzeugt. Offenbar ist $\lambda_1 = \frac{h}{2\pi r}$. Nur für Werte von λ unterhalb λ_1 haben die Schraubenblätter einen Anstellwinkel gegen die Strömung relativ zu ihnen, der einen positiven Schraubenschub erzeugt. Für die Betriebszustände mit $\lambda > \lambda_1$ hätte man keinen Propeller, sondern eine Windmühle. Für die üblichen Ausführungsformen der wirklichen Propeller gilt ganz Entsprechendes, nur daß eine einfache geometrische Interpretation von λ_1 fehlt.

Die bei den Versuchen meßbaren Kraftgrößen sind der Schub S und das zum Antrieb der Schraube vom Motor aufgewandte Drehmoment D. Die aufgewandte Leistung ist $L = D\omega$, die Nutzleistung wie früher $L_0 = S \cdot v$, so daß der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{Sv}{D\omega} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

wird.

[1]) Vgl. etwa A. Betz, Zeitschr. f. angew. Math. und Mech. 7, 431—436, 1927.

Um die Versuchsergebnisse in einer von den speziellen Abmessungen der Versuchsschraube unabhängigen Form darzustellen, verwendet man auch hier dimensionslose Größen, die ähnlich wie diejenigen der Tragflügel gebildet sind. In Deutschland scheint jetzt das folgende System dieser Größen das gebräuchlichste zu sein[1]):

$$k_s = \frac{S}{{}^1/_2\,\varrho\, u^2 \pi r^2} = \frac{S}{{}^1/_2\,\varrho\, \omega^2 \pi r^4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6\,\mathrm{a})$$

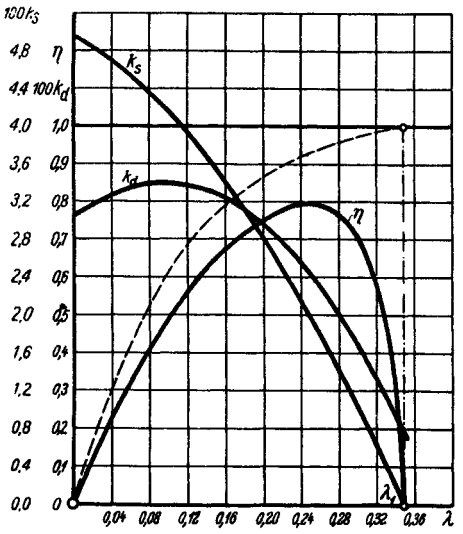
$$k_d = \frac{D}{{}^1/_2\,\varrho\, u^2 \pi r^3} = \frac{D}{{}^1/_2\,\varrho\, \omega^2 \pi r^5} = \frac{L}{{}^1/_2\,\varrho\, \omega^3 \pi r^5} \quad \ldots\ldots \quad (6\,\mathrm{b})$$

Da $v = \lambda \cdot r\omega$ ist, wird der Wirkungsgrad, wie sich an Hand von Gl. (5) leicht ergibt,

$$\eta = \frac{\lambda k_s}{k_d}.$$

Den Verlauf von k_s, k_d und η für eine Luftschraube gemäß Fig. 152a stellt Fig. 153 dar. Man erkennt, daß k_s und k_d in der Nähe von $\lambda = 0{,}35$ durch Null gehen. η ist seiner Bedeutung nach $= 0$ für $\lambda = 0$ und für $k_s = 0$. Es hat dazwischen also ein Maximum. Um den Vergleich mit η_{th} gemäß Formel (12) des vorigen Paragraphen zu ziehen, können wir zunächst den Belastungsgrad c_s ermitteln, der, wie leicht nachzuprüfen, $c_s = \frac{k_s}{\lambda^2}$ ist. Damit können wir also η_{th} punktweise ausrechnen und zu dem zugehörigen λ auftragen. Das ist in Fig. 153 durch die gestrichelte Linie geschehen. Man sieht, daß die Werte von η denen von η_{th} ziemlich nahekommen, ausgenommen in der Gegend von λ_1, wo η_{th} gegen 1 und η gegen 0 geht.

Fig. 153.



Kurven einer Luftschraube.

Bezüglich der Windmühlen, die hier kurz berührt werden mögen, lassen sich ganz ähnliche Betrachtungen anstellen wie für die Luftschrauben. Der anströmende Wind erfährt beim Durchtritt durch den Flügelkreis einen Druckabfall Δp, durch den eine Leistung $\pi r^2 \cdot v' \Delta p$ zur Verfügung gestellt wird, die nun entsprechend dem Flügelwirkungsgrad in Nutzleistung an der Windradwelle verwandelt wird; v' ist dabei wieder die

[1]) c_s und c_d, wenn die Kräfte auf den Staudruck der Geschwindigkeit v bezogen werden; k_s und k_d, wenn die Kräfte auf den Staudruck der Geschwindigkeit u bezogen werden.

axiale Durchtrittsgeschwindigkeit durch die Radebene. Die Formeln von § 17 lassen sich unmittelbar übertragen, nur daß hier die Geschwindigkeit hinter dem Rade kleiner ist als vorher. Es muß also für den Geschwindigkeitsunterschied w hier ein negativer Wert eingeführt werden. Schreibt man $-w$ an Stelle von w, um wieder eine positive Größe zu erhalten, so wird gemäß Gl. (5) von § 17

$$\Delta p = \varrho w \left(v - \frac{w}{2}\right)$$

und gemäß Gl. (8)

$$v' = v - \frac{w}{2},$$

so daß die verwandelbare Leistung

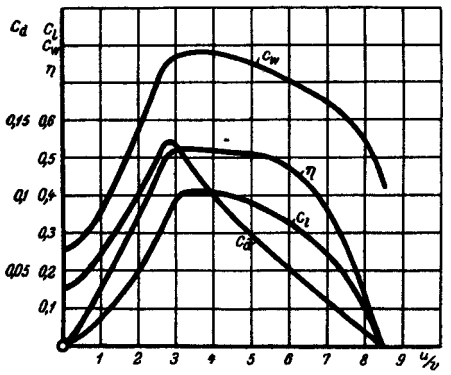
$$L_1 = \pi r^2 \cdot v' \Delta p = \pi r^2 \cdot \varrho w \left(v - \frac{w}{2}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

wird. Es kann leicht nachgewiesen werden, daß diese Leistung bei gegebenem v und r dann ein Maximum wird, wenn die Geschwindigkeit hinter dem Rade $v - w = {}^1/_3 v$, also $v' = {}^2/_3 v$ gewählt wird. Damit wird $L_{1\,\max} = {}^8/_{27} \pi r^2 \varrho v^3$. Man kann die Leistung L_0, die durch den Radkreis fließen würde, wenn das Rad keinen Widerstand bieten würde, als Vergleichsgröße heranziehen und den Ausnutzungsgrad $c_l = L/L_0$ bilden. Da die sekundlich durch den Radkreis fließende Masse $= \varrho \pi r^2 v$ und die kinetische Energie der Masseneinheit $= {}^1/_2 \varrho v^2$ ist, wird $L_0 = {}^1/_2 \varrho \cdot \pi r^2 v^3$, und damit der maximale theoretische Ausnutzungsgrad $c_{l\,\max} = L_{1\,\max}/L_0 = {}^{16}/_{27} = 0{,}5926$.

Ein Wirkungsgrad hat bei den gewöhnlichen Windmühlen keinen Sinn, da die Windenergie in beliebigen Mengen zur Verfügung steht. Die Wirtschaftlichkeit kann nur nach dem Verhältnis der Leistung zu den aufgewandten Kosten beurteilt werden, wobei eine billige Konstruktion unter Umständen besser abschneiden kann als eine aerodynamisch hochwertige, aber teurere Konstruktion. Anders ist es mit Windmühlen auf Luftfahrzeugen, durch die mittels des Fahrtwindes irgendwelche Hilfsmaschinen angetrieben werden. Hier muß der Schub S der Windmühle vom Hauptpropeller des Luftfahrzeuges mit bestritten werden. Es wird also die Leistung $S \cdot v$ aufgewandt, und der Wirkungsgrad ist

$$\eta = L/Sv.$$

Fig. 154.



Kurven einer Windmühle.

Bei den Versuchen mit Modellen von Windmühlen kann man bei gegebener Windstärke verschieden starke bremsende Drehmomente ausüben und erhält mit wachsendem Moment abnehmende Umfangsgeschwindigkeit. Ähnlich wie bei Schrauben kann man Momentenzahlen bilden und diese abhängig von dem Verhältnis $u : v$ (Umfangsgeschwindigkeit zu Windgeschwindigkeit) auftragen. Ebenso kann man die

Ausnutzungsgrade c_l auftragen. Die Windräder zeigen dabei je nach ihrer Schraubensteigung verschiedene „Schnelläufigkeit". Fig. 154 gibt als Beispiel Kurven für einen „Schnelläufer".

§ 19. Strömungsmaschinen. (Turbinen, Pumpen und Gebläse.) Wasserkraftmaschinen verwandeln die Arbeitsleistung des um eine Höhe H herabsinkenden Wassers in eine Arbeitsleistung an einer drehenden Welle, die Pumpen Arbeitsleistung an einer drehenden Welle in Hebung von Wasser auf eine Höhe H; die Gebläse verrichten entsprechende Arbeitsleistungen an strömender Luft. Gebläse für niedrige Druckunterschiede heißen auch Ventilatoren.

Ist die sekundliche Wassermenge (Volumen/sec) $= Q$ und das Raumgewicht γ, so ist die der Wasserkraftmaschine zugeführte Leistung $L_0 = \gamma Q H$.

Zu den Wasserkraftmaschinen gehören neben den Turbinen auch die Wasserräder, deren charakteristisches Merkmal ist, daß das Wasser zwischen den Schaufeln praktisch zur Ruhe kommt. Bei den Turbinen bleibt es relativ zu den Schaufeln in Bewegung. Bei den Wasserrädern kommt (sofern es sich um die besseren Bauarten handelt, hauptsächlich die Gewichtswirkung des Wassers zur Geltung, daneben auch der Impuls (Stoß) beim Eintritt des Wassers zwischen die Schaufeln. Weitere Einzelheiten mögen hier übergangen werden, da die Wasserräder heute als gänzlich veraltet angesehen werden müssen und außerdem vom Standpunkt der Strömungslehre nicht allzuviel Interesse bieten.

Die Turbinen arbeiten nach einem anderen Prinzip, sie wandeln die kinetische Energie des unter einem Druckunterschied ausfließenden Wassers in nutzbare Arbeitsleistung um.

Das raschströmende Wasser wird durch eine Leitvorrichtung „stoßfrei" zwischen die Turbinenschaufeln eingeführt und nun durch die Schaufeln so abgelenkt, daß es das Rad mit einer möglichst kleinen Absolutgeschwindigkeit verläßt. Da bei diesen Vorgängen nirgends größere Verluste auftreten, so folgt aus dem Energieprinzip, daß von dem, was nach Abzug der kinetischen Energie des austretenden Wassers von der gesamten Gefälleleistung noch verbleibt, der weitaus überwiegende Teil an der drehenden Welle der Turbine nachgewiesen werden kann.

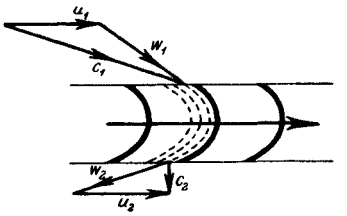
In bezug auf die Form, in der sich die Energieumsetzung vollzieht, unterscheidet man zwei Arten von Turbinen, die „Gleichdruckturbinen" und die „Überdruckturbinen". Bei den ersteren wird die ganze verfügbare Gefälleleistung vor dem Rade in kinetische Energie verwandelt, indem man das Wasser durch geeignete Mündungen oder Leitkanäle frei ausströmen läßt. Das Wasser, das mit der Absolutgeschwindigkeit c_1 [1]) auf das mit der Geschwindigkeit u_1 umlaufende Rad trifft, hat relativ zum Rade eine Geschwindigkeit w_1 (vgl. Fig. 155). Die Eintrittskanten der Schaufeln haben

[1]) Die Bezeichnungen c für Absolutgeschwindigkeiten, u für Umfangsgeschwindigkeiten, und w für Relativgeschwindigkeiten sind bei den Turbineningenieuren üblich.

ungefähr die Richtung von w_1; das Wasser wird nun von den Schaufeln in die Richtung w_2 abgelenkt, wobei, abgesehen von mäßigen Verlusten durch Oberflächenreibung, der Betrag der Relativgeschwindigkeit derselbe bleibt. Die Absolutgeschwindigkeit c_2 wird durch Konstruktion eines Geschwindigkeitsdreiecks aus w_2 und u_2 erhalten. Im günstigsten Betriebszustand ist sie nahezu senkrecht zum Schaufelsystem und sehr klein. Bei den Überdruckrädern wird zunächst nur ein mäßiger Teil des Gefälles in Geschwindigkeit umgesetzt; das Wasser tritt deshalb mit einem erheblichen Überdruck in das Rad ein. Die Einzelheiten ergeben sich aus Fig. 156. Das Wasser erfährt nun in den sich verengenden Schaufelkanälen einen erheblichen Zuwachs der Relativgeschwindigkeit und verbraucht dabei den Rest des Gefälles. Im günstigsten Betriebszustand ist die absolute Wassergeschwindigkeit hinter dem Rade wieder sehr klein und ungefähr senkrecht zum Schaufelsystem.

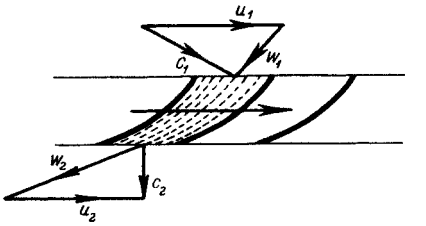
Die Überdruckturbinen arbeiten notwendig mit vollgefüllten Schaufelkanälen. Bei den Gleichdruckturbinen pflegt man dagegen durch geeignete

Fig. 155.



Geschwindigkeitsplan einer Gleichdruckturbine.

Fig. 156.



Geschwindigkeitsplan einer Überdruckturbine.

Ausbildung der Schaufelform dafür zu sorgen, daß das Wasser mit einer freien an Luft grenzenden Oberfläche durch die Schaufeln fließt. Da hierbei die Schaufeln nur einseitig vom Wasser berührt werden, ergibt sich weniger Reibung als in dem Falle der zweiseitigen Berührung.

Wenn von der Reibung und den Zentrifugalwirkungen im Rade abgesehen wird, so ist

$$H = \frac{1}{2g}(c_1^2 + w_2^2 - w_1^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Das erste Glied liefert das Teilgefälle in der Leitvorrichtung, die Differenz der beiden anderen das Teilgefälle im Laufrad (für $w_2 = w_1$, also für die Gleichdruckturbine ist dieser letztere Anteil gleich Null).

Die Theorie der Turbinen, bei der eine gleiche Ablenkung aller Wasserteilchen angenommen wird, stammt von Euler. Von ihm stammt auch die folgende „Hauptgleichung der Turbinentheorie", die auf den Impulsmomentensatz (§ 13 des vorigen Abschnitts, Abs. b) aufbaut. Die Umfangskomponenten der absoluten Eintritts- und Austrittsgeschwindigkeit, dort mit $w_1 \cos\beta_1$ und $w_2 \cos\beta_2$ bezeichnet, mögen jetzt in der bei den Turbinenfachleuten üblichen Bezeichnung c_{u_1} und c_{u_2} heißen. Dann ist das Drehmoment an der Turbinenwelle

$$D = \varrho Q (r_1 c_{u_1} - r_2 c_{u_2}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Die Nutzleistung L ist dann $= D\omega$; mit $r_1\omega = u_1$ und $r_2\omega = u_2$ wird dann

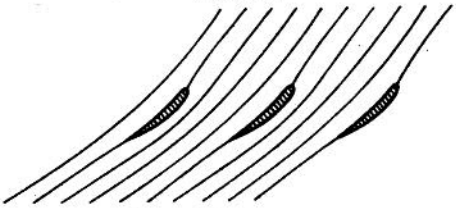
$$L = \varrho Q (u_1 c_{u_1} - u_2 c_{u_2}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Andererseits ist $L = \eta L_0 = \eta \gamma Q H$, wobei η der hydraulische Wirkungsgrad ist. Für diesen ergibt sich also unter Berücksichtigung von $\gamma = \varrho g$:

$$\eta = \frac{u_1 c_{u_1} - u_2 c_{u_2}}{g H} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Bei senkrechtem Austritt verschwindet c_{u_2}, so daß $u_1 c_{u_1} = \eta g H$ wird. Aus dieser letzteren Gleichung, in Verbindung mit Fig. 155 und 156, geht deutlich hervor, daß bei gleichem Gefälle die Überdruckturbinen wesentlich größere Umfangsgeschwindigkeit haben als die Gleichdruckturbinen. Man findet deshalb bei kleinen und mittleren Gefällen regelmäßig Überdruckturbinen, bei großen Gefällen aber Gleichdruckturbinen ausgeführt.

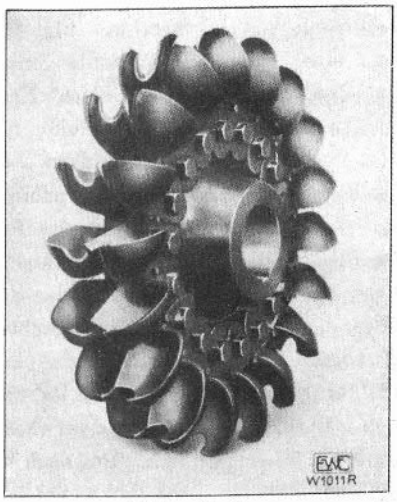
Fig. 157.



Schaufelströmung.

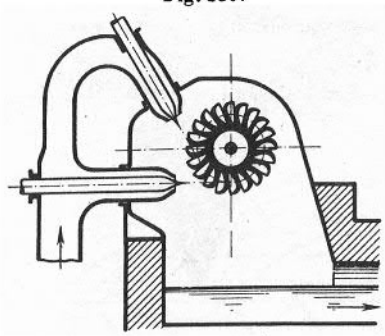
Von der Annahme der gleichen Ablenkung aller Wasserteilchen sucht sich die neueste hydrodynamische Auffassung des Turbinenproblems frei zu machen. Man sieht nicht mehr den Raum zwischen zwei Schaufeln einer Überdruckturbine als einen „Kanal" an, sondern betrachtet die Schaufeln als einzelne in der Strömung befindliche „Flügel", die sich dabei gegenseitig beeinflussen [1]). Bei den modernen

Fig. 158.



Pelton-Rad.

Fig. 159.



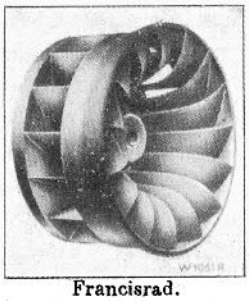
Pelton-Rad mit Regulierdüsen.

Schnelläuferbauarten, die sehr große Abstände der Schaufeln aufweisen, wird nur diese Auffassung den wirklichen Vorgängen einigermaßen gerecht. Aber auch in den Fällen, wo man noch von Schaufelkanälen sprechen

[1]) Vgl. Bauersfeld, Zeitschr. d. Ver. Deutsch. Ing. **66**, 461 u. 514, 1922, oder Prandtl, ebenda **65**, 959, 1921. Vgl. auch die Rechnung über das Schaufelgitter in § 13 des vorigen Abschnitts.

kann, zeigt sich, daß man die mittlere Eintritts- und Austrittsrichtung nicht mit den entsprechenden „Schaufelwinkeln“ gleichsetzen darf, wie man dies im Rahmen der alten Theorie getan hat. Die Schaufelwinkel stellen vielmehr ein Maximum der Ablenkung dar, alle nicht unmittelbar an den Schaufeln anliegenden Wasserfäden erfahren geringere Ablenkungen. Im Falle der ebenen Strömung sind diese Verhältnisse in neuester Zeit durch verschiedene Arbeiten aufgeklärt worden [1]). Fig. 157 zeigt ein Beispiel einer solchen Schaufelströmung. Man erkennt, daß die mittlere Ablenkung der Stromlinien hinter dem zwischen Ein- und Austrittswinkel der Schaufeln erheblich zurückbleibt.

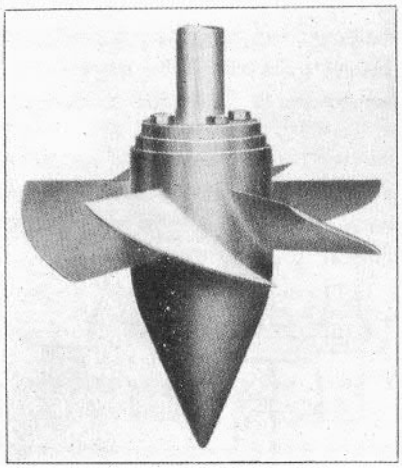
Fig. 160.



Francisrad.

Um von den praktischen Ausführungsformen der Wasserturbinen einige Beispiele zu geben, seien einige typische Laufräder im Bilde wiedergegeben. Fig. 158 zeigt die moderne Ausführung eines Gleichdruckrades oder Freistrahlrades, wie es sich aus dem sogenannten Peltonrad entwickelt hat. Ein oder mehrere Wasserstrahlen von kreisförmigem Querschnitt werden auf die an den links unten befindlichen Schaufeln erkennbaren Schneiden gerichtet und werden in den links und rechts von der Schneide befindlichen Muscheln um nahezu 180° umgelenkt. Die günstigste Radgeschwindigkeit liegt etwa bei der Hälfte der Wassergeschwindigkeit im Strahle. Fig. 159 zeigt eine etwas vereinfachte Skizze von dem Zusammenbau eines Freistrahlrades. In Fig. 160 ist eine übliche Form von Überdruckrädern dargestellt (sogenannte Francisturbine). Das Wasser tritt, aus einem das Rad umschließenden Leitapparat kommend, durch die linken Öffnungen in das Rad ein und verläßt es durch die rechten Öffnungen. Der Weg durch das Rad erfolgt in räumlich gewundenen Bahnen, doch ist im grundsätzlichen das Schema von Fig. 156 eingehalten. Um auch bei mäßigen Gefällen eine hohe Schnelläufigkeit zu erhalten, ist man zu Formen wie Fig. 161 gelangt (Kaplanturbine). Der Leitapparat ist dabei ähnlich wie bei der vorigen Turbinenart; er erzeugt eine spiralige Bewegung des Wassers von außen nach innen. Der Durchtritt durch das Rad erfolgt dann in axialer Richtung. Man kann es sich aus dem Francisrad entstanden denken, indem man von diesem nur die äußersten Schaufelteile ganz rechts in der Abbildung

Fig. 161.



Kaplanrad.

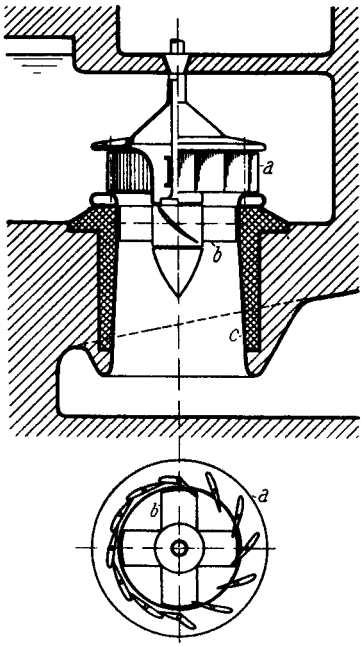
[1]) Vgl. Busemann, Z. f. ang. Math. u. Mech. 1928, S. 372; dort weitere Literatur.

beibehält, die übrigen Teile des Rades aber fortläßt. Eine Skizze des Zusammenbaues einer Kaplanturbine mit dem Leitapparat zeigt Fig. 162.

Bei den Überdruckturbinen wendet man regelmäßig zur Verringerung der Austrittsenergie noch ein meist schwach kegelig erweitertes „Saugrohr" an (vgl. Fig. 162, *c*). Dadurch, daß man das Saugrohr unter Wasser ausmünden läßt, wird auch das Gefälle so vollständig wie möglich verwertet.

Zur Anpassung der Turbinenleistung an den vorliegenden Leistungsbedarf wird die Wassermenge reguliert. Dies geschieht meist in automatischer Weise so, daß die Drehzahl der Turbine konstant gehalten wird. Bei den Freistrahlturbinen dient dazu die in den Düsen befindliche Regulierdnadel. Bei den Überdruckturbinen werden die Leitschaufeln (*a* in Fig. 162) verdreht, so daß die Durchflußkanäle weiter oder enger werden. Bei den Kaplanrädern findet man auch Verdrehung der Laufradschaufeln *b*, was eine verbesserte Anpassung an starke Veränderungen der Belastung ergibt.

Fig. 162.

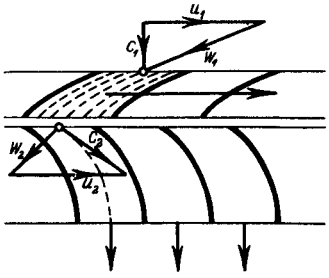


Kaplanturbine.
a Leitapparat, *b* Laufrad, *c* Saugrohr. Die Leitschaufeln sind in der rechten Hälfte der Grundrißzeichnung voll geöffnet, in der linken geschlossen dargestellt.

Die Wirkungsgrade bewegen sich bei guten Turbinen der verschiedenen Bauarten in der Gegend von 85 bis 90 v. H. Es mag bemerkt werden, daß auch bei den Dampfturbinen Gleichdruckräder und Überdruckräder unterschieden werden. Die Kompressibilität des Dampfes verursacht allerdings verschiedene Änderungen gegenüber den Wasserturbinen.

Die auf dem Flügelradprinzip beruhenden Pumpen, die gewissermaßen Umkehrungen der Turbinen (und zwar speziell der Überdruckturbinen) sind, scheiden sich in solche mit axialem Durchtritt (Schraubenpumpen) und solche mit radialem Durchtritt (Zentrifugalpumpen). Für die Förderung von Luft gibt es ganz entsprechende Maschinen, Schraubengebläse und Zentrifugalgebläse. Die Schraubenpumpen und -gebläse sind in ihrer Bauart den Schraubenpropellern ähnlich; die einfachsten unterscheiden sich von den Propellern nur dadurch, daß sie im Innern eines Rohres oder in der Trennwand zweier Räume

Fig. 163.

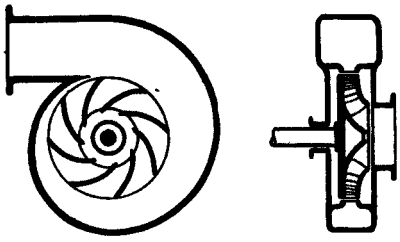


Schaufelplan einer Schraubenpumpe.

arbeiten. Durch ein Leitrad kann die im Pumpenrad erzeugte Energie der drehenden Bewegung zum größten Teile wieder in Druck verwandelt werden (vgl. den Schaufelplan Fig. 163).

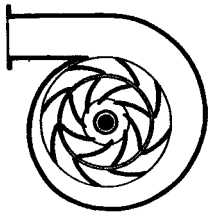
Bei den Zentrifugalpumpen und -gebläsen kommt zu der eben beschriebenen Schaufelwirkung unterstützend noch die Zentrifugalwirkung in den rotierenden Schaufelkanälen dazu (in einem mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Kanalsystem tritt die Zentrifugalkraft wie eine Massenkraft auf und liefert sowohl im Zustand relativer Ruhe wie auch — längs einer Stromlinie — in der stationären Bewegung einen Druckanstieg $\frac{\varrho\,\omega^2}{2}(r_2^2 - r_1^2)$ (vgl. Abschn. I, § 10). Die Schaufeln der Zentrifugalräder können radial, rückwärts geneigt oder auch nach vorn gebogen sein. Die rückwärts gekrümmten geben die besten Wirkungsgrade, die anderen aber etwas höhere Drucke.

Fig. 164.



Zentrifugalpumpe mit Spiralgehäuse.

Fig. 165.



Hochdruck-Zentrifugalpumpe.

Statt eines Leitschaufelsystems zeigen die einfacheren Zentrifugalpumpen und -gebläse ein geeignet geformtes Spiralgehäuse (vgl. Fig. 164). Die hochwertigen Maschinen dieser Art, besonders die aus mehreren hintereinander geschalteten Rädern bestehenden Hochdruckpumpen und Turbokompressoren, besitzen dagegen ein besonderes Leitschaufelsystem (vgl. Fig. 165).

Die Nutzleistung L_0 der Pumpen ist, mit Q = sekundlichem Volumen und h = Förderhöhe,

$$L_0 = \gamma Q h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5\,\mathrm{a})$$

Für Gebläse tritt in dem Falle, daß die Verdichtungsarbeit als klein vernachlässigt werden darf, an Stelle von γh der Unterschied der statischen Drucke vor und hinter dem Gebläse, $p_2 - p_1$, also

$$L_0 = Q\,(p_2 - p_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5\,\mathrm{b}$$

Wird ohne eine längere Rohrleitung aus einem Raume vom Drucke p_0 angesaugt, so ist dabei $p_1 = p_0 - \frac{\varrho}{2} w^2$ zu setzen, mit w = mittlerer Geschwindigkeit in der Saugöffnung. Die kinetische Energie beim Austritt aus dem Gebläse usw. kann zum Teil durch einen Diffusor (ein erweitertes Rohrstück) wiedergewonnen werden, wodurch bei gleichbleibendem Gegendruck der Druck p_2 hinter dem Gebläse usw. verringert wird. Für den Fall von Gebläsen für höhere Druckunterschiede, bei denen die Verdichtungsarbeit

nicht vernachlässigt werden kann, können die entsprechenden Formeln für Kolbengebläse benutzt werden.

Die Antriebsleistung L ist wegen der Strömungsverluste und der Lagerreibung größer als L_0. Das Verhältnis $L_0/L = \eta$ ist der „Wirkungsgrad" der Pumpe bzw. des Gebläses. Sieht man von der Lagerreibung ab, so ist in $L = D \cdot \omega$ das Drehmoment D nach der Eulerschen Gl. (2) berechenbar, und zwar für Schraubenräder ebenso wie für Zentrifugalräder. Meist ist $c_{u_1} = 0$, es ergibt sich daher

$$D = \varrho Q r_2 c_{u_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Hiermit wird, da $r_2 \omega = u_2$ ist,

$$L = \varrho Q u_2 c_{u_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Mit $L_0 = \eta L$ und unter Berücksichtigung von (5a) ergibt sich also

$$h = \frac{\eta u_2 c_{u_2}}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

c_{u_2} ist dabei jeweils aus den Geschwindigkeitsdreiecken ermittelbar; η ist abzuschätzen.

§ 20. Hydrodynamisches und aerodynamisches Versuchswesen.

a) Herstellung einwandfreier Versuchsbedingungen. Vielfach liegt die Aufgabe vor, die Bewegungen eines Körpers relativ zu einer sonst ungestörten Flüssigkeitsmasse zu studieren. Hier sind zwei Methoden brauchbar. Entweder bewegt man den Körper in der vorher genügend beruhigten Flüssigkeit, oder man läßt einen gleichförmigen Strom der Flüssigkeit gegen den Körper strömen. Die erstere Methode ist besonders für Wasserversuche geeignet und wird in den Schiffsmodell-Schleppanstalten benutzt. Man schleppt ein meist aus Paraffin hergestelltes Schiffsmodell mit Hilfe eines Schleppwagens durch das Wasser, mißt dabei die Geschwindigkeit des Wagens und den Widerstand des Modells, beobachtet die Wellenform usw. Das Wasserbecken muß dabei reichlich groß und tief gewählt werden, damit die von den Wänden des Beckens herrührenden Störungen sich nicht bemerklich machen. Bei verfeinerten Einrichtungen haben die Modelle auch angetriebene Schrauben.

Die mechanische Ähnlichkeit in der Ausbildung der Wellen, auf die es hier besonders ankommt, wird bei diesen Versuchen erreicht, wenn sich die Geschwindigkeit des Modells zu der des Schiffes verhält, wie die Wurzel aus Modellänge zu Schiffslänge (dann sind nach Abschnitt II. § 15 die Wellenlängen proportional den Körperlängen). Eine gleichzeitige Ähnlichkeit in bezug auf Reibung ist nicht erreichbar, da diese gleiche Reynoldssche Zahl verlangen würde, was sich mit der Regel für Ähnlichkeit der Wellen nicht verträgt. Man verzichtet deshalb auf Reibungsähnlichkeit. Um die hieraus entstehenden Fehler klein zu halten, wendet man möglichst große Modelle an.

Für die Anwendung in Luft hat sich die Schleppmethode nicht als geeignet erwiesen. Da man genötigt ist, die Modelle verhältnismäßig schwer gegenüber der verdrängten Luftmasse zu machen, überwiegen hier die bei unbeabsichtigten kleinen Beschleunigungen des Modells auftretenden Massenkräfte die zu messenden Kräfte in solchem Maße, daß die Messungen sehr

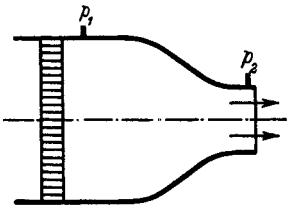
ungenau werden. Außerdem machen sich die von dem Meßwagen ausgehenden Störungen stark bemerkbar, da dieser sich hier im gleichen Medium wie das Modell bewegt. Man wendet deshalb in Luft immer die zweite Methode an; die Luft wird durch große Gebläse dem ruhend aufgehängten Körper entgegengeführt. Der Luftstrom muß dazu aber räumlich und zeitlich sehr gleichförmig sein und so großen Querschnitt haben, daß nicht nur der Körper reichlich von ihm eingehüllt wird, sondern auch die von dem Körper ausgehende Störung an den Grenzen des Luftstroms bereits genügend abgeklungen ist. Anderenfalls hat man Abweichungen zwischen dem Verhalten des Körpers in dem begrenzten Luftstrom gegenüber dem im unendlich ausgedehnten Luftraum zu erwarten.

Der Versuchsluftstrom kann entweder in einen Kanal (Tunnel) geführt werden oder als freier Stahl einen Raum, in dem die Luft ruht, durchfließen. Im ersteren Falle hat man bei parallelen Wänden des Kanals durch die Wandreibung einen Druckabfall in der Strömungsrichtung; seine Wirkung auf voluminöse Körper (z. B. Luftschiffmodelle) ist ähnlich wie der Schwimmauftrieb, bei dem ein Druckabfall nach oben vorhanden ist, liefert also eine wagerechte Kraft, die gleich $V \cdot \frac{\partial p}{\partial x}$ ist und den Widerstand vermehrt. Man kann diese störende Erscheinung vermeiden, wenn man dem Kanal eine schwache Erweiterung gibt, so daß der Druck längs der Kanalachse gerade konstant wird (genau genommen nur für eine Geschwindigkeit erreichbar). Im Falle des freien Strahles ist der Druck an den Strahlgrenzen konstant, es tritt also die oben geschilderte Schwierigkeit nicht auf; dagegen ist allerdings das brauchbare Gebiet des Strahles dadurch eingeschränkt, daß dieser sich von den Rändern her allmählich mit der umgebenden ruhenden Luft vermischt, während die Reibungsschicht an den Wänden des Kanals viel langsamer in das Innere des Luftstromes vordringt. Wegen der besseren Zugänglichkeit sind die Versuche im Strahl natürlich bequemer auszuführen.

Um einen möglichst gleichmäßigen und von Wirbelungen freien Luftstrom zu erhalten, ist das beste Mittel, daß dieser auf einer kurzen Strecke von einer sehr kleinen Geschwindigkeit auf die Versuchsgeschwindigkeit gebracht wird, indem man den Kanal von einem sehr weiten Querschnitt in einer geeignet abgerundeten Düse in einen engen Querschnitt (den Versuchsquerschnitt) übergehen läßt (vgl. Fig. 166). Das Druckgefälle $p_1 - p_2$, das von jedem Luftteilchen durchlaufen wird, teilt jedem den gleichen Zuwachs an Bewegungsenergie mit. Es handelt sich also nur noch darum, daß die geringe Bewegungsenergie, mit der die Luft in dem weiten Querschnitt ankommt, nicht allzu ungleich auf die einzelnen Luftteilchen verteilt ist. Ist z. B. das Verhältnis der Geschwindigkeiten 1 : 5, so ist das der Staudrucke (= Bewegungsenergie) 1 : 25; jedes Teilchen erhält also in dem Druckgefälle $^{24}/_{25}$ der nachherigen Energie mitgeteilt; Schwankungen von $^1/_4$ der ankommenden Energie bringen also Schwankungen von 1 v. H. in der endgültigen Energie oder von $^1/_2$ v. H. in der endgültigen Geschwindigkeit. Eines ist dabei aber noch von Wichtigkeit. Alle Drehungen der ankommenden

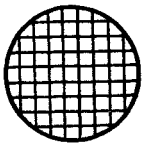
Strömung müssen sorgfältig durch Gleichrichter, d. h. Systeme von parallelen Kanälen (aus gekreuzten Blechen oder dergleichen gebildet, vgl. Fig. 167) ausgeschaltet werden. Eine um eine Achse parallel der Strömungsrichtung rotierende Luftmasse erhält nämlich bei der Einengung ihres Querschnittes auf $1/n$ die n-fache Winkelgeschwindigkeit[1]); da der Durchmesser quer zur Stromlinie im Verhältnis $\frac{1}{\sqrt{n}}$ abnimmt, ergibt sich eine Zunahme der Quergeschwindigkeit ($= r\omega$) im Verhältnis $\sqrt{n}$, während die Längsgeschwindigkeit im Verhältnis n zunimmt. Eine Rotation um eine Achse quer zur Stromlinie ergibt im Gegensatz zu dem Vorstehenden Verminderung der Winkelgeschwindigkeit proportional zur Verminderung der Querabmessung[1]), also auf das $\frac{1}{\sqrt{n}}$fache; hier wird danach die Störungsgeschwindigkeit $r\omega$ das $1/n$-fache wie vorher, in Übereinstimmung mit der obigen an die Bernoullische Gleichung angeknüpften Betrachtung. Zur Ausgleichung von longitudinalen Geschwindigkeitsunterschieden können im übrigen noch Drahtsiebe vor dem Gleichrichter angebracht werden nötigenfalls solche, die an verschiedenen Stellen verschiedene Dichte aufweisen.

Fig. 166.



Düse.

Fig. 167.



Gleichrichter.

Mehrere empfehlenswerte Anordnungen von Windkanälen sind in Fig. 168 bis 170 dargestellt; × ist die Versuchsstelle. Bei den offenen Bauarten ist zu beachten, daß der austretende Luftstrom nach irgendwelchen Umwegen wieder an die Eintrittsöffnung gelangt und irgendwelche unregelmäßigen Wirbel mit sich bringt. In Fig. 168 ist auch vor dem Schraubengebläse ein Gleichrichter angeordnet, da sonst das Gebläse, wenn es die Wirbel einsaugt, die von dem Luftstrahl in dem Raume hervorgerufen worden sind, schwankenden Druck liefert. In Fig. 169 ist hinter dem Gebläse ein Käfig angebracht, der ein ruhiges Abströmen der Luft bewirken soll. Bei der geschlossenen Bauart nach Fig. 170 wird der Luftstrom hinter der Versuchsstelle durch einen Trichter wieder aufgefangen, und es entfällt dadurch die sonst erhebliche Belästigung der Beobachter durch Zugwind. Durch die „Diffusoren" (allmählich erweiterte Kanäle, vgl. § 10, d) wird bei der Bauart nach Fig. 169 und 170 ein beträchtlicher Teil der erzeugten kinetischen Energie zurückgewonnen.

Im Gegensatz zu den Schiffsschleppversuchen existiert bei den Anblasversuchen in Luft keine Regel, durch die die Modellgeschwindigkeit abhängig vom Modellverhältnis festgelegt wäre. Genau genommen müßte allerdings die Reynoldssche Ähnlichkeit beachtet werden. Das ist aber fast in allen Fällen unmöglich, da sich zur Einhaltung der gleichen Reynoldsschen Zahl für ein

[1]) Nach dem Helmholtzschen Wirbelsatz, vgl. II. Abschnitt, § 11.

Modell im Maßstab 1 : 10 die zehnfache Geschwindigkeit des Originals ergeben würde. Abgesehen davon, daß eine solche Geschwindigkeit meist überhaupt unausführbar ist, würde man hierdurch meist bereits in das Gebiet der Kompressibilität (vgl. Abschnitt IV) kommen, so daß wegen dieses Umstandes die Ähnlichkeit gar nicht erreicht würde. Man muß deshalb auch hier auf genaue Ähnlichkeit in bezug auf Reibung verzichten.

b) Geschwindigkeits- und Druckmessung. Geschwindigkeiten können durch Anwendung der Bernoullischen Gleichung mit Hilfe von Druckunterschieden gemessen werden. Bei den Windkanälen bildet diese Messung die Regel. Man kann hierzu die Druckdifferenz $p_1 - p_2$ von Fig. 166 verwenden. Statt dessen kann man auch ein Staugerät nach Fig. 46 (§ 7 von Abschnitt II) anwenden.

Fig. 168.

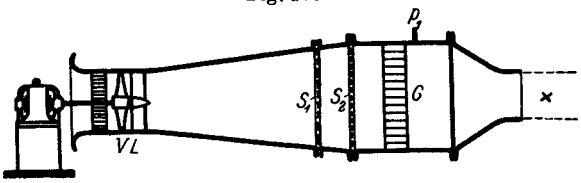


Fig. 169.

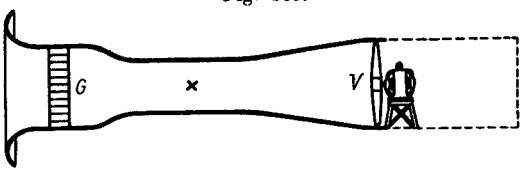
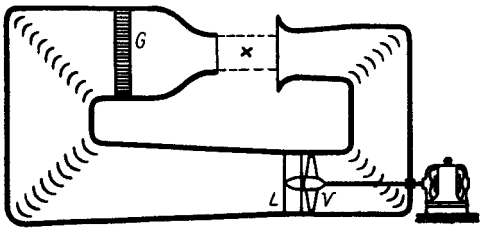


Fig. 170

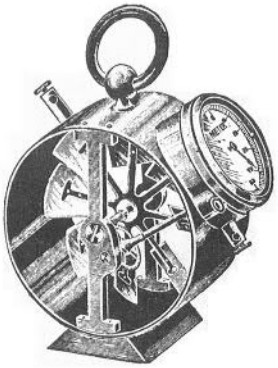


Windkanalanordnungen.

Weitere Geschwindigkeitsmesser, die in der Praxis viel verwendet werden in der Genauigkeit aber im allgemeinen gegen die vorige Methode zurückstehen, sind die Anemometer, von denen Fig. 171 und 172 zwei Typen, das Flügelradanemometer und das Schalenkreuzanemometer, darstellen. Das entsprechende Instrument für Wassergeschwindigkeiten heißt hydrometrischer Flügel; eine Ausführungsform zeigt Fig. 173. Man beobachtet entweder die Anzahl der von einem Zählwerk angezeigten Umdrehungen für eine bestimmte Zeit, z. B. eine Minute, oder aber die Zeit für eine feste Zahl von Umdrehungen, z. B. 500, die durch ein Signal kenntlich gemacht werden. Alle diese Instrumente bedürfen der Eichung. Bei den Anemometern wurde diese früher meist auf dem Rundlauf ausgeführt, d. h. auf einem um eine senkrechte

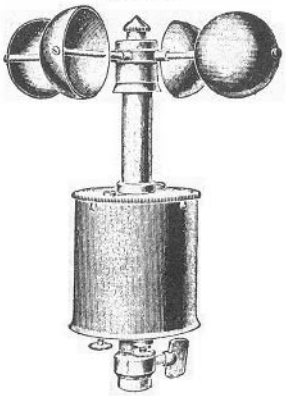
Achse umlaufenden Arm, der das Instrument mit der gewünschten Geschwindigkeit in einem großen Kreise herumführt. Hier störte aber, abgesehen von unerwünschten Zentrifugalkräften auf das Werk des Instruments, vor allem der „Mitwind", d. h. die von dem Arm verursachte umlaufende Luftbewegung in dem Raume, durch die eine schwer richtig zu messende Verringerung des Luftweges des Instruments verursacht wird. Deshalb zieht man heute vor, die Instrumente im Windkanal zu eichen. Die hydrometrischen Flügel werden geeicht, indem man sie in kleinen, den Schiffsmodell-Schleppanstalten ähnlichen Wasserrinnen mittels eines Wagens entlang fährt. Diese Eichung ist wesentlich zuverlässiger als die Rundlaufeichung.

Fig. 171.



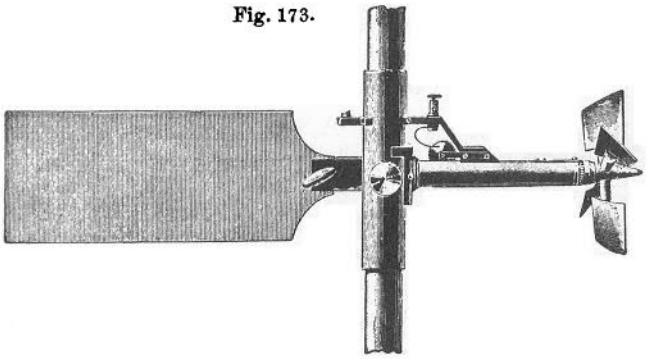
Flügelrad-Anemometer.

Fig. 172.



Schalenkreuz-Anemometer.

Fig. 173.



Hydrometrischer Flügel.

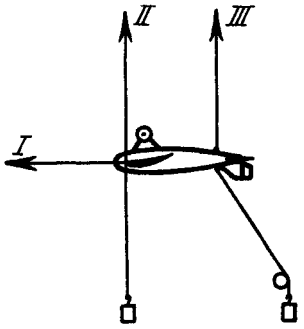
Neuerdings verwendet man auch die Abkühlung von elektrisch geheizten Drähten zur Geschwindigkeitsmessung von Luftströmen. Da der elektrische Leitungswiderstand der Metalle mit der Temperatur veränderlich ist, benutzt man zur Bestimmung der Temperatur gewöhnlich eine passende Brückenschaltung. Entweder stellt man durch Regulierwiderstände auf konstante Temperatur des Drahtes ein und erhält dann eine abgeführte Wärmemenge (= zugeführte Heizenergie), die bei dünnen Drähten sehr nahe der Wurzel

aus der Geschwindigkeit proportional ist, oder man arbeitet mit konstantem Heizstrom und sinkender Temperatur, wobei die Abhängigkeit zwischen dem Drahtwiderstand und der Luftgeschwindigkeit empirisch durch eine Eichung ermittelt wird. Die Methode eignet sich besonders für kleine Luftgeschwindigkeiten, wo die anderen Methoden versagen, sonst aber auch für Messungen sehr nahe an die Körper heran[1]). Bei der Verwendung sehr feiner Drähte lassen sich auch zeitlich sehr schnell veränderliche Vorgänge mit dem Hitzdraht verfolgen[2]).

Druckmessungen erfolgen mit Manometern und Mikromanometern (vgl. Abschnitt I, § 8). Schwierigkeiten macht dabei unter Umständen die Druckentnahme. Ziemlich einwandfrei ist die Druckentnahme durch Anbohrungen in glatter Wand (vgl. Abschnitt II, § 7). Als Drucksonde für das Innere der Flüssigkeit kann man die hintere Öffnung der üblichen Staugeräte benutzen, muß aber dabei darauf achten, daß das Gerät auf wenige Grade genau in der Strömungsrichtung steht. Drucksonden werden am besten geeicht, wenn man sie in einen einwandfreien Parallelstrahl von nicht zu kleinen Abmessungen bringt. Sie sollen dann den Druck der ruhenden Luft in der Umgebung des Strahles anzeigen, oder genauer einen Überdruck von etwa $^1/_2$ v. H. des Staudruckes des Strahles, da infolge der Vermischungsvorgänge an der Strahloberfläche ein solcher Überdruck im Strahle herrscht[3]) (bei sehr genauen Anemometer- und Staugeräteichungen ist dieser Überdruck ebenfalls zu berücksichtigen!).

c) Kräfteermittlung an Modellen. Unmittelbare Kraftmessung durch Waagen. Die Modelle, die geschleppt oder angeblasen werden, pflegen durch Halteorgane so befestigt zu werden, daß sie in ihrer Lage festgehalten sind. Die auf sie ausgeübten Kräfte wirken auf Waaghebel, an denen sie gemessen werden. Es gibt sehr verschiedene Möglichkeiten der Anordnung; eine, die sich für Messungen in Luft bewährt hat, ist die folgende:

Fig. 174.



Dreikomponenten-Aufhängung.

Das Modell (Fig. 174) ist an drei Drahtsystemen gehalten, von denen eins wagerecht nach vorn und zwei senkrecht nach oben führen. Das erste überträgt den Widerstand und das zweite und dritte zusammen den Auftrieb. Das andere Ende jedes Drahtsystems ist an einem Waaghebel befestigt, an dem die genannten Kräfte beobachtet werden können. Aus dem Verhältnis der Anzeige der zweiten und dritten Waage folgt noch die Lage der resultierenden Auftriebskraft. Die in der Figur unten sicht-

---

[1]) J. M. Burgers und v. d. Hegge-Zijnen haben so die Grenzschichten an ebenen Platten ausgemessen, vgl. Verh. XIII, Nr. 3, 1924. Koningl. Akad. van Wetenschappen, Amsterdam.

[2]) Vgl. J. M. Burgers, Proc. XXIX, Nr. 4. Koningl. Akad. van Wetenschappen, Amsterdam = Communication Nr. 8 des Labor. f. Aerodyn. und Hydrodyn. Delft; ferner Fage und Johannsen, Roy. Soc. Proc. (A) **116**, 1927.

[3]) W. Tollmien, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **6**, 468—478, 1926.

baren Spanngewichte — das rechte über eine leicht drehbare Rolle geleitet — sorgen für eine passende Vorspannung der Drähte. Das Modell pflegt umgekehrt aufgehängt zu werden, wie Fig. 174 zeigt, damit die Auftriebskraft die Drähte spannt und nicht entlastet. Die Beobachtung geht auf die Weise vor sich, daß zunächst alle Waagen ohne Wind ins Gleichgewicht gebracht werden und nun nach Anstellung des Windes der Unterschied ausgewogen wird. Während der Wägung mit einer Waage werden zweckmäßig die anderen Waagen in der Mittellage festgehalten.

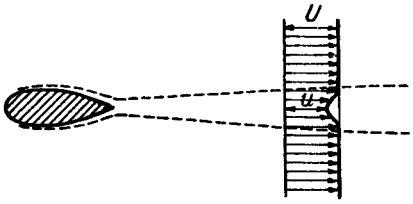
Andere Arten der Widerstandsermittlung. Wie bereits in § 11, b auseinandergesetzt, kann man durch Messung des Druckes in einer hinreichend großen Anzahl von Anbohrungen der Oberfläche die Druckverteilung über den ganzen zu untersuchenden Körper ermitteln und daraus durch numerische oder zeichnerische Integration die resultierende Druckkraft erfahren. Die Messung kann entweder so gemacht werden, daß man das Innere des hohlen Körpers mit einem Manometer verbindet, und nun jeweils alle Löcher bis auf eines, das offen gelassen wird, mit Wachs oder dergleichen verklebt. Da dieses Verfahren etwas zeitraubend ist, schließt man in neuerer Zeit vielfach an jede Meßanbohrung ein Röhrchen oder einen Schlauch an und führt diese durch das Innere des Modells weiter zu ebenso vielen Druckmessern, als Anbohrungen vorhanden sind. Die einfachste Anordnung dieser Art besteht in einer großen Anzahl von senkrechten, halb mit einer Meßflüssigkeit gefüllten, unten kommunizierenden Rohren, die dicht nebeneinander angeordnet sind. Die beiden äußeren haben ein freies oberes Ende und zeigen so den ungestörten Druck an, die anderen sind oben an die Meßanbohrungen angeschlossen. Die Ablesung erfolgt zweckmäßig, indem man das ganze „Vielfachmanometer" photographiert. Man kann in solcher Weise die Druckverteilung nicht nur an Modellen, sondern auch an wirklichen Flugzeugen, Luftschiffen usw. ermitteln.

Der in § 11, b erwähnte „Kielwasserwiderstand" läßt sich nach einem von A. Betz[1]) vorgeschlagenen Verfahren durch Ausmessung der Störung, die der Körper hinter sich zurückläßt, des sogenannten Nachlaufs, ermitteln. Der strenge Nachweis der Richtigkeit des Verfahrens ist keineswegs einfach, weil die von dem Körper ausgehenden Druckstörungen sich nach allen Seiten hin in der Flüssigkeit ausbreiten und erst nachgewiesen werden muß, daß sie zum Widerstand nichts beitragen, oder im Falle des Wellenwiderstandes oder des induzierten Widerstandes, daß der von ihnen hervorgerufene Widerstandsanteil und der im Nachlauf nachweisbare gerade den Gesamtwiderstand zur Summe haben. Hier soll nur der Fall in näheren Betracht gezogen werden, daß an der Stelle, wo die Geschwindigkeiten im Nachlauf gemessen werden, der Druck bereits wieder mit dem ungestörten Druck übereinstimmt. Dann werden auch die auf den Körper als ruhend bezogenen Geschwindigkeiten, soweit die Flüssigkeitsteile keine Reibungs-

[1]) A. Betz, Ein Verfahren zur direkten Ermittlung des Profilwiderstandes. Zeitschr. f. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt 15, 42, 1925.

wirkung erlitten haben, wieder der ungestörten Geschwindigkeit gleich sein (Bernoullische Gleichung!). Diese Geschwindigkeit heiße U, diejenige der durch Reibung, Wirbel usw. verzögerten Flüssigkeitsteile im Nachlauf sei u. Ursprünglich hatten diese Teile auch die Geschwindigkeit U, der Geschwindigkeitsverlust $U - u$ stellt also eine Impulsänderung dar. Legen wir quer über den Nachlauf eine Kontrollfläche, so fließt durch ein Stückchen dF davon die sekundliche Masse $\varrho\, dF u$; die gesamte Impulsänderung, die dem Kielwasserwiderstand W_k gleich ist, muß also sein

Fig. 175.



Nachlaufströmung.

$$W_k = \iint \varrho\, dF u (U - u).$$

Das Integral braucht nur über den Nachlauf erstreckt zu werden, vgl. Fig. 175. Der Ausdruck kann für die praktische Anwendung noch etwas umgestaltet werden. Ein Pitotrohr (vgl. Abschnitt 2, § 4) gibt den Gesamtdruck $p + \frac{\varrho w^2}{2}$ an, der hier mit g bezeichnet werden möge. Die Geschwindigkeiten quer zur Richtung von U seien vernachlässigbar klein, dann kann innerhalb des Nachlaufs $g = p_0 + \frac{\varrho u^2}{2}$ und außerhalb $g_0 = p_0 + \frac{\varrho U^2}{2}$ gesetzt werden.

Der Unterschied der Gesamtdrucke $g_0 - g = \frac{\varrho}{2}(U^2 - u^2)$, der allein aus den Ablesungen des mit dem Pitotrohr verbundenen Manometers unmittelbar entnommen werden kann, läßt sich, wie leicht nachzuprüfen, in die Form bringen

$$g_0 - g = u(U - u) + \frac{1}{2}(U - u)^2.$$

Man erhält also für den Kielwasserwiderstand

$$W_k = \iint (g_0 - g)\, dF - \frac{\varrho}{2} \iint (U - u)^2\, dF.$$

Das zweite Glied wird klein gegenüber dem ersten, wenn der Geschwindigkeitsunterschied $U - u$ klein wird gegen die ungestörte Geschwindigkeit U[1]). Will man ihn berücksichtigen, so muß man den statischen Druck p_0 gesondert ermitteln, so daß u und U berechnet werden können. Das Verfahren ist u. a. auch zur Ermittlung des Profilwiderstandes an wirklichen Flugzeugen im Fluge verwendet worden[2]).

Der Reibungswiderstand kann gemäß § 11, b als Differenz zwischen dem gewogenen Gesamtwiderstand und dem aus der Druckverteilung ermittelten Druckwiderstand (s. o.) gewonnen werden. Neuerdings ist von

---

[1]) In der Betzschen Arbeit wird auch der Fall berücksichtigt, daß der Druck p von dem ungestörten Druck verschieden ist, wodurch die Formeln eine etwas andere Gestalt erhalten.

[2]) M. Schrenk, Luftfahrtforschung, Bd. 2, Heft 1, München u. Berlin 1928.

Fage und Falkner[1]) ein direktes Verfahren zu seiner Bestimmung angegeben worden. Das Verfahren kommt darauf hinaus, die Geschwindigkeit ganz nahe an der Körperoberfläche zu ermitteln, wo die Strömung laminar verläuft und also gemäß § 1 dieses Abschnittes die Schubspannung $\tau = \mu \frac{w}{y}$ ist (wo w die gemessene Geschwindigkeit und y der Wandabstand ist). Es handelt sich dabei praktisch um Abstände von der Größenordnung $^1/_{20}$ mm. Die Meßeinrichtung besteht in einer Wandanbohrung, die in diesem winzigen Abstand von einer scharf geschliffenen Schneide überdeckt ist (vgl. Fig. 176). Eine solche Sonde muß natürlich geeicht werden; sie ist deshalb herausschraubbar angeordnet. Die Eichung erfolgt dadurch, daß die Sonde in einen engen Kanal eingesetzt wird, für den man weiß, daß die Strömung laminar ist, und bei dem die Schubspannung aus dem beobachteten Druckabfall berechnet werden kann. Die Einzelablesungen liefern die Verteilung der Schubspannung an der Oberfläche, der gesamte Reibungswiderstand kann daraus durch Integration gewonnen werden. Das Verfahren ist allerdings nicht leicht zu handhaben und erfordert viel Zeit, immerhin ist es wertvoll für grundsätzliche Aufschlüsse.

Fig. 176.

Vorrichtung zur Messung des Reibungswiderstandes.

[1]) A. Fage und V. M. Falkner, Proc. Roy. Soc. A. **129**, 378, 1930.

Vierter Abschnitt.

Strömung mit erheblichen Volumenänderungen (Gasdynamik).

Vorbemerkung.

Erhebliche Volumenänderungen ergeben sich bei den Strömungsvorgängen hauptsächlich dann, wenn es sich um Gase und Dämpfe handelt und große Druckunterschiede vorkommen. In der Einleitung zum zweiten Abschnitt war bereits betont worden, daß bei mäßigen Druckunterschieden (die klein sind gegenüber dem absoluten Druck des Gases usw.) die Volumenänderungen unbedeutend sind und daher in diesem Fall die Gasströmung in erster Näherung nach den für volumbeständige Flüssigkeiten geltenden Gesetzen behandelt werden darf. Wenn aber erhebliche Volumenänderungen auftreten, dann ist einerseits der veränderlichen Dichte wegen die Zuordnung der Geschwindigkeiten und Drucke zueinander anders als bei volumbeständiger Strömung, andererseits ergeben sich der Kontinuität wegen bei gegebenen Geschwindigkeiten andere Querabstände der Teilchen und daher auch andere Bahnen — oder bei gegebenen Querschnitten andere Geschwindigkeiten.

Für das Eintreten von erheblichen Volumenänderungen und der hierfür nötigen beträchtlichen Druckänderungen kommen im wesentlichen die folgenden Fälle in Betracht:

1. Große Höhenerstreckung von der Schwerkraft unterworfenen Gasmassen. Die hauptsächlichste Anwendung dieses Falles betrifft die Strömungserscheinungen in der freien Atmosphäre. Die hier in Betracht kommenden Probleme losgelöst von den speziellen meteorologischen Fragestellungen zu behandeln, hätte nicht viel Zweck; deshalb mag eine Behandlung dieses ohnehin noch wenig entwickelten Gebiets hier unterbleiben [1]).

---

[1]) Verschiedene Literatur findet sich in den meteorologischen Fachzeitschriften: Meteorologische Zeitschrift, Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre, Geophysiske Publicasjoner, Oslo usw.; einige typische Arbeiten sind die folgenden: V. Bjerknes, Das dynamische Prinzip der Zirkulationsbewegungen in der Atmosphäre. Meteorol. Zeitschr. **17**, 97 und 145, 1900. Derselbe, Über Wellenbewegungen in kompressiblen schweren Flüssigkeiten. Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wissensch., Math.-Phys. Klasse **35**, Nr. II, 37, 1916. H. Koschmieder, Beiträge zur meteorologischen Aerodynamik. Meteorol. Zeitschr. **43**, 246, 1926. P. Raethjen, Zur Vertikalbewegung im atmosphärischen Kontinuum. Meteorol. Zeitschr. **46**, 292, 329, 383, 420, 1929.

2. Große Geschwindigkeiten der Gasströmung, solche treten auf,
   a) wenn zwei Räume, zwischen denen ein mit den absoluten Drucken vergleichbarer[1]) Druckunterschied besteht, durch eine Öffnung oder einen Kanal verbunden werden,
   b) wenn sich in dem Gase Körper mit sehr großen Geschwindigkeiten bewegen.

Diese beiden Fälle sind theoretisch eng miteinander verwandt; man braucht nur den Körper in einen mit der entsprechenden Geschwindigkeit fließenden Luftstrom zu stellen, um die Verhältnisse des in ruhender Luft bewegten Körpers in einem geänderten Bezugssystem nachzuahmen.

Die hier in Frage kommenden Beziehungen finden praktische Anwendung bei den Strömungen in Dampfturbinen und ähnlichen Maschinen, andererseits auch bei der Bewegung von Geschossen, ferner auch bei Flugzeugpropellern, die ebenfalls sehr hohe Geschwindigkeiten aufweisen.

Diese Strömungslehre der hohen Geschwindigkeiten wird auch mit einem kurzen Wort als „Gasdynamik" bezeichnet.

3. Große Beschleunigungen, die in einer ruhenden oder strömenden Gasmasse auftreten, wenn Wandteile oder in der Gasmasse befindliche Körper stark beschleunigte Bewegungen ausführen oder sonst irgendwelche plötzliche Veränderungen vor sich gehen. Hierher gehören die Ausbreitungsvorgänge rascher Schwingungen (die in der Akustik behandelt werden), die Ausbreitung von Explosionen u. dgl., die Folgeerscheinungen des raschen Öffnens und Schließens von Klappen und Ventilen u. a. m.

Für die besondere Art dieser Vorgänge, aber auch für die der Strömungen mit hohen Geschwindigkeiten spielt die Geschwindigkeit, mit der sich irgendwelche Druckänderungen in einer Gasmasse fortpflanzen, eine entscheidende Rolle. Deshalb sei zunächst dieser Fortpflanzungsvorgang näher betrachtet.

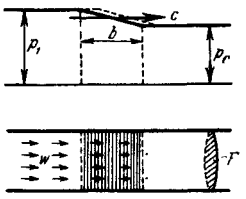
§ 1. Druckfortpflanzung. Schallgeschwindigkeit. Der Betrachtung der Druckfortpflanzung werde in Anlehnung an die Betrachtung über den Wasserschwall in § 16 von Abschnitt II folgender einfache Fall zugrunde gelegt. In einer ruhenden Gasmasse, die in einem weiten Rohr eingeschlossen sein möge, werde durch geeignete Bewegung eines Stempels eine Drucksteigerung erzeugt, die sich in der in Fig. 177 angedeuteten Weise in die ruhende Gasmasse hinein fortpflanzen soll.

Es sei dabei angenommen, daß die Druckverteilung ohne Änderung ihrer Gestalt mit der konstanten Geschwindigkeit c nach rechts weiterrückt. Da

[1]) Dieser Druckunterschied muß nicht immer absolut genommen groß sein, sondern es kommt nur darauf an, daß er gegenüber den absoluten Drucken in den beiden Räumen in Betracht kommt. Ist z. B. in einer Quecksilber-Dampfstrahlpumpe, wie sie zur Herstellung von hohem Vakuum in Gebrauch sind, der Druckunterschied zwischen dem Verdampfer und dem Kondensator $^1/_{10}$ mm Hg, und ist der Druck in dem letzteren Raume (der mit dem Vorvakuum in Verbindung steht) auch nur $^1/_{10}$ mm Hg, so ist der Druckunterschied in unserem Sinne „beträchtlich" und die Strömung muß hier nach den Gesetzen der „Gasdynamik" behandelt werden.

das Gas hierbei zusammengedrückt wird, muß der Teil, über den der Druckanstieg bereits hinweggegangen ist, eine Geschwindigkeit w nach rechts hin besitzen. Für die Rechnung sei angenommen, daß die Drucksteigerung $p_1 - p_0$ klein gegen den Druck p_0 sei, dann wird auch die Dichteänderung $\varrho_1 - \varrho_0$ klein, ebenso wird auch w klein, wie sich aus dem Folgenden noch ergibt.

Fig. 177.



Druckwelle im Rohr.

Über die Vorgänge in dem Übergangsgebiet von der Breite b (vgl. Fig. 177) lassen sich nun analog der früheren Betrachtung zweierlei Aussagen machen:

1. betreffend der Kontinuität: Während das Gebiet b über eine Stelle hinüberrückt, steigt dort die Dichte vom Werte ϱ_0 auf ϱ_1. Die zugehörige Zeit ist $\tau = b/c$. Die in der Zeiteinheit[1]) erfolgende Massenzunahme im Übergangsgebiet ist danach gleich dem Volumen des Gebietes $F.b$ mal der Dichtigkeitszunahme in der Zeiteinheit $\frac{\varrho_1 - \varrho_0}{\tau}$, also $= F(\varrho_1 - \varrho_0).c$. Diese Massenzunahme wird bewirkt durch die von dem verdichteten Gebiet her in der Zeiteinheit zufließende Masse $\varrho_1 F w$, es ergibt sich also

$$\varrho_1 w = (\varrho_1 - \varrho_0) c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

2. der Satz: Masse mal Beschleunigung = resultierende Kraft gibt die folgende Aussage. Innerhalb des Übergangsgebiets nimmt die Geschwindigkeit in der Zeit τ von 0 bis w zu, die mittlere Beschleunigung ist also $\frac{w}{\tau} = \frac{wc}{b}$. Die jeweils zu beschleunigende Masse ist $\varrho_m F b$, wo ϱ_m die mittlere Dichte ist. Die resultierende Kraft ist $F(p_1 - p_0)$, also ergibt sich die dynamische Beziehung

$$\varrho_m w c = p_1 - p_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

In Gl. (1) dürfen wir links nachträglich ϱ_1 durch ϱ_m ersetzen, ohne einen größeren Fehler zu begehen, als er schon in den bisher gemachten Vernachlässigungen liegt. Dividiert man jetzt (2) durch (1), so wird nach Weghebung von $\varrho_m w$:

$$c^2 = \frac{p_1 - p_0}{\varrho_1 - \varrho_0}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite hängt aber nur vom Kompressionsgesetz des Stoffes ab, wir schreiben für ihn den Differentialquotienten $\frac{dp}{d\varrho}$ und erhalten so

$$c^2 = \frac{dp}{d\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für Druckänderungen wird also unter der Annahme kleiner Druckänderungen unabhängig von der Größe der Druckänderung und von der Breite des Übergangsgebietes, und ist nur von dem

[1]) Man wählt für diese Überlegung zweckmäßig eine Zeiteinheit, die klein gegen die Zeit τ ist. Da im Endergebnis die Zeit τ nicht mehr vorkommt, bedeutet dies keine Einschränkung der Ableitung.

Kompressionsgesetz des Stoffes abhängig. Deshalb können auch beliebige positive und negative kleine Druckänderungen aufeinanderfolgen, ohne sich gegenseitig zu stören. Da der Schall aus solchen Folgen positiver und negativer Druckänderungen besteht, die nach obigem mit der Geschwindigkeit c weiterlaufen, nennt man c die Schallgeschwindigkeit.

Für Gase gilt nach dem Adiabatengesetz (vgl. Abschn. 1, § 5) $p = const. \varrho^{\varkappa}$, also

$$\frac{dp}{d\varrho} = \varkappa . const. \varrho^{\varkappa - 1} = \varkappa \frac{p}{\varrho},$$

mit $\varrho = \varrho_0 \frac{p}{p_0} \cdot \frac{1}{1 + \alpha \vartheta}$ (hier ϱ_0 = Normaldichte beim Normaldruck p_0 und bei 0^0 C) wird daher

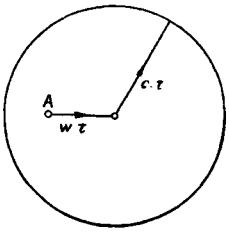
$$c = \sqrt{\varkappa \frac{p_0}{\varrho_0} (1 + \alpha \vartheta)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Die Schallgeschwindigkeit ist also bei ein und demselben Gase lediglich mit der Temperatur veränderlich. Für mittelfeuchte Luft ist $\sqrt{\varkappa \frac{p_0}{\varrho_0}} = 334$ m/sec in guter Übereinstimmung mit beobachteten Schallgeschwindigkeiten.

Der für uns wichtige Fall der Druckfortpflanzung in einer strömenden Flüssigkeit läßt sich dadurch auf den hier betrachteten Fall zurückführen, daß man ein mit der Flüssigkeit mitbewegtes Bezugssystem verwendet. Daraus folgt, daß die Druckfortpflanzung relativ zu der Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit c erfolgt. Relativ zu einem Raum, in dem die Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit w_1 strömt, erfolgt die Fortpflanzung stromabwärts mit der Geschwindigkeit $c + w_1$, stromaufwärts mit der Geschwindigkeit $c - w_1$. Man sieht leicht, daß in dem Falle, daß w größer als c ist, stromaufwärts überhaupt keine Fortpflanzung von Druckänderungen stattfindet. Daher zeigen die Gase und Dämpfe bei Strömungsgeschwindigkeiten, die die Schallgeschwindigkeit übersteigen, ein von dem gewöhnlichen wesentlich verschiedenes Verhalten.

Zieht man die räumliche Ausbreitung der von einer kleinen Stelle ausgehenden Druckstörungen in Betracht, so ergibt sich ein weiteres Charakteristikum der Strömungen mit Geschwindigkeiten, die kleiner bzw. größer sind als Schallgeschwindigkeit. Eine momentane punktförmige Störung an einer Stelle A (Fig. 178) breitet sich in einer gleichförmigen Gasströmung in Form einer Kugelwelle aus, deren Mittelpunkt mit der Strömungsgeschwindigkeit weiterwandert. Eine andauernde Störung im Punkte A, wie sie etwa durch ein dort befindliches kleines Hindernis dargestellt würde, kann als Aufeinanderfolge von momentanen Störungen aufgefaßt werden. Wenn die Strömungsgeschwindigkeit w kleiner ist als die Schallgeschwindigkeit c, ergibt sich eine Ausbreitung der Wirkung des Hindernisses nach allen Richtungen hin, wennschon in verschiedenen Rich-

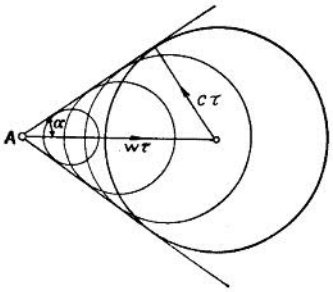
Fig. 178.



Druckwelle, $w < c$.

tungen mit verschiedener Stärke. Ist aber die Strömungsgeschwindigkeit größer als die Schallgeschwindigkeit, so erfüllen alle Kugelwellen nur einen Kegel hinter dem Punkte A (vgl. Fig. 179). Der Raum vor dem Kegel bleibt völlig frei von jeder Einwirkung des Hindernisses. Für die Bewegung eines Körpers (z. B. eines Geschosses) durch eine ruhende Gasmasse gelten ganz entsprechende Beziehungen. Im Falle, daß die Geschoßgeschwindigkeit größer ist als die Schallgeschwindigkeit, erstreckt sich die Wirkung nur auf einen Kegel entsprechend Fig. 179 [E. Mach] [1]).

Fig. 179.



Druckwellen, $w > c$.

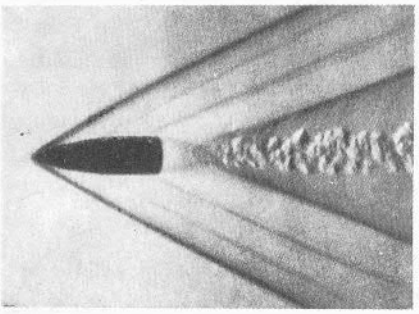
Der Winkel an der Kegelspitze ergibt sich folgendermaßen: Im Verlauf einer kleinen Zeit τ ist eine punktförmige Störung zu einer Kugel vom Radius $c.\tau$ angewachsen, deren Mittelpunkt hat sich um $w.\tau$ entfernt; der Kegel berührt die Kugel, also ist

$$\sin\alpha = \frac{c.\tau}{w.\tau} = \frac{c}{w} \quad \cdots\cdots \quad (6)$$

Man nennt α den Machschen Winkel.

Strömt das Gas an Wänden entlang, die mit irgendwelchen Unebenheiten besetzt sind, so gleichen sich die von den Unebenheiten verursachten Druckunterschiede nach dem Innern des durchströmten Raumes zu schnell aus, wenn die Geschwindigkeit unterhalb der Schallgeschwindigkeit liegt; bei „Überschallgeschwindigkeit" geht dagegen von jeder Unebenheit eine Welle unter dem Machschen Winkel aus, die sich durch den ganzen Strömungsraum ausbreitet und auch an einer gegenüberliegenden Wand reflektiert wird. Fig. 192 (S. 196) zeigt eine solche Strömung bei künstlich aufgerauhten Wänden; an der Abnahme des Machschen Winkels von links nach rechts ist deutlich die von links nach rechts zunehmende Geschwindigkeit zu erkennen.

Fig. 180.



Schlierenbild eines fliegenden Infanteriegeschosses nach Cranz.

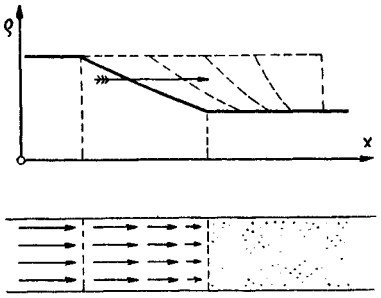
Dieselben Beziehungen lassen sich auch auf die Bewegung von Körpern in einer ruhenden Luftmasse anwenden. Erfolgt die Bewegung mit Überschallgeschwindigkeit, so breitet sich die durch den Körper hervorgerufene Störung lediglich in einem Kegel entsprechend Fig. 179 aus, vor diesem Kegel herrscht vollkommene Ruhe. Die Geschoßbewegung von

[1]) E. Mach, Sitzungsber. d. Wien. Akad. IIa, **95**, 164, 1887; **98**, 1310, 1889; **105**, 605, 1896.

Fig. 180[1]) bietet ein Beispiel dafür. Aus dem Winkel der Kopfwelle läßt sich die Geschoßgeschwindigkeit ziemlich genau berechnen, wenn man die weiter von dem Geschoß entfernten Teile dieser Welle benutzt. Ganz nahe am Geschoß sind die Druckunterschiede so groß, daß hier die Kopfwelle sich mit Überschallgeschwindigkeit fortpflanzt und daher der Winkel α größer ist.

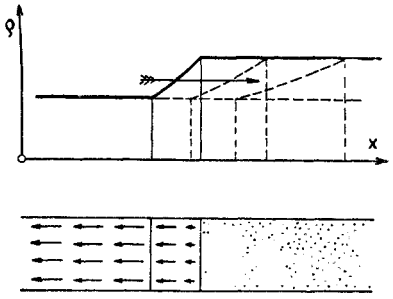
Anmerkung. Eine endliche Druckänderung läßt sich als eine Folge von vielen kleinen Druckänderungen auffassen. Nach Gl. (2) ist an den Orten höheren Druckes eine ungefähr dem Druckunterschied proportionale Geschwindigkeit in der Fortpflanzungsrichtung vorhanden (umgekehrt an Orten tieferen Druckes eine in der entgegengesetzten Richtung). Nach der vorangehenden Darlegung ist dann die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der auf eine Verdichtung folgenden weiteren Verdichtung $= c + w$, also größer; entsprechend die einer weiteren Verdünnung kleiner, so daß man also schließen muß, daß starke Verdichtungen mit mehr als Schallgeschwindigkeit fortgepflanzt werden, starke Verdünnungen mit weniger als

Fig. 181



Verdichtungswel le.

Fig. 182.



Verdünnungswelle.

Schallgeschwindigkeit. Die exakte Theorie dieser Erscheinungen ist von B. Riemann[2]) durchgeführt worden. Sie ergibt in Übereinstimmung mit der obigen Überlegung, daß von einer Druckwelle mit endlicher Verdichtung die Teilverdichtungen mit um so größerer Geschwindigkeit fortschreiten, je höher der Druck bereits gestiegen ist, so daß also der Kopf der Welle schneller läuft als der Fuß und diesen daher mit der Zeit einholt. Von da ab ergibt sich ein unstetiger Verdichtungsvorgang, über den später noch mehr zu sagen sein wird. Bei einer Verdünnungswelle bleibt das Ende gegen den Anfang zurück, so daß die Form der Welle immer flacher wird. Fig. 181 und 182 veranschaulichen diese Vorgänge.

§ 2. Stationäre Strömungen bei erheblichen Volumenänderungen in eindimensionaler Behandlung. Hier gilt für einen Stromfaden die verallgemeinerte Bernoullische Gleichung [Gl. (3 b) von Abschnitt II, § 3]. Bei Vernachlässigung der Schwere lautet diese, wenn wie in diesem ganzen Kapitel von Reibung abgesehen wird

$$P + \frac{w^2}{2} = const = P_1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

Die Druckfunktion $P = \int \frac{dp}{\varrho}$ ist dabei für die adiabatische Zustands-

[1]) Nach C. Cranz, Lehrbuch der Ballistik 2, 451. Mit freundlicher Erlaubnis des Verlages Julius Springer, Berlin 1926.

[2]) Vgl. z. B. B. Riemann und H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Bd. 2, S. 507, 5. Aufl. Braunschweig 1912.

änderung zu nehmen, die allein hier in Betracht kommt. Für ideale Gase ist $\varrho = \varrho_1 \cdot \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}$; durch Auswertung des Integrals erhält man somit

$$P = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot \frac{p_1}{\varrho_1} \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

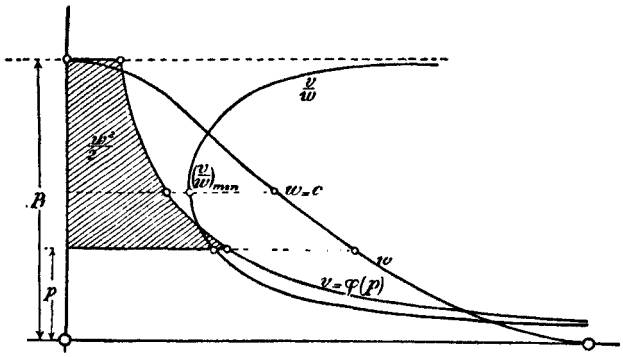
Ist p_1 der Druck, bei dem $w = 0$ ist, also z. B. bei Ausflußvorgängen der Druck im Kessel, so wird

$$w = \sqrt{2(P_1 - P)} = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p_1}{\varrho_1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right]} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Man sieht leicht, daß die Geschwindigkeit, die sich beim Expandieren des Gases bis in das äußerste Vakuum ergibt, endlich ist. Sie entspricht $p = 0$ in Gl. (3) und ist also

$$w_{\max} = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p_1}{\varrho_1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Fig. 183.



v, w und v/w abhängig von p.

Für Luft von gewöhnlicher Temperatur (rund 15° C) und Atmosphärendruck als Ausgangszustand gibt dies, wenn in kg und m gerechnet wird:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}405}{0{,}405} \cdot \frac{10330}{0{,}125}} = 757 \text{ m/s}.$$

Der Zusammenhang von w mit p ist in Fig. 183 dargestellt. Diese Figur enthält noch das spezifische Volumen $v = 1/\varrho$ abhängig von p gemäß der Adiabatengleichung. Die schraffierte Fläche $\int_p^{P_1} v\,dp$ ist nichts anderes als $P_1 - P$. Über die Kurve v/w abhängig von p siehe unten.

Die Kontinuität liefert für die stationäre Strömung einer zusammendrückbaren Flüssigkeit entsprechend Gl. (3) von § 2 als Aussage, daß durch alle Querschnitte eines Stromfadens dieselbe sekundliche Masse strömt:

$$F \varrho w = const. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

längs des Stromfadens. Der Verlauf des Stromfadenquerschnitts F mit dem Druck p ist durch den Verlauf der Funktion $1/\varrho w = v/w$ gegeben, vgl. die

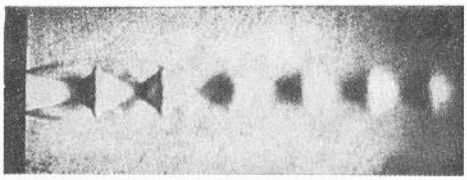
bezügliche Kurve in Fig. 183; er läßt sich auch durch folgende Überlegung im Anschluß an Gl. (3) und (5) klarmachen: Wenn man mit $p = p_1$ beginnt, so ist zunächst $w = 0$ und daher $F = \infty$. Wenn p nun abnimmt, so wächst w allmählich an, ohne daß ϱ sich vorerst viel ändert, also muß F abnehmen. Ist jedoch p bereits sehr klein geworden, so nähert sich w dem Betrage w_{max}, ändert sich also nicht mehr viel, ϱ nimmt aber mit unbegrenzt abnehmendem p ebenfalls unbegrenzt ab, also muß F in diesem Gebiet zunehmen und gegen ∞ streben.

Zwischen dem Gebiet, wo F abnahm, und dem, wo es zunimmt, muß offenbar ein Minimum von F liegen; es liegt da, wo die verhältnismäßige Zunahme der Geschwindigkeit $\frac{dw}{w}$ geradeso groß ist wie die verhältnismäßige Abnahme der Dichte $-\frac{d\varrho}{\varrho}$. Die Nachrechnung zeigt nun, daß dieses Minimum gerade da liegt, wo die Strömungsgeschwindigkeit gleich der zu diesem Zustand gehörigen Schallgeschwindigkeit ist. Wegen der erfolgten adiabatischen Abkühlung ist diese Schallgeschwindigkeit nicht die des Anfangszustandes, sondern entsprechend der niedrigeren Temperatur kleiner (bei Luft von gewöhnlicher Temperatur im Ausgangszustand rund 315 m/sec). Die eben erwähnte Beziehung läßt sich auch ohne alle Rechnung aus der Betrachtung des vorigen Paragraphen erschließen. Betrachtet man nämlich den in Fig. 177 dargestellten Vorgang von einem Bezugssystem aus, das sich mit der Geschwindigkeit c nach rechts hin fortbewegt, so erscheint das Gas dort, wo es in Ruhe ist, als mit der Geschwindigkeit c von rechts nach links strömend, und die Druckwelle bleibt an ihrem Orte stehen. Von diesem Bezugssystem aus hat man also eine stationäre Strömung von der Besonderheit, daß ein Druckunterschied in einer Strömung ohne Querschnittsänderung des Stromfadens besteht. Das ist aber auch gerade die kennzeichnende Eigenschaft der Stelle in unserem Stromfaden, wo der Querschnitt ein Minimum hat, also weder zunimmt noch abnimmt.

Nach Überschreitung des Minimums ist die Geschwindigkeit somit größer als die Schallgeschwindigkeit. In einer solchen Strömung nimmt nach obigem bei Druckabnahme, also Geschwindigkeitszunahme, der Querschnitt zu (statt abzunehmen, wie es bei volumenbeständigen Flüssigkeiten der Fall wäre); bei Druckzunahme (Geschwindigkeitsabnahme) nimmt er ab. Hieraus resultiert ein stark von dem Gewohnten verschiedenes Verhalten solcher Strömungen. Ein regelmäßiges Anwachsen der Geschwindigkeit bis zu dem aus der Druckgleichung sich ergebenden Endwert ist, wenn dieser Endwert größer ist als die Schallgeschwindigkeit, nur dann möglich, wenn die Röhre, in der die Strömung erfolgt, sich zuerst verengt und hinterher um einen genau bestimmten Betrag wieder erweitert (De Lavalsche Dampfdüse, siehe unten). Bei einer einfachen Öffnung ohne Erweiterung kann sich daher, sobald der Gegendruck klein genug ist, um Überschallgeschwindigkeit zu erzeugen, in der Öffnung selbst nur noch derjenige Druck einstellen, der einer Strömungsgeschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit entspricht [bei Luft und

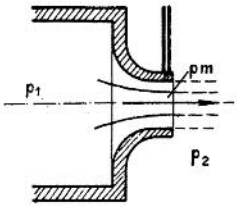
anderen zweiatomigen Gasen rund 0,53 des Druckes des ruhenden Gases[1])]. Die Ausflußmenge ist dann von dem Gegendruck ganz unabhängig. Außerhalb der Mündung erweitert sich der Querschnitt des Gasstrahles, und zwar durch Trägheitswirkung der Gasströmung so stark, daß in seinem Innern Unterdruck entsteht. Infolge des Unterdruckes wird die Strömung dann

Fig. 184.



Wellen in ausfließender Druckluft nach L. Mach.

Fig. 185.



Messung des Mündungsdrucks.

Fig. 186.

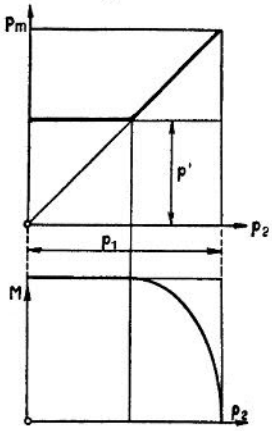
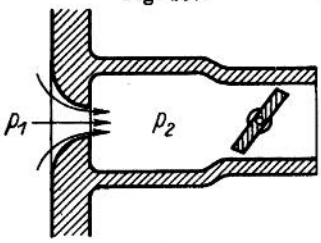


Fig. 187.



wieder konvergent und verdichtet sich wieder ungefähr auf den Mündungsdruck, worauf das Spiel von neuem beginnt. Fig. 184[2]) zeigt eine Aufnahme eines solchen Luftstrahles von E. Mach[3]) mit der Töplerschen Schlierenmethode (über diese siehe § 4).

Der Mündungsdruck p_m kann durch eine Anbohrung der Düse knapp vor dem freien Rand gemessen werden, vgl. Fig. 185. Er ist für Außendrücke p_2,

---

[1]) Formel: $p' = p_1 \cdot \left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}$; zugehörige Geschwindigkeit

$$w' = c' = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\,\frac{p_1}{\varrho_1}}.$$

[2]) Die Fig. 178, 179, 181—190, 192—205, 212—215 sind mit freundl. Erlaubnis des Verlages Gustav Fischer (Jena) dem Artikel des Verfassers über „Gasbewegung" im Handwörterbuch der Naturwissenschaften, Bd. IV, entnommen.

[3]) E. Mach, Sitzungsber. d. Wien. Akad. IIa **98**, 1303, 1889 und **106**, 1025, 1897; vgl auch R. Emden, Ann. d. Phys. u. Chem. (3) **69**, 264 u. 426, 1899 und L. Prandtl, Physik. Zeitschr. **8**, 23, 1907.

die kleiner sind als der „kritische Druck" p', sehr gut konstant und gleich dem kritischen Druck. Für höhere Gegendrücke p_2 stimmt er praktisch mit p_2 überein. Läßt man p_2 von dem Wert $= p_1$ an allmählich sinken, so steigt die Ausflußmenge

$$M = F\varrho_2 w_2 = F\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1} p_1 \varrho_1 \left(1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right)} \quad . \quad . \quad (6)$$

allmählich bis zu einem Maximum beim kritischen Druck, das sich zu

$$M_{\max} = \left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}} F \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa+1} \cdot p_1 \varrho_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

ergibt. Bei weiterem Sinken von p_2 bleibt dann $M = const = M_{\max}$. Der Verlauf von p_m und M abhängig von p_2 ist in Fig. 186 wiedergegeben.

Der Verlauf der M-Kurve für $p_1 < p_2 < p'$ ist nahezu ein Viertel einer Ellipse; man kann diesen Umstand nach Fliegner zur Aufstellung von praktischen Näherungsformeln verwenden, die für atmosphärische Luft folgendermaßen lauten:

1. für $p_2 > {}^1/_2\, p_1$:

$$M = 0{,}76\, F \sqrt{\frac{(p_1 - p_2)\, p_2}{T_1}},$$

2. für $p_2 < {}^1/_2\, p_1$:

$$M = 0{,}38\, F \frac{p_1}{\sqrt{T_1}}.$$

Hierin ist p in kg/cm² und F in cm² einzuführen; T_1 ist die absolute Temperatur im Kessel; dann gibt die Formel die sekundliche Ausflußmenge in Kilogramm.

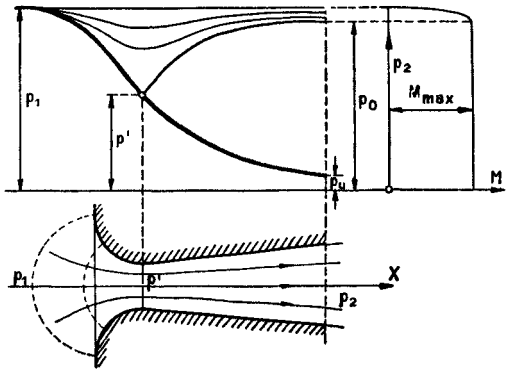
Das geschilderte Verhalten läßt sich auch von dem in § 1 dargelegten Gesichtspunkt der Druckausbreitung gut verstehen. Wir wollen annehmen, daß an das Austrittsende der Düse eine Kammer anschließt, in der der Druck durch ein Ausflußventil oder dergleichen geregelt werden kann, vgl. Fig. 187 Der Druck in der Kammer, also p_2, möge augenblicklich größer als der kritische Druck sein. Wird nun p_2 durch weiteres Öffnen des Ausflußventils usw. erniedrigt, so läuft eine Verdünnungswelle in die Düse hinein und stellt den neuen Strömungszustand her. (Zusatzgeschwindigkeit entgegen der Richtung der Wellenfortpflanzung, also im Sinne einer Vermehrung der Strömungsgeschwindigkeit.) Bei weiterem Sinken von p_2 geht dies aber nur so lange weiter, bis in der Mündung Schallgeschwindigkeit erreicht ist. Die nun folgenden Druckerniedrigungen können sich jetzt, da sie in dem Gase nur mit Schallgeschwindigkeit vorwärts kommen, nicht mehr in die Mündung hinein fortpflanzen, der Zustand dort bleibt also von jetzt ab ungeändert. Das Ergebnis ist also dasselbe wie vorher.

Um bei einem weit über das kritische Verhältnis hinausliegenden Druckverhältnis eine geregelte Expansion zu erhalten, hat der schwedische Ingenieur de Laval bei der Konstruktion seiner Dampfturbine Ausflußdüsen von der in Fig. 188 zu erkennenden Gestalt angewandt. Die Vorgänge in solchen Düsen sind, da sie ein großes praktisches Interesse haben, sehr eingehend theoretisch und experimentell untersucht; diesen Studien verdankt man die Lösung vieler prinzipieller Fragen der Gas- und Dampfströmung.

Hier mag nur die reibungslose Strömung durch eine solche Düse erörtert werden. Der Druck vor der Düse p_1 sei vorgegeben, dann lassen sich die

zu jedem niedrigeren Druck p gehörigen Werte von w und $\frac{v}{w}$ aus den Formeln oder mittels der Fig. 183 bestimmen. Da die Durchflußmenge (Masse pro Sekunde) $M = F\varrho w = F \cdot \frac{w}{v}$ ist, läßt sich hiernach für jeden gegebenen Wert von M der zu jedem Querschnitt F gehörige Wert von $\frac{v}{w}$ bestimmen und aus Fig. 183 der zugehörige Druck aufsuchen. Für den normalen Betriebszustand muß offenbar das Minimum des Stromfadenquerschnitts, also das von $\frac{v}{w}$, mit dem Querschnittsminimum der Düse zusammenfallen; die Ausflußmenge wird hier ein Maximum und bestimmt sich wie bei einer einfachen Mündung nach Gleichung (7). Der in der beschriebenen Weise er-

Fig. 188.



Strömung durch eine Lavaldüse.

mittelte Druckverlauf ergibt die in Fig. 188 stark gezeichnete Linie (von p_1 nach dem untersten Druck p_u). Da aber zu einem Werte von $\frac{v}{w}$ nach Fig. 183 immer zwei Drücke gehören, findet sich von der engsten Stelle an noch ein zweiter möglicher Druckverlauf, der zu dem oberen Enddruck p_o hinführt.

Ermittelt man in gleicher Weise den zu kleineren Ausflußmengen gehörigen Druckverlauf, so erhält man die in Fig. 188 oberhalb p_o endigenden Linien. Der Verlauf der Ausflußmenge mit der Veränderung des Druckes p_2 am Düsenende ergibt sich demnach (vgl. die rechts an Fig. 188 angefügte Darstellung) so, daß von $p_2 = p_1$ bis $p_2 = p_o$ die Ausflußmengen von Null bis M_{max} anwächst. Von da ab ist im engsten Querschnitt die Schallgeschwindigkeit erreicht, und man kann deshalb nach den obigen Auseinandersetzungen über die Rolle der Schallgeschwindigkeit auch ohne genaue Kenntnisse der hier eintretenden Vorgänge erwarten, daß bei weiterem Sinken von p_2 die Vorgänge oberhalb der engsten Stelle sich nicht mehr ändern und die Ausflußmenge daher konstant bleibt. Der geschilderte Verlauf der Ausflußmenge ist denn auch durch viele Versuche gut bestätigt.

Die vorstehende Betrachtung zeigt, daß auf Drücke p_2 zwischen p_0 und p_u keine verlustlose Strömung hinführt. Beobachtungen des Druckverlaufs führten A. Stodola zu der Erkenntnis, daß hier unstetige Verdichtungen auftreten, die den von Riemann theoretisch vorausgesagten Unstetigkeiten (vgl. § 1) verwandt sind. Bei solchen Vorgängen treten tatsächlich Verluste auf, sie können daher nicht mehr mit den Formeln für verlustlose Strömung behandelt werden. Dagegen gelingt eine Theorie dieser Vorgänge durch Anwendung der Impulsgleichung, wie sie in § 12 des zweiten Abschnitts abgeleitet ist, in Verbindung mit einem Energiesatz, der in allen Fällen wichtig wird, wo Strömungen mit erheblicher Volumenänderung mit Widerständen verknüpft sind. Es soll deshalb zunächst dieser Energiesatz allgemein abgeleitet werden.

§ 3. Energiesatz für Strömungen mit Widerständen. Strömungswiderstände haben bei Gasen eine doppelte Wirkung: neben der mechanischen Hemmung der Strömung eine Zufuhr von Wärmeenergie, die der vernichteten mechanischen Energie entspricht. Es ist so, im Gegensatz zu der Strömung volumbeständiger Flüssigkeiten, die Möglichkeit vorhanden, einen Teil der Widerstandsenergie, weil sie in Wärme verwandelt wurde, bei einer weiteren Expansion wieder nutzbringend zu verwerten.

Um einen Überblick über die hier obwaltenden Gesetzmäßigkeiten zu erhalten, wird zweckmäßig ein Energiesatz hergeleitet, der durch ganz ähnliche Betrachtungen erhalten wird, wie die Impulssätze in Abschnitt 2, § 12. Man betrachtet die Energieänderung in einem irgendwie abgegrenzten Teil einer stationär strömenden Gasmasse. Am bequemsten nimmt man hierzu ein Stück eines Stromfadens, vgl. Fig. 72, S. 66. Hier besteht, da die Bewegung stationär sein soll, die Änderung im Zustand der abgegrenzten Gasmasse in der Zeit dt einfach darin, daß bei A ein Massenteilchen $dm = \varrho_A F_A w_A dt$ verschwunden und bei B ein Massenteilchen $dm' = \varrho_B F_A w_B dt$ hinzugekommen ist; wegen der Kontinuität ist $dm = dm'$.

Es ist nun auszusagen, daß die bei dieser Verschiebung in der Gasmasse auftretende Änderung des Energieinhalts gleich der während der Zeit dt von außen zugeführten Energie sein muß. Der Energieinhalt eines Massenteilchens besteht nun aus seiner kinetischen Energie, seiner potentiellen Energie und seiner Wärmeenergie, der sogenannten „inneren Energie", die für die Masseneinheit den Wert u haben soll; u soll dabei nicht im Wärmemaß, sondern im Arbeitsmaß, wie eine mechanische Energie, gemessen sein. Der Energieinhalt der Masse dm ist demnach, wenn die potentielle Energie lediglich von der Erdschwere herrührt, $= dm\left(\frac{w^2}{2} + gz + u\right)$. Die Energiezufuhr an die in der Stromröhre befindliche Masse besteht aus Druckarbeit an den Endflächen und aus einer etwaigen Wärmezufuhr durch die Seitenflächen. Reibungsarbeiten kommen hier nicht in Ansatz, weil sie nur Verwandlung von Arbeit in Wärme, aber keine Änderung des Energieinhalts bedeuten. Die Druckarbeit an der Fläche F_A ist Kraft $\times$ Weg: $F_A p_A . w_A dt$ oder durch Ein-

führung von $dm: = dm \cdot \frac{p_A}{\varrho_A} = dm \,.\, p_A v_A$; ebenso bei B: $-dm \,.\, p_B v_B$. Eine etwaige Wärmezufuhr zwischen A und B sei mit $q_{AB} \,.\, dm$ bezeichnet (dann bedeutet q_{AB} die jeder Masseneinheit auf dem Wege von A nach B mitgeteilte Wärme). So lautet dann die obige Aussage über die Änderung des Energieinhalts:

$$dm\left(\frac{w_B^2}{2} + g z_B + u_B\right) - dm\left(\frac{w_A^2}{2} + g z_A + u_A\right) = dm(p_A v_A - p_B v_B + q_{AB}).$$

Es ist also

$$\frac{w_B^2}{2} + g z_B + u_B + p_B v_B = \frac{w_A^2}{2} + g z_A + u_A + p_A v_A + q_{AB},$$

oder, da man den Endquerschnitt B beliebig variieren kann:

$$\frac{w^2}{2} + g z + u + p v = const + q \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

Die Gleichung wird auch häufig in differenzierter Form benutzt:

$$w\,dw + g\,dz + du + d(p v) = dq \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1\text{a})$$

Die Größe $u + p v$ wird in der Thermodynamik viel verwandt. Sie wird Wärmeinhalt oder auch Wärmefunktion genannt. Sie pflegt mit i bezeichnet zu werden.

Für permanente Gase gelten die Formeln

$$u = \frac{1}{k-1} p v = c_v T,$$

$$i = u + p v = \frac{k}{k-1} p v = c_p T.$$

c_v und c_p sind dabei in Arbeitseinheiten zu messen, d. h. ihre gewöhnlichen Werte sind durch das Wärmeäquivalent zu dividieren.

Zu der Energiegleichung kann man die weitere Aussage hinzunehmen, die dem sogenannten I. Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie entspricht. Es muß nämlich für jedes Massenelement des Gases die Beziehung gelten, daß die durch Leitung zugeführte Wärme und die in Wärme verwandelte Reibungsarbeit dazu verwendet wird, die innere Energie zu erhöhen und Expansionsarbeit zu leisten. Die auf einem Element des Stromfadens in der Masseneinheit auftretende Reibungsarbeit heiße dR, dann ist:

$$dq + dR = du + p\,dv \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

Addiert man diese Gleichung zu der differenzierten Gleichung (1), so ergibt sich mit $d(pv) = p\,dv + v\,dp$:

$$w\,dw + g\,dz + v\,dp + dR = 0, \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

woraus sich durch Integration die für Bewegungen mit Widerständen ergänzte Bernoullische Druckgleichung ergibt:

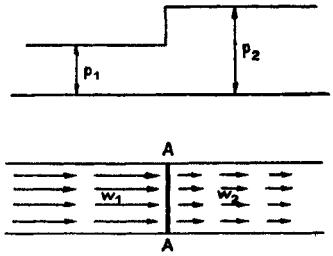
$$\frac{w^2}{2} + g z + \int v\,dp = R = const \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3\text{a})$$

R bedeutet hierbei die der Masseneinheit vom Anfangsquerschnitt bis zu dem fraglichen Querschnitt zugeführte Reibungsarbeit.

Die Größe $\frac{R}{g}$ kann als „Reibungshöhe" bezeichnet werden, so daß sich also hier die Konstanz der Summe aus Geschwindigkeitshöhe, Ortshöhe, Druckhöhe (vgl. Abschn. 2, § 3) und Reibungshöhe ergibt.

§ 4. Theorie des geraden Verdichtungsstoßes. Das einfachste Beispiel einer unstetigen Verdichtung ist der von Stodola[1]) zuerst behandelte „gerade stationäre Verdichtungsstoß". Das Gas kommt in Parallelströmung mit der Geschwindigkeit w_1, einem Drucke p_1 und Volumen v_1 an und verdichtet sich in einer Ebene AA, Fig. 189 unter Verringerung der Geschwindigkeit auf w_2 und Erhöhung des Druckes auf p_2 auf das kleinere Volumen v_2. Der Vorgang, der gewisse Ähnlichkeit mit dem in § 15 von Abschn. II beschriebenen „Schwall" hat, wird durch die folgenden Gleichungen beherrscht:

Fig. 189.



Gerader Verdichtungsstoß.

1. die Kontinuitätsgleichung (in der die sekundlich strömende Masse m zweckmäßig auf die Flächeneinheit bezogen wird):

$$m = \frac{w_1}{v_1} = \frac{w_2}{v_2},$$

2. die Impulsgleichung:

$$m(w_1 - w_2) = p_2 - p_1,$$

3. die Energiegleichung (keine Wärme- zu- oder -abfuhr q!):

$$\frac{w_1^2}{2} + u_1 + p_1 v_1 = \frac{w_2^2}{2} + u_2 + p_2 v_2.$$

Wenn also drei Größen, z. B. p_1, v_1 und p_2, gegeben werden, so lassen sich die drei anderen: w_1, w_2 und v_2 berechnen. Die Rechnungen sind aber etwas umständlich. Von den Resultaten seien die wichtigsten angegeben:

Für die Geschwindigkeiten erhält man unter Voraussetzung der einfachen Gasgesetze die Beziehung

$$w_1 \cdot w_2 = c'^2,$$

wo c' die kritische Schallgeschwindigkeit nach Gleichung (8) ist. Es ergibt sich also immer von den Geschwindigkeiten w_1 und w_2 die eine größer, die andere kleiner als die Schallgeschwindigkeit. Nach den Formeln, die sämtlich völlig symmetrisch sind, wäre sowohl unstetige Verdichtung, wie unstetige Verdünnung möglich. Jedoch läßt sich durch Betrachtung der Entropie, die bei abgeschlossenen Systemen nur wachsen, niemals abnehmen kann, zeigen, daß nur der Verdichtungsstoß, bei dem die Entropie zunimmt, physikalisch möglich ist. Dies ist auch in bestem Einklang mit den Ausführungen am Ende von § 1, nach denen nur die unstetige Verdichtung Bestand hat, die unstetige Verdünnung sich aber sofort zu einer stetigen Verdünnungswelle umformt. Es ist also immer w_1 größer als Schallgeschwindigkeit.

[1]) Vgl. z. B. Stodola, Dampf- und Gasturbinen. 5. Aufl., S. 68 ff. Berlin 1922.

Die Beziehungen über den stationären Verdichtungsstoß lassen sich durch eine Änderung des Bezugssystems sofort auch auf eine über eine ruhende Luftmasse hinwegschreitende Verdichtungswelle anwenden. Denkt man nämlich dem strömenden System in Fig. 189 eine Geschwindigkeit von der Größe w_1 nach links erteilt, so wird die Geschwindigkeit vor der Stoßebene zu Null, der Stoß rückt mit der Geschwindigkeit $c = w_1$ nach links, und die Gasmasse hinter dem Stoß strömt mit der Geschwindigkeit $w = w_1 - w_2$ nach.

Die Impulsgleichung erhält hier die Form: $p_2 - p_1 = \varrho_1 c w$, woraus sich für kleines w, wo c nahezu gleich der Schallgeschwindigkeit ist, der Zusammenhang der Druckerhöhung mit der Nachströmungsgeschwindigkeit w abschätzen läßt. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c ist hier also immer größer als die Schallgeschwindigkeit, und kann für beliebig große Druckunterschiede auch beliebig groß werden. Solche große Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind bei Explosionen beobachtet worden.

Zieht man in Betracht, daß die Gase eine, wenn auch kleine Wärmeleitfähigkeit haben, so findet man statt der mathematisch scharfen Unstetigkeit einen allmählichen Übergang von p_1 auf p_2, der sich allerdings meist auf Strecken von der Größenordnung von $^1/_{1000}$ mm vollzieht [Prandtl[1]), R. Becker[2])]. Die oben erwähnte Entropievermehrung wird dabei in der Hauptsache durch Wärmeübergang von den bereits verdichteten und daher heißeren Gasmassen an die noch unverdichteten hervorgebracht.

Beim Verdichtungsstoß wird der Betrag $\frac{w_1^2 - w_2^2}{2}$ in Vermehrung des Wärmeinhalts übergeführt; von ihm kann nur ein Teil durch Expansion von p_2 auf p_1 wieder in Form von kinetischer Energie zurückgewonnen werden. Beim inhomogenen Verdichtungsstoß (z. B. der Kopfwelle bei Geschossen, Fig. 212, oder der Unstetigkeit in Fig. 198) erfahren die verschiedenen Stromfäden verschiedene Erwärmung, so daß also die Homogenität der Gasmasse und deshalb auch die Drehungsfreiheit verloren geht.

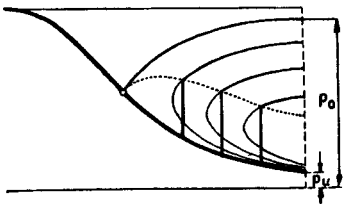
Anmerkung: Mit diesen unstetigen Verdichtungsvorgängen sind die „Explosionswellen" verwandt, die bei der Verbrennung von entzündbaren Gasgemischen auftreten können. Diese Vorgänge, bei denen in der Verdichtungsebene durch die bei der Verdichtung erfolgende Erhitzung die Entzündung und sofortige Verbrennung erfolgt, zeigen enorme Fortpflanzungsgeschwindigkeiten (bei H_2O-Knallgas bis 2800 m/sek).

Durch die rechnerische Beherrschung der Verdichtungsstöße ist man jetzt auch in der Lage, die in § 2 offengelassene Frage zu beantworten, was in einer Lavaldüse zu erwarten ist, wenn der Außendruck hinter der Düse p_2, zwischen p_o und p_u liegt. Wir wollen annehmen, daß sich in solchen Fällen irgendwo hinter der engsten Stelle ein gerader Verdichtungsstoß einstellt, durch den sich der Übergang von der Überschallgeschwindigkeit zur Unterschallgeschwindigkeit vollzieht. Da beim Verdichtungsstoß die Gesamtenergie ungeändert bleibt, erhält man über die hier auftretenden Vorgänge Aufschluß, wenn man die Fig. 188 durch Druckverlauflinien ergänzt, die derselben

[1]) L. Prandtl, Zeitschr. f. d. gesamte Turbinenwesen 3, 241, 1906.
[2]) R. Becker, Zeitschr. f. Physik 8, 321, 1922.

sekundlichen Menge und derselben Gesamtenergie, aber geringeren Anfangsdrücken p_1 entsprechen. Dies ist in Fig. 190 geschehen. Der Übergang von der Linie des normalen Druckverlaufs $p_1 - p_u$ zu den neuen Kurven wird durch den Verdichtungsstoß hergestellt, dessen Lage durch die Erfüllung der Impulsgleichung eindeutig festgelegt ist. In Wirklichkeit sind die Vorgänge allerdings keineswegs so eindeutig, da an Stelle des geraden Verdichtungsstoßes auch schräge Verdichtungsstöße (vgl. § 6) oder andere Widerstandsvorgänge auftreten können. In Wirklichkeit wird der Vorgang dadurch noch etwas geändert, daß bei dem Druckanstieg an der Verdichtungsstelle infolge der Wandreibung eine Loslösung der Strömung von der Wand erfolgt (vgl. § 6 von Abschn. III). Infolge der hierdurch veränderten Strömungsquerschnitte folgt der Druck hinter dem Stoß nicht mehr genau den berechneten Kurven; vielfach treten auch Wellen in dem freien Strahl innerhalb der Düse auf.

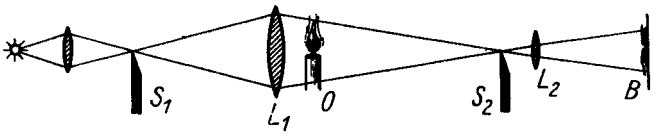
Fig. 190.



Druckverlauf in der Lavaldüse mit Verdichtungsstößen.

Fig. 192 bis 195, die Schlierenaufnahmen von Strömungen durch eine Düse von rechteckigem Querschnitt mit Seitenwänden aus Glas darstellen, illustrieren diese Vorgänge. Über die [von Töpler[1]) angegebene] Schlierenmethode mag folgende kurze Erläuterung vorausgeschickt werden. Sie dient dazu, kleine Dichtigkeitsunterschiede durch Beleuchtungsunterschiede sichtbar

Fig. 191.



Schlierenoptik.

zu machen. Zu diesem Zweck wird zunächst (vgl. Fig. 191) das Licht einer passenden Lichtquelle durch eine Sammellinse auf einen kleinen Fleck konzentriert und an dieser Stelle ein Schirm S_1 aufgestellt, dessen scharfe Kante einen Teil des Lichtes abschneidet. Von dem Lichtfleck und der Kante wird durch eine gut korrigierte Linse L_1 ein scharfes Bild auf einem zweiten Schirm S_2 erzeugt, der eine der ersten parallele scharfe Kante hat. Diese Kante wird so eingestellt, daß ein schmaler Lichtstreifen über die Kante von S_2 hinweggeht, das Übrige aber abgefangen wird. Bringt man nun, etwa bei O, ein störendes Objekt, z. B. eine Kerzenflamme, in den Strahlengang, das den durchgehenden Lichtstrahlen kleine Ablenkungen erteilt, so wird von dem Licht, das vom Lichtfleck aus durch eine Stelle des Objekts hindurchgeht, die eine Ablenkung nach oben hervorruft, mehr über die Kante von

[1]) A. Töpler, Beobachtungen nach einer neuen optischen Methode. Bonn 1864 = Ostwalds Klassiker, Bd. 157.

S_2 hinübergehen, als ohne Ablenkung der Fall wäre; bei Ablenkung des Lichtstrahls nach unten kommt weniger oder auch gar kein Licht mehr durch. Wenn man also jetzt durch eine zweite Linse L_2 das Objekt O scharf auf eine Mattscheibe oder photographische Platte abbildet, so erhält man ein Bild B des Objekts O, bei dem die nach oben ablenkenden Stellen hell, die nach unten ablenkenden dunkel erscheinen. Die Ablenkungen in einer inhomogenen Luftmasse sind proportional der Komponente des Dichtigkeitsgradienten in der Richtung senkrecht zur Kante. Es wird also in einem bestimmten Fall Dichtigkeitsabnahme von links nach rechts Helligkeit und Dichtigkeitszunahme Dunkelheit ergeben; bei Strömung von links nach rechts bedeutet also in diesem Falle Helligkeit Expansion, Dunkelheit, Verdichtung.

Fig. 192.

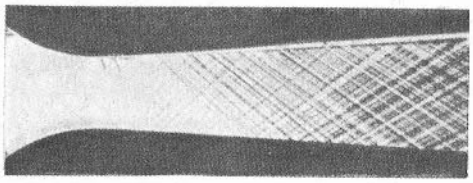


Fig. 193.

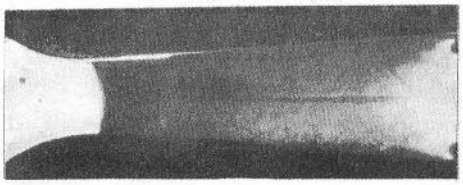


Fig. 194.

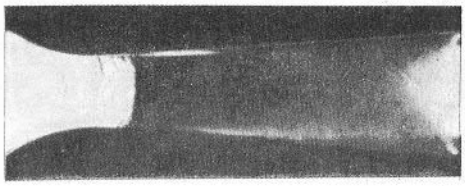
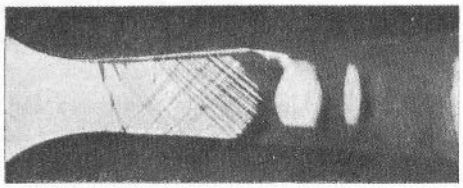


Fig. 195.



Von der in Fig. 192 bis 195 dargestellten Versuchsreihe zeigt Fig. 192 die ungestörte Expansion von Druckluft von etwa 7 Atm. Anfangsdruck auf Atmosphärendruck. In dem Gebiet der Überschallgeschwindigkeit erkennt man die sich kreuzenden feinen stationären Schallwellen, die hier besonders kräftig in Erscheinung treten, weil die Düsenwände absichtlich mit einer Feile rauh gemacht waren. Die Ausmessung der Winkel, unter denen sich die Wellen schneiden, lieferte eine Bestimmung von w/c, die gute Übereinstimmung mit der Vorausberechnung ergab[1]). Fig. 193 veranschaulicht den Dichteverlauf ohne Erreichung der Schallgeschwindigkeit ($p_2 > p_0$); die Dichte fällt bis zum engsten Querschnitt und steigt dann wieder an. Nirgends zeigen sich stationäre Schallwellen. Fig. 194 zeigt einen Verdichtungsstoß ($p_2 < p_0$); man sieht deutlich die ersten stationären Schallwellen vor der

[1]) L. Magin, Diss. Göttingen = Forschungsheft 62 des Vereins Deutsch. Ing. 1908.

Stoßstelle, hinter ihr aber nur die gleichförmige Fläche der Unterschallgeschwindigkeit. Fig. 195 zeigt einen Zustand mit noch kleinerem Gegendruck, mit deutlicher Strahlablösung und mit Querwellen. Soweit Überschallgeschwindigkeit herrscht, ist jedes feine Schallwellchen identisch mit dem entsprechenden in Fig. 192, was wieder zeigt, daß, soweit die Schallgeschwindigkeit überschritten bleibt, die Verhältnisse stromabwärts ohne jeden Einfluß bleiben.

Anmerkung. Die Ähnlichkeit der Strömung durch eine Düse mit den Vorgängen beim Überströmen von Wasser über ein Wehr (Abschnitt II, § 16) ist unverkennbar. In der Tat spielt dort die Grundwellengeschwindigkeit dieselbe Rolle, wie hier die Schallgeschwindigkeit.

§ 5. Strömung mit Widerständen. a) Stationäre Strömungen. Bei einer stationären Strömung mit Widerständen, aber ohne Wärmemitteilung durch die Wände, bleibt die Gesamtenergie konstant, indem die Reibungsarbeit vollständig in Wärme verwandelt wird. Da meist die Höhenunterschiede keine Rolle spielen, regeln sich die Vorgänge nach der Energiegleichung [Gl. (1) von § 3], es ist also hier

$$\frac{w^2}{2} + u + pv = const;$$

für permanente Gase nimmt diese Gleichung die einfache Form an

$$\frac{w^2}{2} + \frac{k}{k-1}\, pv = const \tag{4}$$

oder

$$\frac{w^2}{2} + c_p T = const \tag{4a}$$

(c_p in Arbeitseinheiten zu messen, vgl. § 3). Hieraus ist die wichtige Tatsache abzulesen, daß — unter Voraussetzung der einfachen Gasgesetze — die Temperaturabsenkung gegen den Anfangszustand, unabhängig von der Größe der Widerstände, lediglich von der an der betreffenden Stelle vorhandenen Geschwindigkeit abhängt. Ist die Geschwindigkeit überall unbedeutend, wie es bei Strömung mit sehr großen Widerständen vorkommt, so expandiert das Gas während der Strömung bei konstanter Temperatur. Die Expansionsarbeit wird hierbei eben vollständig in Reibungsarbeit umgesetzt und dadurch die der Expansion zukommende Abkühlung durch Reibungswärme wieder wettgemacht. Gleiches gilt, wenn eine bereits erzeugte Geschwindigkeit durch Widerstände wieder vernichtet wird.

Die wirklichen Gase zeigen eine geringe Abweichung von diesem Verhalten, die zuerst von W Thomson und Joule gefunden wurde. Diese fanden beim Durchströmen von Luft mit großem Druckunterschied durch einen Wattepfropfen eine geringe Abkühlung, die durch die molekulare Anziehung erklärt wird. Diese Abkühlung, die bei Luft von gewöhnlicher Temperatur $^1/_4{}^0$ C für jede Atmosphäre beträgt, bei tiefen Temperaturen jedoch bedeutend stärker ist, bildet die Grundlage der Lindeschen Luftverflüssigungsmaschine.

Die Strömung mit Widerständen durch Röhren usw. läßt sich in der Weise rechnerisch verfolgen, daß man zur Energiegleichung (1) oder (4) die Kontinuitätsgleichung und die Druckgleichung (3a) von § 3 hinzunimmt, in der noch für die Widerstandsarbeit R ein spezieller Ansatz gemacht werden muß;

hier soll jedoch nicht näher darauf eingegangen werden, es mögen lediglich für ein Rohr von konstantem Querschnitt, für das die Rechnungen in der angedeuteten Weise von Grashof[1]) durchgeführt worden sind, einige qualitative Überlegungen angestellt werden.

Zur Vorbereitung sei eine Strömung mit Widerständen betrachtet, bei der die Geschwindigkeit w konstant bleibt; dann ist nach Gleichung (4) $pv = const.$ Da nun hier die Widerstände durch einen Druckabfall in der Strömungsrichtung bestritten werden müssen, ergibt sich ein in der Strömungsrichtung wachsendes Volumen und daher nach der Kontinuitätsgleichung wachsender Querschnitt. Um auf das Rohr von konstantem Querschnitt zurückzukommen, muß man eine nachträgliche Verengung des erweiterten Rohres hinzunehmen; diese bringt, wegen der Erhöhung der Geschwindigkeit, eine weitere Druckabsenkung, die wegen der damit verbundenen erneuten Volumenvergrößerung um so größer wird, je näher die Geschwindigkeit an die Schallgeschwindigkeit herankommt (vgl. die v/w-Kurve in Fig. 185). Die Schallgeschwindigkeit c', vgl. die Fußnote 1 von S. 188, stellt hier die Grenzgeschwindigkeit dar, die am Rohrende höchstens erreicht werden kann.

b) Ausströmen aus Gefäßen und Einströmen in Gefäße. Von Interesse sind noch die Vorgänge beim Ausströmen aus einem Gefäße und beim Einströmen in ein Gefäß. Wenn man von Wärmeaustausch des Gasinhalts mit den Wänden absieht, dann findet in einem Ausströmungsgefäß adiabatische Expansion, daher Abkühlung statt. Das ausgeströmte Gas hätte, wenn es sich wieder beruhigte, ohne sich zu vermischen, nach Gleichung (4a) die Temperatur, die im Gefäß herrschte, als es austrat. Da die Gefäßtemperatur allmählich von T_1 auf T_2 gesunken war, hat das Gemisch, das man etwa unter einer Gasglocke auffangen könnte, eine Temperatur T_m zwischen beiden Temperaturen. Die Abkühlung der Gasmengen im Gefäß auf T_2 und in der Gasglocke auf T_m ist auf Rechnung der Arbeit zu setzen, die gegen den Außendruck beim Heben der Gasglocke geleistet worden ist. Beim Einströmen eines unter atmosphärischem Druck stehenden Gases in ein teilweise evakuiertes Gefäß würde sich das in einem Moment eingeströmte Gas ohne Vermischung wieder auf die Außentemperatur erwärmen, während es sich beruhigt; das bereits im Gefäß befindliche Gas würde adiabatisch komprimiert und also erhitzt. Der wirkliche Zustand (mit Vermischung) wird also eine geringere Erwärmung ergeben, als der adiabatischen Kompression entspricht. Die Erwärmung ist auf Rechnung der vom äußeren Luftdruck beim Eindringen des Gases geleisteten Arbeit zu setzen. Im Falle des Eindringens eines Gases von konstantem Druck in ein völlig evakuiertes Gefäß ergibt sich das bemerkenswerte, auch durch die eben erwähnte Energiebeziehung leicht zu beweisende Resultat, daß die Temperatur T im Gefäße während des ganzen Einströmens konstant $= k\,T_0$ ist ($T_0 =$ Außentemperatur).

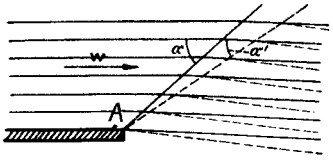
Findet Überströmen von einem Gefäß in ein zweites statt, so kühlt sich der Gasinhalt des ersteren ab, der des zweiten erwärmt sich. Da hier

[1]) Grashof, Theoretische Maschinenlehre, Bd. I, S. 592; Leipzig 1875; vgl. auch Zeuner, Techn. Thermodynamik, Bd. I, 2. Aufl., S. 261, Leipzig 1900.

äußere Arbeit nicht geleistet wird, bleibt der Gesamtwärmeinhalt der beiden Gefäße bei dem Vorgang konstant.

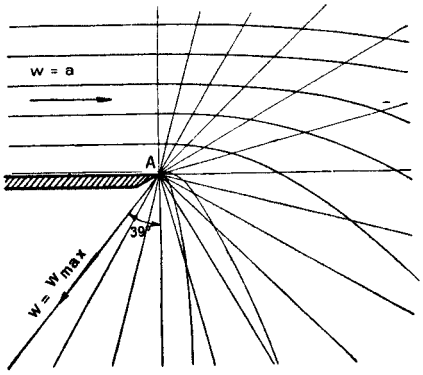
§ 6. Mehrdimensionale Behandlung der Überschallströmung. Strömung um eine Ecke. Gasstrahlen. a) Strömung mit Überschallgeschwindigkeit um eine Ecke. Zur Einführung in die Darlegungen dieses Abschnitts sei zunächst eine Gasströmung mit Überschallgeschwindigkeit betrachtet, bei der im Punkte A der Wand (Fig. 195a) unstetig eine kleine Druckerniedrigung eintritt. Diese Druckerniedrigung wird sich unter dem Machschen Winkel α (vgl. § 1) fortpflanzen und wird eine Beschleunigung der Strömung in der Richtung senkrecht zu dem Drucksprung veranlassen. Dadurch wird die Strömungsgeschwindigkeit etwas erhöht und gleichzeitig etwas abgelenkt. Läßt man nun im Punkt A eine weitere unstetige Druckerniedrigung eintreten, so pflanzt sich diese in der abgeänderten Strömung unter einem anderen Machschen Winkel α' (kleiner als α) fort und bewirkt weitere Vergrößerung und Ablenkung der Geschwindigkeit, usw. usw.

Fig. 195 a.



Überschallströmung mit Druckerniedrigung.

Fig. 196.



Strömung ins Vakuum.

Dieser Strömungsvorgang, der in Wirklichkeit stetig verläuft, läßt sich nach L. Prandtl[1]) und Th. Meyer[2]) als Potentialströmung theoretisch behandeln; er hat dem Vorstehenden entsprechend folgende Eigenschaften: längs eines jeden vom Punkte A aus gezogenen Fahrstrahles ist der Druck, sowie Größe und Richtung der Geschwindigkeit konstant; jeder Fahrstrahl schließt mit der Strömungsrichtung auf ihm den Machschen Winkel ein, es ist deshalb die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Fahrstrahl immer gleich der dem dortigen Zustand entsprechenden Schallgeschwindigkeit.

Der Verlauf der vollständigen Strömung von Schallgeschwindigkeit bis zur Maximalgeschwindigkeit (vgl. § 2), also bis zur Expansion in volles Vakuum, wird für $k = 1{,}405$ durch die Fig. 196 dargestellt. Die Richtung des Strahles biegt hierbei um 129° um.

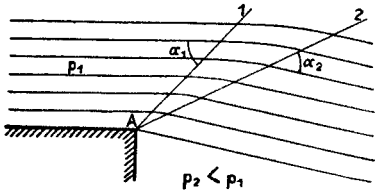
---

[1]) L. Prandtl, Physikal. Zeitschr. 8, 23, 1907.

[2]) Th. Meyer, Diss. Göttingen = Forschungsheft 62 des Vereins Deutsch. Ing. 1908.

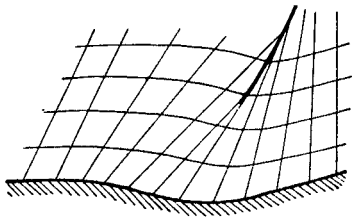
Der Hauptwert dieser Lösung der theoretischen Strömungsgleichungen besteht nun darin, daß man wegen der Eigenschaft der Fahrstrahlen als Linien der Druckfortpflanzung beliebige, von zwei Fahrstrahlen eingeschlossene Stücke mit geradlinigen Strömungen kombinieren kann. Wenn z. B. ein Gasstrom mit Überschallgeschwindigkeit (w_1) parallel zu einer Wand fließt, und es herrscht hinter dem Ende der Wand (A in Fig. 197) ein um einen endlichen Betrag kleinerer Druck (p_2) als in dem Gasstrahl (p_1), so wird bis zu dem Fahrstrahl 1, der den Machschen Winkel α_1 mit der Strömungsrichtung einschließt ($\sin \alpha_1 = c_1/w_1$), die Gasströmung unverändert weitergehen; von da ab ergibt sich Expansion von dem Druck p_1 auf p_2 in einem keilförmigen Raum zwischen den Fahrstrahlen 1 und 2; nach Erreichung des Druckes p_2 auf dem Fahrstrahl 2 geht die Strömung in der neuen Richtung geradlinig und gleichförmig weiter. Die Strömungsrichtung schließt mit dem Fahrstrahl 2 den Winkel α_2 ein, der zu w_2 gehört.

Fig. 197.



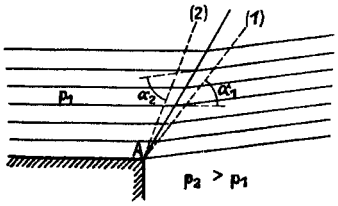
Verdünnungswelle.

Fig. 198.



Strömung längs krummer Wand.

Fig. 199.



Schiefer Verdichtungsstoß.

Ist eine Wand mit einer oder mehreren konvexen Ecken vorhanden, so erfolgt die Strömung auch hier in einer Kombination von geradlinigen Strömungen und keilförmigen Expansionsionsgebieten, die immer unter Machschen Winkeln aneinandergrenzen. Auch die Strömung längs einer stetig gekrümmten Wand läßt sich durch Zusammensetzung aus Elementen der anfänglich beschriebenen Strömung beurteilen. Die Wand kann auch konkav sein, die Lösung bleibt in diesem Falle allerdings nur insoweit richtig, als nicht zwei der unter dem jeweiligen Machschen Winkel gezogenen Fahrstrahlen sich schneiden (Fig. 198). Im letzteren Falle wird die Strömung an dieser Stelle unstetig. Bei einer konkaven Ecke, die einer Drucksteigerung entspricht, sowie auch beim Austritt des Gasstrahls in einen Raum mit höherem Druck wird die Strömung immer unstetig, es ergibt sich ein „schiefer Verdichtungsstoß", Fig. 199 (über den geraden Verdichtungsstoß vgl. § 4). Es würde nämlich hier der Fahrstrahl 2 der Fig. 197 vor den Fahrstrahl 1 zu liegen kommen, was unmöglich ist; statt dessen ergibt sich die unstetige Verdichtung, wobei die Verdichtungsebene zwischen den Richtungen 1 und 2 liegt.

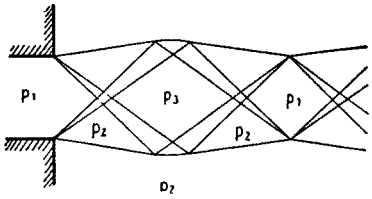
Die Gleichungen für die senkrecht zur Verdichtungsebene stehenden Geschwindigkeitskomponenten sind dieselben, wie für den geraden Verdichtungsstoß;

es überlagert sich einfach der in Fig. 189 dargestellten Bewegung die beim Stoß unverändert bleibende transversale Geschwindigkeitskomponente.

Die mit der Töplerschen Schlierenmethode gewonnenen Bilder 202 bis 204 geben gute Belege für diese theoretischen Ergebnisse.

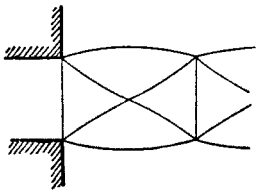
b) Vorgänge in freien Gasstrahlen. In dem Strahl, der sich beim Ausfluß von Gas aus einer Mündung bildet, wurden bei höheren Überdrucken von E. Mach und P. Salcher[1]) durch Schlierenbeobachtung regelmäßige Wellen entdeckt. Sie wurden später von anderen Forschern auch durch Druckbeobachtungen nachgewiesen. Man kann diese Wellen, die immer auftreten, wenn die Geschwindigkeit im Strahl größer ist als die Schallgeschwindigkeit, gut verstehen, wenn man weiß, daß die im vorstehenden beschriebenen schrägen Verdünnungs- und Verdichtungswellen sich ohne wesentliche gegenseitige Störung durchdringen können und daß sie ferner an den freien Strahlgrenzen total reflektiert werden, so zwar, daß eine Verdünnungswelle als Verdichtungswelle zurückgeworfen wird und umgekehrt.

Fig. 200.



Wellenfigur bei anfänglicher Überschallgeschwindigkeit.

Fig. 201.



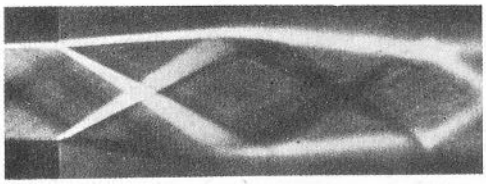
Wellenfigur bei anfänglicher Schallgeschwindigkeit.

Für einen Gasstrahl, der in paralleler Strömung mit Überschallgeschwindigkeit aus einer Öffnung ins Freie tritt, läßt sich hiernach unter der Voraussetzung ebener Bewegung, d. h. einer länglich rechteckigen Mündung das Folgende aussagen. Herrscht in dem Austrittsraum ein geringerer Druck als im Strahl (Fig. 200), dann gehen von jeder Austrittskante keilförmige Verdünnungswellen nach Fig. 197 aus, die sich durchkreuzen und an der gegenüberliegenden Strahlgrenze als Verdichtungswellen reflektiert werden. Diese pflanzen sich unter keilförmiger Verschmälerung fort und werden nach Durchmessung der Strahlbreite als Verdünnungswellen reflektiert, worauf das Spiel von neuem beginnt. Der Druck im Mittelfeld der Welle, p_3, ist dabei in ähnlichem Maße niedriger als der Außendruck p_2, als p_1 höher ist wie dieser. Ist der Außendruck größer als der Druck im Strahl, so erfolgen zunächst schiefe Verdichtungsstöße nach Fig. 199; diese werden als keilförmige Verdünnungswellen reflektiert, die sich im weiteren Verlauf wie oben geschildert verhalten. Ist die Anfangsgeschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit [wie es bei Öffnungen, die nicht nach Art einer Lavaldüse (vgl. § 2) erweitert sind, immer der Fall ist], so ist der anfängliche Machsche Winkel $\alpha = 90^0$ und die Fig. 200 ändert sich durch Ausbreitung der Keilgebiete über die ganze Fläche zu Fig. 201; aus dem Doppelkreuz ist hierdurch ein einfaches geworden.

[1]) E. Mach und P. Salcher, Sitzungsber. d. Wiener Akad., math.-naturw. Klasse 98 II a, 1303, 1889.

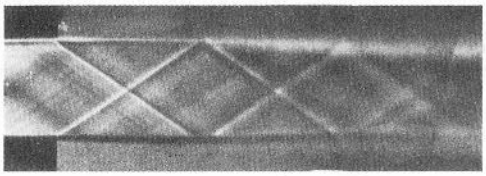
Die Fig. 202 bis 205 zeigen photographische Aufnahmen von solchen Wellen (Prandtl). Fig. 202 bei Überdruck im Strahl, Fig. 203 bei Gleichdruck, Fig. 204 bei Unterdruck im Strahl; die Mündungsgeschwindigkeit ist bei allen drei Aufnahmen dieselbe. Fig. 205 zeigt ein Beispiel für den Fall, daß die Mündungsgeschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit ist (bei allen Aufnahmen bedeutet Helligkeit Verdünnung, Dunkelheit Verdichtung).

Fig. 202.



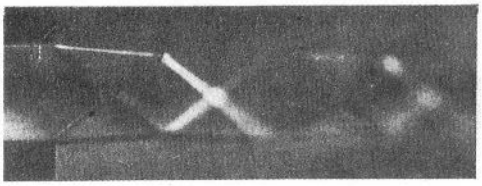
Überschallströmung bei Überdruck in der Mündung.

Fig. 203.



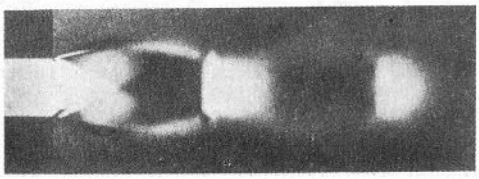
Überschallströmung bei Gleichdruck.

Fig. 204.



Überschallströmung bei Unterdruck in der Mündung.

Fig. 205.



Ausströmen mit Schallgeschwindigkeit in der Mündung.

Wenn, wie es meist der Fall ist, der Strahl die Mündung nicht in reiner Parallelbewegung verläßt, werden die Wellenbilder wesentlich verwickelter; die Wellenlänge bleibt dabei ziemlich konstant, sie ist, da es sich im wesentlichen um zweimalige Durchmessung des Strahls mit einer unter dem Mach-

schen Winkel laufenden Welle handelt, für die ebene Bewegung, unter Berücksichtigung von Gleichung (6) von § 1

$$\lambda = 2\, d_m \operatorname{ctg} \alpha_m = 2\, d_m \sqrt{\left(\frac{w}{c}\right)_m^2 - 1};$$

hierbei ist d_m ein mittlerer Strahldurchmesser, α_m und $\left(\frac{w}{c}\right)_m$ sind Mittelwerte von α und w/c.

Bei Strahlen, die aus kreisförmigen Öffnungen kommen, sind die Verhältnisse wegen der kegelförmigen Durchkreuzung der Wellen, durch die diese stark verändert werden, weit weniger einfach. Eine Aufnahme des Strahls bei einer verengten Öffnung, von L. Mach, ist oben in Fig. 184 wiedergegeben worden. Die Wellenlänge in solchen Strahlen, bei denen also die Mündungsgeschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit ist, wurde von R. Emden aus Versuchen zu

$$\lambda = 0{,}89\, d \sqrt{\frac{p_1 - 1{,}9\, p_2}{p_2}}$$

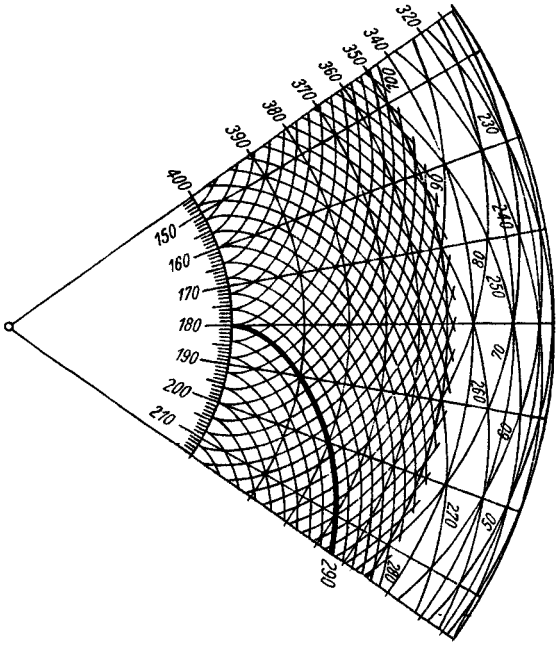
ermittelt; d bedeutet dabei den Mündungsdurchmesser, p_1 den Druck im Kessel, p_2 im Austrittsraum.

§ 7. Allgemeines Näherungsverfahren für zweidimensionale Überschallströmungen. Die Überlegungen des vorhergehenden Paragraphen lassen sich wie folgt unter Einführung eines Näherungsverfahrens noch verallgemeinern[1]). Die in Wirklichkeit stetigen Zustandsänderungen, wie sie z. B. in Fig. 196 oder in den einzelnen Feldern von Fig. 197, 200 oder 201 vorkommen, seien in einzelne unstetige Schritte aufgelöst, von denen jeder von der Art der Vorgänge von Fig. 195a und 199 ist (ähnlich wie man zu Integrationszwecken eine stetig gekrümmte Kurve durch eine Treppenlinie oder einen Polygonzug ersetzt). Die einzelnen vorkommenden Verdünnungs- und Verdichtungswellen sollen nun alle von der Art sein, daß die Stromlinie an ihnen immer um einen bestimmten festgewählten Winkel, z. B. 2°, abgelenkt wird, so daß also nur diskrete Richtungen für die Geschwindigkeiten zwischen den Wellen vorkommen, die sich jeweils nur um ein Vielfaches von 2° unterscheiden. Vermöge des Zusammenhangs der Größe der Geschwindigkeit vor und nach jeder Welle mit dem gegebenen Ablenkungswinkel kommt jetzt auch nur eine diskrete Reihe von absoluten Werten der Geschwindigkeit vor. Wenn man einen Geschwindigkeitsplan (Hodographen) zeichnen will d. h. die Geschwindigkeitsvektoren sämtlich von einem Ursprung O aus abträgt, so erhält man daher ein regelmäßiges Netzwerk von Kreissymmetrie, vgl. Fig. 206. Die Netzpunkte sind die zugelassenen Geschwindigkeiten, jede Verbindungslinie zwischen zwei Nachbarpunkten stellt einen der Übergänge dar, die sich in einer 2°-Welle vollziehen. Die Zustände der Strömung von Fig. 196, wo auf jedem Radius konstante Geschwindigkeit herrscht, sind durch

[1]) Das Verfahren stammt von L. Prandtl und A. Busemann, s. Festschrift zum 70. Geburtstag von Prof. A. Stodola, Zürich 1929, S. 499.

die stärker ausgezogene Kurve in Fig. 206 wiedergegeben. (Solange man es, wie bei den Strömungen von Fig. 196 und 198, nur mit Wellen von einer Seite zu tun hat, bewegt man sich im Geschwindigkeitsplan immer nur auf einer Kurve vor oder zurück; im allgemeinen hat man aber Wellen von beiden Seiten.) Die Aufgabe, die Stromlinien für eine gegebene Aufgabe zu zeichnen, ist nur vollständig bestimmt, wenn auf einem Querschnitt die Geschwindigkeiten und die Richtungen gegeben sind und an den zwei Seitenrändern der Strömung der Druck oder die Strömungsrichtung vorgegeben ist. Die Angabe des Druckes, zu dem nach der Bernoullischen Gleichung

Fig. 206.



Geschwindigkeitsplan. Die Differenzen der an zwei sich schneidende Kurven angeschriebenen Zahlen geben ohne weiteres den Winkel des nach dem Schnittpunkt gezogenen Geschwindigkeitsvektors in Grad, die Summe gibt eine Zahl, mittels deren aus einer Tabelle Geschwindigkeit und Druck abgelesen werden kann.

eine Geschwindigkeit gehört, entspricht einer freien Strahlgrenze, diejenige der Strömungsrichtung einer gegebenen festen Wand. Diese Randbedingungen werden dadurch erfüllt, daß man von den Rändern solche Verdichtungs- oder Verdünnungswellen neu ausgehen läßt, daß den Bedingungen genügt wird. An den Grenzen von innen ankommende Wellen werden dabei reflektiert, und zwar so, daß an der freien Strahlgrenze, wo die Geschwindigkeit konstant bleiben soll, aus einer Verdichtungswelle eine Verdünnungswelle wird und umgekehrt, an der festen Wand dagegen, wo die Richtung bleiben soll, Verdichtung als Verdichtung und Verdünnung als Verdünnung reflektiert wird.. Beide Beziehungen lassen sich unschwer aus dem Geschwindigkeitsplan ablesen.

Wichtig ist noch die Bemerkung, daß das Verfahren nur für Bewegungen mit einheitlicher Bernoullischer Konstante für alle Stromlinien, also für Potentialbewegungen (vgl. Abschn. 2, § 8) anwendbar ist. Nur hier kommt man mit dem einfachen Geschwindigkeitsplan aus.

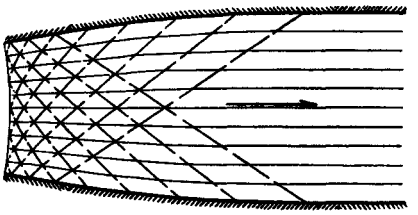
Wenn mehrere Verdichtungswellen derselben Art zusammenlaufen, so setzen sie sich als Verdichtungsstoß fort. Solange der Drucksprung im Verdichtungsstoß nicht sehr groß ist, kann man den Stoßvorgang näherungsweise als reversibel behandeln, also die Geschwindigkeiten und Richtungen weiter aus dem Geschwindigkeitsplan entnehmen. Für stärkere Verdichtungsstöße ergeben sich jedoch beträchtliche Abweichungen. Ein graphisches Verfahren, das diese Verdichtungsstöße mit umfaßt, ist von A. Busemann angegeben worden [1]).

Für die Durchführung der Konstruktionen ergeben sich nun noch eine Reihe von Hilfen. Zunächst steht die Linie, die die Verdünnungs- oder Verdichtungswelle repräsentiert, jeweils senkrecht auf der Verbindungslinie der beiden Zustandspunkte im Geschwindigkeitsplan. Dies läßt sich wie folgt einsehen. Wie früher erwähnt, bleibt die Komponente parallel zur Wellenfront beim Durchtritt durch die Welle ungeändert, und nur die zur Wellenfront senkrechte Komponente nimmt zu oder ab, je nachdem es sich um eine Verdünnungs- oder Verdichtungswelle handelt, das heißt aber nichts anderes, als daß der Verbindungsvektor zwischen den Zustandspunkten im Geschwindigkeitsplan, die zu den Zuständen vor und hinter der Welle gehören, senkrecht zur Wellenfront steht.

Wenn es sich um ein ideales Gas, d. h. um die einfache Adiabatenformel $p = const. \varrho^k$ handelt, so wird die stark ausgezogene Linie in Fig. 206 (und ebenso die übrigen Linien gleicher Art) eine Epizykloide, und es gelten dann besondere Erleichterungen für das Aufsuchen der Tangentenrichtungen an diese Kurven. Hier kann auf diese Einzelheiten nicht näher eingegangen werden, und es muß auf die erwähnte Veröffentlichung verwiesen werden.

Als Anwendungsbeispiel mag die Lösung der Aufgabe angegeben werden, wie eine divergente Düse gestaltet werden muß, damit sie einen Parallelstrahl liefert. Hier ist die Bedingung die, daß die an der Wand ankommenden Wellen nicht mehr reflektiert werden dürfen, damit der Strahl von ablenkenden Wellen frei wird. Dies wird dadurch erreicht, daß die Wand an jedem Punkt, wo eine Welle auftrifft, eine passende Richtungsänderung erfährt. (Die Verdünnungswelle würde ohne Richtungsänderung der Wand als Verdünnungswelle reflektiert; gibt man der Wand einen solchen Knick, daß dieser für sich allein eine gleich starke Verdichtungswelle ergeben würde, so löschen Verdünnung und Verdichtung sich gegenseitig aus.) Das Ergebnis der Konstruktion mit 2° Richtungssprung ist in Fig. 207 wiedergegeben.

Fig. 207



Herstellung eines Parallelstrahls.

[1]) A. Busemann, Verdichtungsstöße in ebenen Gasströmungen. Vorträge aus dem Gebiet der Aerodynamik, Aachen 1929. Herausgegeben von Gilles, Hopf und v. Kármán. Berlin 1930, S. 162.

Die Strömungen von Fig. 200 und 201 können natürlich mit dem angegebenen Verfahren auch planmäßig durchkonstruiert werden. (Es ergeben sich dabei allerdings kleine Abweichungen; die Strömungen sind nicht genau periodisch.) Zwei andere Beispiele werden in § 10 behandelt werden.

§ 8. Betrachtungen über Strömungen mit Unterschallgeschwindigkeit. Diesem Abschnitt mag eine allgemeine Betrachtung vorausgeschickt werden, die sich auf stationäre Strömungen bezieht, bei denen die Geschwindigkeit sowohl nach Größe wie nach Richtung nur wenig von einer gegebenen Geschwindigkeit u_0 abweicht. u_0 selbst mag dabei groß angenommen werden, und es sei zunächst offengelassen, ob es unterhalb oder oberhalb der Schallgeschwindigkeit liegt. Die Strömung möge der Einfachheit zuliebe als eben (zweidimensional) angenommen werden. Die kleinen Abweichungen der Geschwindigkeit von u_0 mögen u und v heißen und es seien alle Rechnungen nur auf Größen erster Ordnung durchgeführt. Die Strömung sei eine Potentialströmung.

Zunächst gilt die verallgemeinerte Bernoullische Gleichung [Gl. (1) von § 2 dieses Abschnitts]

$$\int \frac{dp}{\varrho} + \frac{(u_0 + u)^2 + v^2}{2} = const,$$

oder differenziert:

$$\frac{dp}{\varrho} + u_0\, du + 2.\ \text{Ordn.} = 0.$$

Für $\frac{dp}{\varrho}$ kann aber $\frac{dp}{d\varrho} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho} = c^2 \frac{d\varrho}{\varrho}$ geschrieben werden [vgl. Gl. (3) von § 1 dieses Abschnittes]. Es ist also

$$d\varrho = -\varrho \frac{u_0}{c^2}\, du \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

Die Kontinuität wird durch die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}[\varrho(u_0 + u)] + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho v) = 0$$

ausgedrückt, vgl. die entsprechende Formel für volumbeständige Strömungen in § 2 von Abschnitt II. Auf I. Ordnung gibt dies mit ϱ_0 als Mittelwert von ϱ

$$u_0 \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \varrho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0,$$

oder mit Berücksichtigung von (1), wo auch $\varrho = \varrho_0$ gesetzt werden kann, nach Kürzung mit ϱ_0:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(1 - \frac{u_0^2}{c^2}\right) + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \ldots\ldots \qquad (2)$$

Setzt man nun unter Einführung des Potentials φ (vgl. § 9 von Abschnitt II)

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{und} \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

so wird aus (2):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\left(1 - \frac{u_0^2}{c^2}\right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \qquad \ldots\ldots \qquad (3)$$

Aus dieser Differentialgleichung ergibt sich wieder sehr deutlich der Unterschied der Unter- und Überschallströmungen. Der Zahlenbeiwert von $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ geht durch Null, wenn u_0 die Schallgeschwindigkeit durchschreitet. Unterhalb dieser Grenze ist die Differentialgleichung vom Typus derjenigen für volumbeständige Potentialströmungen (elliptischer Typus), oberhalb ist sie vom Typus der Differentialgleichung der Saitenschwingung (hyperbolischer Typus). Für $u_0 = c$ ist $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ und $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x}$ willkürlich, d. h. es können Wellen mit Fronten parallel der y-Achse stationär bestehen. Für $u_0 > c$ ist jede stetige und zweimal differenzierbare, sonst willkürliche Funktion F von $y + x\,tg\,\alpha$ eine Lösung, falls α passend bestimmt wird. Es wird nämlich

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = F''.tg^2\alpha \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = F'';$$

zur Erfüllung von Gl. (3) muß also

$$tg^2\alpha\left(\frac{u_0^2}{c^2} - 1\right) = 1$$

gesetzt werden, also

$$tg\,\alpha = \pm\frac{c}{\sqrt{u_0^2 - c^2}}.$$

Damit wird

$$sin\,\alpha = \frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \pm\frac{c}{u_0}.$$

Die Lösung stellt also Wellen von beliebiger Wellenform dar, deren gerade Fronten ($y = \pm x\,tg\,\alpha + const$) unter dem Machschen Winkel α gegen die X-Achse (mittlere Stromlinienrichtung) nach links oder rechts geneigt sind, also genau das, was wir in § 1 durch die vereinfachte Betrachtung geschlossen hatten.

Für den Fall der Unterschallgeschwindigkeit, zu der wir jetzt zurückkehren wollen, ergeben sich charakteristische Lösungen in folgender Form. Wir wollen unsere Strömung in Vergleich ziehen mit derjenigen einer volumbeständigen Strömung mit gleicher Dichte und gleicher Grundgeschwindigkeit u_0 in einem entsprechenden Fall. Die Koordinaten der volumbeständigen Strömung mögen mit X und Y bezeichnet werden, die zu der Grundgeschwindigkeit hinzutretenden kleinen Geschwindigkeiten mit U und V, das zugehörige Potential mit Φ. Dieses muß gemäß Gl. (2) von § 9 des II. Abschnitts die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} = 0 \quad \ldots \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

erfüllen. Die Zuordnung der beiden Strömungen kann nun so vor sich gehen, daß die Potentiale φ und Φ in einander entsprechenden Punkten einander proportional gesetzt werden:

$$\varphi = \alpha\,\Phi \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (5)$$

Damit nun gleichzeitig φ die Differentialgleichung (3) und Φ die Gl. (4) erfüllen kann, muß die Zuordnung der Koordinaten x und X einerseits und y und Y andererseits für entsprechende Punkte mit verschiedenen Maßstäben erfolgen. Wird $\frac{Y}{y} = \beta \frac{X}{x}$ gesetzt, so kann durch passende Wahl von β die Zuordnung der Potentiale gemäß (5) ermöglicht werden. Wir setzen zur Vereinfachung willkürlich $X = x$ und erhalten damit

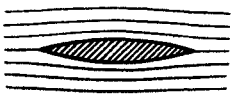
$$Y = \beta y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Mit Hilfe von (5) und (6) kann Gl. (3) auch folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2}\left(1 - \frac{u_0^2}{c^2}\right) + \alpha \beta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Diese Gleichung wird mit (4) identisch, wenn $\beta^2 = 1 - \frac{u_0^2}{c^2}$ gesetzt wird; α bleibt zunächst willkürlich. Da β immer kleiner als 1 ist, wird die Seitenausdehnung y eines Geschwindigkeits- oder Druckfeldes in der kompressiblen Strömung größer als in der volumbeständigen Strömung. Bei Annäherung an die Schallgeschwindigkeit geht β gegen Null, die Breite des Störungsfeldes wächst dann unbegrenzt an.

Fig. 208.



Der Winkel δ, den eine Stromlinie mit der x-Achse bildet, ist gegeben durch

$$tg\,\delta = \frac{v}{u_0 + u},$$

wofür in unserer Näherungsrechnung auch $\frac{v}{u_0} = \frac{1}{u_0}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ geschrieben werden kann. Entsprechend ist für die Vergleichsströmung

$$tg\,\Delta = \frac{V}{u_0} = \frac{1}{u_0}\frac{\partial \Phi}{\partial Y}.$$

Werden die beiden Strömungen durch ein und denselben Körper, etwa einen nach Fig. 208 hervorgerufen, so muß für die Begrenzungsstromlinie $tg\,\delta = tg\,\Delta$ gefordert werden, also $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial Y}$, oder mit Rücksicht auf (5) und (6) $\alpha\beta = 1$, d. h.

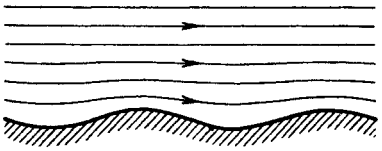
$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}}.$$

Um die Druckverteilung der beiden Strömungen zu vergleichen, genügt es, den Druckgradienten in der x-Richtung zu vergleichen. Da das Maß der x-Richtung nicht geändert ist, verhalten sich dann die endlichen Druckunterschiede in den beiden Strömungen wie diese Gradienten. Wir bilden das Hauptglied $\varrho(u_0 + u)\frac{\partial u}{\partial x}$, das wieder zu $\varrho u_0 \frac{\partial u}{\partial x} = \varrho u_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ verein-

facht werden darf, und vergleichen es mit $\varrho\, u_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2}$ für die volumbeständige Strömung. Das Verhältnis ist offenbar $= \alpha$, woraus wir schließen, daß die Druckunterschiede der kompressiblen Strömung in erster Näherung um das $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$-fache stärker sind als bei der Vergleichsströmung mit demselben (zugeschärften) Körper.

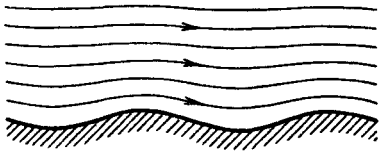
Wir können nun aber umgekehrt auch die Frage stellen, wie ein Körper geformt werden muß, damit die Druckunterschiede in der kompressiblen Strömung gleich groß werden wie in der Vergleichsströmung. Diese Frage

Fig. 209.



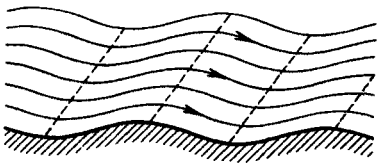
$u_0 \leqslant c.$

Fig. 210.



$u_0 = 0{,}9\, c.$

Fig. 211.



$u_0 = 1{,}25\, c.$

hat offenbar Bedeutung für den Fall, daß der Druckverlauf bei der Vergleichsströmung an der Grenze liegt, bei deren Überschreitung die Strömung sich infolge der Reibungswirkungen von dem Körper ablöst. Offenbar muß in diesem Fall $\alpha = 1$ gewählt werden. Dann aber wird $tg\,\delta = \beta\, tg\,\Delta$, d. h. der Körper in der kompressiblen Strömung muß um so schlanker geformt werden, je mehr sich u_0 der Schallgeschwindigkeit nähert, wenn eine Ablösung der Strömung vermieden werden soll. Diese Erkenntnis ist mit der Versuchserfahrung in gutem Einklang. Unter anderem zeigt sich, daß ein und derselbe Körper bei Annäherung an die Schallgeschwindigkeit immer mehr zum Abreißen der Strömung neigt[1]).

Ein bequem zu verfolgendes Rechenbeispiel zu dieser Theorie ergibt sich aus folgender Aufgabe: Eine Strömung von der mittleren Geschwindigkeit u_0 fließe an einer Wand entlang, die leicht gewellt ist: $y = a \sin \lambda x$. Aus $\frac{v}{u_0} = \frac{dy}{dx}$ wird

[1]) Beispiele von Flügelmessungen nahe der Schallgeschwindigkeit finden sich in den Berichten von Briggs und Dryden, Rep. Nr. 255, 319 u. 365 des National Adv. Comm. for Aeronautics, Washington 1927—1930.

$v = u_0 a \lambda \cos \lambda x$ in der Nähe von $y = 0$. Die Lösung für das Potential ist in der Vergleichsflüssigkeit $\Phi = -A \cos \lambda X e^{-\lambda Y}$, in der kompressiblen Flüssigkeit

$$\varphi = -A \cos \lambda x \, e^{-\lambda y \sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}}$$

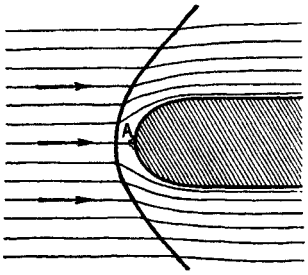
Die obige Bedingung für v bei $y = 0$ gibt:

$$u_0 a \lambda = A \lambda \sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}},$$

also $A = \dfrac{u_0 a}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}}$ in Übereinstimmung mit dem oben Dargelegten. Fig. 209 veranschaulicht die volumbeständige Strömung, Fig. 210 diejenige mit $u_0 = 0{,}9\,c$. Die entsprechende Strömung für $u = 1{,}25\,c$ ($\sin \alpha = 0{,}8$) zeigt Fig. 211.

§ 9. Bewegung von Körpern mit Überschallgeschwindigkeit. Geschoßwiderstand. Daß bei der Bewegung eines kleinen Körpers durch eine Gasmasse — oder beim gleichförmigen Vorüberströmen einer Gasmasse an einem kleinen ruhenden Hindernis, was dasselbe ist — die vom Körper ausgehenden Druckwirkungen sich nur in einem Kegel hinter dem Körper ausbreiten können, sobald die Geschwindigkeit größer ist als die Schallgeschwindigkeit des Gases, ist bereits in § 1 auseinandergesetzt worden. Dieses Resultat gibt jedoch nur die groben Züge des Vorganges. Sobald man den Körper nicht als klein ansehen will, sondern seine räumliche Ausdehnung in Betracht zieht, wird man das Bild verbessern müssen. Vorausgesetzt, der Körper sei vorn stumpf, dann wird er etwas Gas vor sich herschieben, vor seiner Mitte wird sich ein Staupunkt (§ 4, c von Abschn. II) ausbilden (A in Fig. 212). Da diese Gasmasse relativ zum Körper mit Unterschallgeschwindigkeit strömt, so pflanzt sich in ihr der Druck auch nach vorn fort; sie findet nach vorn ihre Grenze in einem Verdichtungsstoß, der sogenannten Kopfwelle, in der die Geschwindigkeit (relativ zum Körper genommen) von Überschallgeschwindigkeit (außerhalb) auf Unterschallgeschwindigkeit (innerhalb) heruntersinkt. Die Höhe der Verdichtung stellt sich dabei so ein, daß der Verdichtungsstoß mit der gleichen Geschwindigkeit wie der Körper fortschreitet. Der Drucksprung der Kopfwelle setzt sich seitlich als schräger Verdichtungsstoß fort. Mit zunehmender Entfernung vom Körper nimmt der Druckanstieg immer mehr ab, der Vorgang geht dabei immer mehr in eine gewöhnliche Kegelwelle über. Die Kopfwelle liegt bei großen Geschwindigkeiten eng am Körper an, bei geringeren ist sie weiter vor ihm. Fig. 180 auf S. 184 [Aufnahme von C. Cranz[1]), gewonnen mit der Töplerschen Schlierenmethode] gibt die Luftbewegungen um ein Infanteriegeschoß wieder.

Fig. 212.



Kopfwelle.

[1]) Vgl. Fußnote 1 von S. 185.

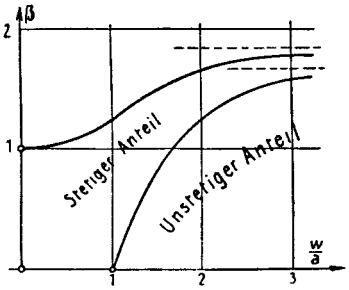
Die von dem mit Überschallgeschwindigkeit bewegten Körper ausgehenden Kegelwellen, die sich in der Richtung senkrecht zur Kegeloberfläche wie andere Schallwellen fortpflanzen, werden als scharfer Knall vernommen. Es mag erwähnt werden, daß der Peitschenknall von ähnlicher Art ist; er entsteht dadurch, daß das äußerste Ende der Peitschenschnur sich mit Überschallgeschwindigkeit durch die Luft bewegt.

Die Druckerhöhung, die die Luft in dem vor dem Körper entstehenden Staupunkt erfährt, ist von gewissem Interesse. Sie besteht bei Geschwindigkeiten über der Schallgeschwindigkeit aus zwei Teilen, der unstetigen Druckerhöhung in der Kopfwelle und der stetigen von der Kopfwelle bis zum Staupunkt. Die Berechnung zeigt, daß diese Druckerhöhung nicht nur für die kleinen Geschwindigkeiten (§ 4, c des II. Abschn.), sondern auch wieder für die sehr großen Geschwindigkeiten proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit ist; dazwischen wächst sie etwas schneller. Ihr Verhalten läßt sich durch die Formel

$$p_1 - p_0 = \frac{\varrho\, w^2}{2}\, \beta$$

darstellen, wo der Faktor β eine Funktion des Verhältnisses Bewegungsgeschwindigkeit : Schallgeschwindigkeit ist; seine Werte für $k = 1{,}405$ (Luft) können aus der nachfolgenden kleinen Tabelle entnommen werden; den Verlauf von β zeigt Fig. 213.

Fig. 213.



β abhängig von w/c.

Für die Geschwindigkeitsermittlung durch ein Pitotrohr (Staudruckmessung, vgl. § 4, c und § 7 des Abschn. II) gelten die hier gegebenen Ausführungen in entsprechender Weise. Auch hier bildet sich für $w > c$ vor dem Pitotrohr eine Kopfwelle aus. Man wird hier gerne den Pitotdruck mit dem Überdruck in einem Kessel vergleichen, der erforderlich wäre, um die Geschwindigkeit w durch Ausströmen zu erzeugen. Setzt man diesen Überdruck $= \varrho \frac{w^2}{2} \cdot \beta_0$, so wird $\beta_0 = \beta$ für $w \leqq c$, aber $\beta_0 > \beta$ für $w > c$, was mit dem Verlust in der Kopfwelle zusammenhängt.

$w/c =$	0	1	2	∞
$\beta =$	1	1,25	1,65	1,84
Unstetiger Anteil =	—	0	1,25	1,65
$\beta_0 =$	1	1,25	2,41	∞

Die mit dem Aufstau des Gases vor dem Körper verbundene Temperaturerhöhung kann aus Gleichung (4a), § 5, entnommen werden; sie ergibt sich zu

$$T_1 - T_0 = \frac{w^2}{2\, c_p};$$

wird w in m/sec gemessen, so wird c_p (in Arbeitseinheiten) $= 0{,}238 \,.\, 427 \,.\, 9{,}8 \cong 1000$.

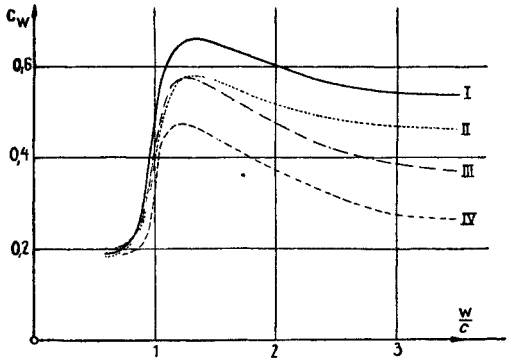
Dies gibt für 800 m/sec (Artilleriegeschoß) 250°, für 20 000 m/sec (Meteor) 200 000°. Die letztere Temperatur wird in Wirklichkeit vermutlich durch die starke Ausstrahlung der verdichteten Luft nicht erreicht.

Durch einen Analogieschluß aus dem Verhalten des Staudrucks läßt sich schließen, daß auch der Geschoßwiderstand bei sehr großen Geschwindigkeiten wieder proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit wird, wenn auch mit einem anderen Beiwert, wie bei kleinen Geschwindigkeiten.

Der Widerstand kann übrigens auch dort, wo diese Beziehung nicht zutrifft, aus Dimensionsgründen ebenso wie bei den volumbeständigen Flüssigkeiten durch die Formel $W = c_w \frac{F \varrho w^2}{2}$ dargestellt werden, wo F der Querschnitt des Geschosses ist; allerdings darf c_w hier nicht wie dort als eine Konstante angesehen werden, sondern es ist eine Funktion von w/c.

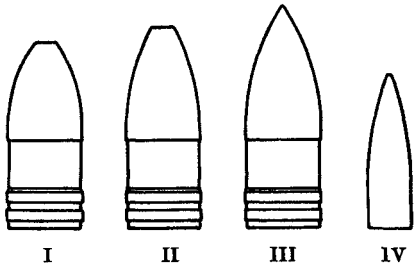
Die Versuchswerte, die durch Messung der Verzögerung der Fluggeschwindigkeit der Geschosse gewonnen werden, zeigen bei zunehmender Geschwindigkeit zuerst unterhalb der Schallgeschwindigkeit ein leichtes Ab-

Fig. 214.



Widerstandszahlen von Geschossen.

Fig. 215.



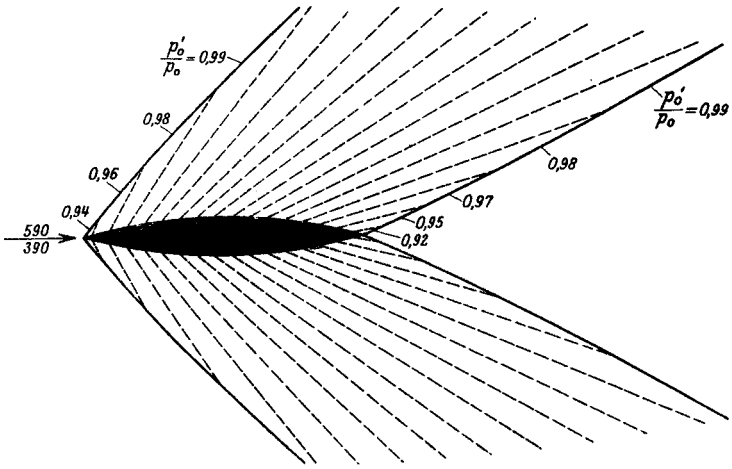
Geschoßformen.

sinken, bei Überschreitung der Schallgeschwindigkeit aber ein starkes Anwachsen. Dieses ist dadurch zu erklären, daß jetzt zu dem bisherigen Widerstand, der in der Hauptsache durch die Wirbelbildung hinter dem Körper verursacht wird, noch ein Wellenwiderstand hinzukommt, der der erzeugten Schallenergie entspricht. Bei größeren Geschwindigkeiten nimmt die Luftwiderstandszahl wieder etwas ab und scheint sich dann einem konstanten Wert zu nähern. Die Abnahme hängt zum Teil mit der Änderung der Wellengestalt zusammen, andererseits damit, daß die Saugwirkung am hinteren Geschoßende nicht quadratisch weiterwachsen kann, sondern in dem absoluten Vakuum eine Grenze findet.

In Fig. 214 ist der Verlauf von c_w für einige Artilleriegeschosse nach O. v. Eberhard[1]) und für ein Infanteriegeschoß (S-Geschoß) nach K. Becker und C. Cranz[2]) aufgetragen. Fig. 215 gibt die zugehörigen Geschoßformen wieder.

§ 10. Zweidimensionale Überschallströmungen an zugeschärften Körpern und Tragflügeln. Bei genügend zugeschärften Körpern lassen sich die Überschallströmungen nach den in § 7 angegebenen Methoden näher verfolgen[3]). Der Druck auf jedem Oberflächenelement ist dann durch die

Fig. 216.



Überschallströmung an einem zugeschärften Körper.

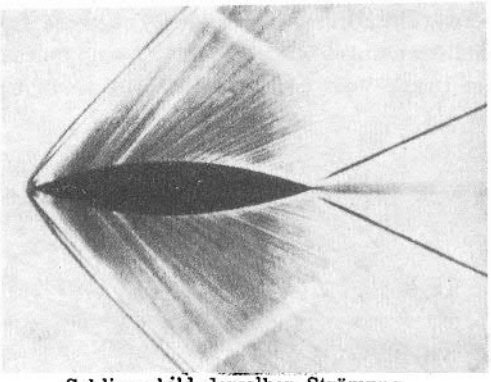
Zustromgeschwindigkeit und die Neigung des Elements völlig gegeben. Bei einem linsenförmigen Querschnitt nach Fig. 216 beginnt die Strömung vorn mit einem schrägen Verdichtungsstoß mit Überdruck dahinter; die konvexe Krümmung der Oberfläche gibt Anlaß zu Verdünnungswellen, durch die der Überdruck mehr und mehr abgebaut wird und sich auf der Hinterseite des Körpers in Unterdruck verwandelt. Am Hinterende stoßen die beiden Strömungen von beiden Seiten des Körpers unter endlichen Winkeln zusammen, was wieder zu einem Verdichtungsstoß führt. Hinter dem zweiten Verdichtungsstoß ist der Druck wieder annähernd gleich dem ungestörten Druck. Die Verdünnungswellen verlaufen divergent; die vom Vorderteil ausgehenden treffen dabei auf den vorderen Verdichtungsstoß, die vom Hinterteil ausgehenden auf den hinteren, die Stärke dieser Verdichtungsstöße allmählich immer mehr abschwächend. Das in dieser Weise theoretisch entworfene Bild hat sich durch Schlierenaufnahmen vollständig bestätigt, vgl. Fig. 217.

---

[1]) Artilleristische Monatshefte Nr. 69, S. 196, 1912.
[2]) Ebenda Nr. 69, S. 189, 1912 und Nr. 71, S. 833, 1912.
[3]) Erstmalige Anwendung bei J. Ackeret, Zeitschr. f. Flugtechnik u. Motorluftsch. **16**, 72, 1925.

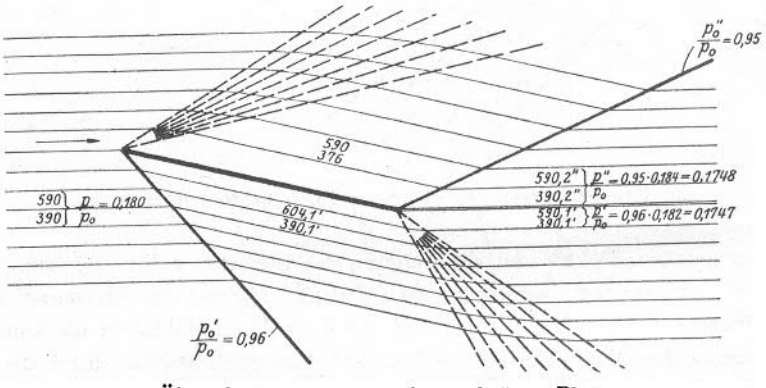
Aus der geschilderten Druckverteilung ergibt sich ein Widerstand des Körpers (ohne alle Reibung). Nach A. Busemann[1]) entspricht die Entropievermehrung der in der Zeiteinheit von den beiden Verdichtungsstößen überschrittenen Luftmasse genau der sekundlichen Arbeitsleistung dieses Druck-

Fig. 217.



Schlierenbild derselben Strömung.

Fig. 218.



Überschallströmung an einer schrägen Platte.

widerstandes. Aus dem Impulssatz ergibt sich auch, daß als weitere Folge der Verdichtungsstöße eine Nachlaufbewegung der Luft zu beiden Seiten des Körpers auftritt, deren Impuls (= Integral der sekundlich betroffenen Massenteilchen, jedes mit seiner Nachlaufgeschwindigkeit multipliziert) gleich dem obigen Druckwiderstand entspricht. Außer dem Druckwiderstand ist in Wirklichkeit natürlich auch ein Reibungswiderstand vorhanden, dem ein besonderer Reibungsnachlauf in der Reibungsschicht entspricht.

Als Typus eines „Flügels", d. h. eines Körpers, der durch Neigung um einen kleinen Winkel gegen die Bewegungs- bzw. Strömungsrichtung („Anstell-

[1]) Handbuch d. Experimentalphysik, Bd. IV, Teil 1, S. 443, 1931. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, die auch die Wiedergabe der Fig. 216—218 und 220/21 freundlichst gestattete.

winkel") Auftrieb erfährt, mag hier zunächst die dünne ebene Platte betrachtet werden, vgl. Fig. 218. Die Strömung teilt sich an der Vorderkante ohne Umströmung mit „unendlicher Geschwindigkeit an der Kante"; auf der Druckseite setzt ein Verdichtungsstoß ein, auf der Saugseite eine Verdünnungswelle, beide in solcher Stärke, daß die Ablenkung der Strömungsrichtung um den Winkel α hervorgebracht wird. Solange die Richtung konstant bleibt, ist es auch der Druck, die resultierende Kraft greift daher hier genau in der Mitte der Platte an. An der Hinterkante findet ein Druckausgleich statt, der auf der Saugseite einen Verdichtungsstoß und auf der Druckseite eine Verdünnungswelle zur Folge hat. Die Strömung wird also auch hier wieder auf beiden Seiten der Platte von je einem Verdichtungsstoß erfaßt, der eine Nachlaufströmung zur Folge hat. Die resultierende Kraft ist bei kleinen Anstellwinkeln annähernd proportional zu dem Anstellwinkel und steht, da hier keine „Saugkraft" (vgl. § 14 von Abschn. III) vorhanden ist, genau senkrecht auf der Platte. Das Äquivalent des Auftriebs ist in der seitlichen Bewegung in den beiden Wellen enthalten. In diesen wird zwar mit wachsender Entfernung die Quergeschwindigkeit durch das Einmünden von Verdünnungswellen in die Verdichtungsstöße geringer, in demselben Maß wächst aber die Breitenausdehnung, so daß hinter der Platte in jedem Querschnitt senkrecht zur Bewegungsrichtung der Auftrieb als Impuls weiter übertragen wird.

Die dünne, vorne und hinten zugeschärfte Platte, gegebenenfalls mit schwach gewölbter Saugseite, erweist sich als das günstigste Profil für Überschallströmung, die üblichen, vorn verdickten Flügelprofile sind hier wegen großen Widerstandes ziemlich schlecht. Das beste Verhältnis W/A ist dabei im Gegensatz zu den mäßigen Geschwindigkeiten niemals kleiner als $tg\,\alpha$.

Die Beziehungen über den induzierten Widerstand (§ 15 von Abschn. III) gelten bei Überschallströmung nicht mehr. Die Abhängigkeit vom Seitenverhältnis ist hier wesentlich geringer.

§ 11. Kavitation. Im Anschluß an die Ausführungen über die Strömungsformen der Gase mag noch kurz eine andere Strömungsform mit Volumenänderung behandelt werden, bei der es sich um Bildung von dampferfüllten Hohlräumen in einer strömenden Flüssigkeit handelt. Die technisch wichtigsten Vorgänge dieser mit dem Namen „Hohlraumbildung" oder „Kavitation" belegten Erscheinungsgruppe verlaufen so, daß in einer Flüssigkeit, deren ungestörter Druck p_0 über dem Dampfdruck p' liegt, durch Bewegungsvorgänge Unterdrucke p hervorgerufen werden, die niedriger als p' sind. In diesem Zustand setzt nun stürmische Verdampfung ein und der Druck stellt sich auf p' ein. Die Strömungsformen sind durch den Volumenzuwachs bei der Verdampfung natürlich gegenüber der gewöhnlichen Strömung verändert. Wo beim Weiterströmen der Druck wieder ansteigt, stürzen die Hohlräume unter Kondensierung des Dampfes wieder zusammen, was meist von einem heftigen rasselnden Geräusch begleitet ist.

Die Hohlraumbildung wird durch mitgerissene Luftblasen und auch durch im Wasser gelöste Gase wesentlich unterstützt. Sehr luftfreies Wasser verträgt dagegen auf kurze Zeit nicht nur Druckerniedrigungen bis unter den Dampfdruck, sondern auch sogar beträchtliche Zugspannungen, ohne daß Hohlräume entstehen. Dies äußert sich bei Versuchen u. a. darin, daß häufig der Anfang der Hohlraumbildung mit der Ablösungsstelle der Strömung (vgl. § 6 von Abschn. III) zusammenfällt, d. h. mit derjenigen Stelle, an der die wandnahen Grenzschichtteile zur Ruhe kommen und daher längere Zeit in diesem Zustand verweilen. Bei Druckmessung durch Anbohrungen kann man auch keinen tieferen Druck als den Dampfdruck messen, da die ruhende Flüssigkeit in der Anbohrung immer zu sieden beginnt, wenn der Druck außen den Dampfdruck unterschreitet. Für das folgende soll vorausgesetzt werden, daß immer Luft oder Gasbläschen in der strömenden Flüssigkeit vorhanden sind, an denen die Kavitation beginnt, wenn der Dampfdruck p' erreicht wird.

Ein besonders einfacher und übersichtlicher Fall von Kavitation ergibt sich beim Durchströmen durch verengte und wieder erweiterte Kanäle. Besonders wenn die Erweiterung allmählich erfolgt, ergeben sich bei großer Geschwindigkeit der Strömung große Drucksteigerungen im erweiterten Teil, so daß es möglich ist, daß das Ausfließen unter Atmosphärendruck erfolgt und doch stromaufwärts in der engen Stelle sehr niedrige Drucke auftreten. Wenn hierbei der Dampfdruck erreicht wird, so fließt die Hauptmasse der Flüssigkeit hinter der engsten Stelle als freier, allerdings meist sehr unruhiger Strahl durch den Kanal, an den Seiten begleitet von einem schaumartigen Gemisch von Dampfblasen und Flüssigkeit. Weiter stromabwärts prallt der Strahl in einer Art von Verdichtungsstoß gegen langsamer fließende Flüssigkeit, die nun den Kanal wieder ausfüllt; die Dampfblasen fallen bei der Drucksteigerung mit heftigem Aufprall zusammen, lediglich kleine Luftbläschen (vorher gelöst gewesene Luft) zurücklassend. Vorgänge der hier beschriebenen Art treten vielfach in Wasserleitungshähnen, besonders bei hohem Leitungsdruck, auf und verraten sich durch die bekannten kreischenden Geräusche.

Als Beispiel für den Druckverlauf in einem verengten und wieder erweiterten Kanal seien Messungen an Druckanbohrungen in der Kanalwand wiedergegeben, die aus einer Forschungsarbeit von H. Hochschild[1]) stammen. Durch einen Kanal mit Rechteckquerschnitt von konstanter Höhe und gemäß Fig. 219 veränderlicher Breite wurde immer dieselbe Wassermenge hindurchgepumpt, wobei der Druck am Auslaufende durch ein Drosselventil geändert wurde. Bei genügend hohem Gegendruck unterscheiden sich die Druckverlaufskurven nur durch eine additive Konstante (Kurve a und b). Wenn aber der Druck in der engsten Stelle so niedrig wird, daß sich merkliche Luftausscheidung einstellt, dann ergeben sich große Strömungsverluste

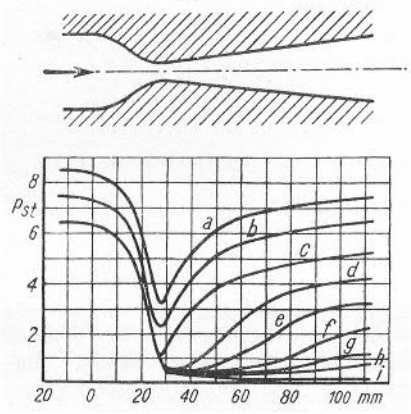
[1]) H. Hochschild, Versuche über die Strömungsvorgänge in erweiterten und verengten Kanälen. Forschungsheft Nr. 114 des Vereins deutsch. Ing. 1912.

(Kurve *e* bis *i*); der sonst sehr beträchtliche Druckwiedergewinn verringert sich wesentlich bzw. bleibt völlig aus.

Die größte technische Bedeutung kommt den Kavitationserscheinungen bei den schnellaufenden Wasserturbinen und Schiffspropellern zu. Bei diesen beiden Maschinengattungen hat man ein Interesse daran, möglichst hohe Geschwindigkeiten anzuwenden, andererseits hat man triftigen Grund, Kavitation zu vermeiden, nicht nur wegen der hierbei eintretenden Strömungsverluste, sondern auch wegen der eigenartigen Zerstörungen (Anfressungs- oder Korrosionserscheinungen), die mit den Kavitationsvorgängen verbunden sind (s. unten). Die einfache Regel zur Vermeidung der Kavitation ist: Vermeidung der niedrigen Drucke; dies gelingt durch flache Profile und sehr kleine Anstellwinkel, also niedrige Flächenbelastung. Eine kennzeichnende Größe für die Kavitationsgefahr ist der Bruch

$$\lambda = \frac{p_0 - p'}{\frac{\varrho v^2}{2}}.$$

Fig. 219.

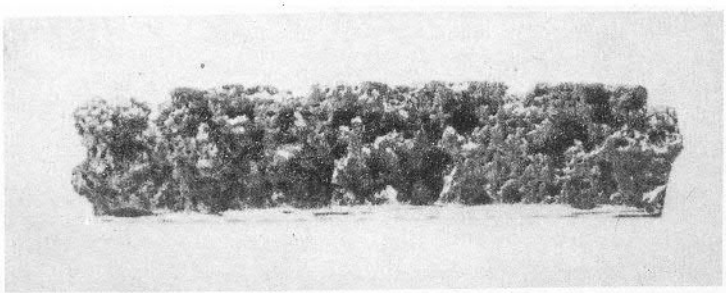


Druckverlauf bei Kavitation.

Bei Propellern ist es gelungen, einen brauchbaren Betrieb bis zu etwa $\lambda = 0{,}2$ herunter zu erreichen.

Zu den erwähnten Anfressungserscheinungen ist zu sagen, daß diese an dem Ort des Verdichtungsstoßes, wo die Dampfblasen zusammenstürzen, aufzutreten pflegen. Hierbei prallen Wasserteile, die durch die Blasen getrennt waren, mit endlich verschiedenen Geschwindigkeiten hart aufeinander, wobei sehr hohe örtliche Druckschläge auftreten. Zu dieser hämmernden Wirkung treten offenbar noch chemische Einflüsse hinzu. Die aus dem Wasser ausgeschiedene Luft ist sauerstoffreicher als gewöhnliche Luft, und diese sauerstoffreiche Luft wird unter hohem Druck in die Poren des Metalls hinein-

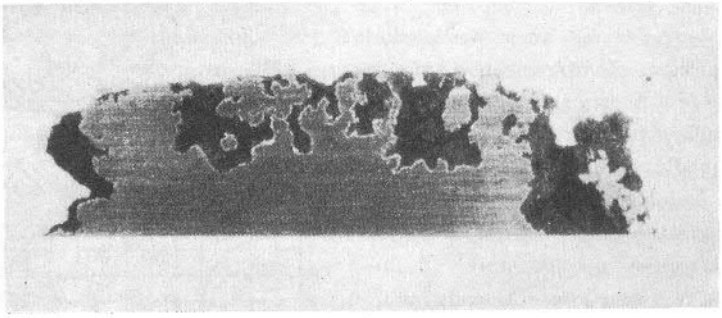
Fig. 220.



Anfressungen durch Kavitation.

gepreßt und bei der Entlastung sofort wieder herausgespült, so daß ein starker Wechsel bis in die feinsten Poren hinein stattfindet. Das Ergebnis dieser noch keineswegs genau aufgeklärten Vorgänge ist ein Narbigwerden der Metalloberfläche, das sich allmählich bis zu ganz starken Ausbrüchen

Fig. 221.



Schnitt durch das angefressene Stück

und Aushöhlungen steigert, wenn der Kavitationsvorgang längere Zeit hindurch aufrechterhalten bleibt. Fig. 220 zeigt als Beispiel die zerfressene Oberfläche eines Torpedobootpropellers aus hochwertiger Bronze, Fig. 221 eine Schnittfläche desselben Stückes.

Führer durch die neuere Literatur auf dem Gebiete der Strömungslehre.

1. Werke, deren Auffassung mit der des Abrisses verwandt ist.

Tietjens, O., Hydro- und Aeromechanik, nach Vorlesungen von L. Prandtl. 2 Bände. 238 u. 299 S. Springer, Berlin 1929 und 1931.

Kaufmann, W., Angewandte Hydromechanik, 2 Bände, erschienen Bd. I, 232 S. Springer, Berlin 1931.

2. Theoretische Hydrodynamik, vorwiegend Arbeiten des XIX. Jahrhunderts.

Lamb, H., Lehrbuch der Hydrodynamik, aus dem Englischen übersetzt von E. Helly. Mit Zusätzen von R. v. Mises, 830 S. Teubner, Leipzig 1931.

3. Hydraulik.

Forchheimer, Ph., Hydraulik, 3. Aufl., 596 S. Teubner, Leipzig 1930.

Forchheimer, Ph., Grundriß der Hydraulik, 2. Aufl., 134 S. Teubner, Leipzig 1926.

Mises, R. v., Elemente der technischen Hydromechanik, Bd. I, 212 S. Teubner, Leipzig 1914.

4. Turbinen usw.

Prášil, F., Technische Hydromechanik, 2. Aufl., 303 S. Springer, Berlin 1926.

Spannhake, W., Kreiselräder als Pumpen und Turbinen, Bd. I, 320 S. Springer, Berlin 1931.

5. Tragflügel- und Luftschraubentheorie.

Prandtl, L. und Betz, A., Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik, 100 S. Göttingen 1927 (Auslieferung durch Springer, Berlin).

Eberhardt, C., Einführung in die theoretische Aerodynamik, 138 S. Oldenbourg, München 1927.

Müller, W., Mathematische Strömungslehre, 239 S. Springer, Berlin 1928.

Schmidt, H., Aerodynamik des Fluges. Eine Einführung in die mathematische Tragflächentheorie, 258 S. de Gruyter, Berlin 1929.

Glauert, H., Die Grundlagen der Tragflügel- und Luftschraubentheorie, aus dem Englischen übersetzt von H. Holl, 202 S. Springer, Berlin 1929.

6. Versuchsergebnisse.

Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. Herausgeg. von L. Prandtl und A. Betz. Oldenbourg, München. Bisher 3 Lieferungen. I. Lieferung 140 S., 1921; II. Lieferung 80 S., 1923; III. Lieferung 166 S., 1927.

Mitteilungen aus der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen 1910—1915. Neudruck 1930. Franz & Co., Leipzig.

Eisner, F., Widerstandsmessungen an umströmten Zylindern (Mitteilungen der Preuß. Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau Berlin, Heft 4, 98 S. Springer, Berlin 1929).

7. Zusammenfassende Darstellungen.

Handbuch der Physik, herausgeg. von H. Geiger und K. Scheel. Bd. VII: Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper, 413 S. Springer, Berlin 1927. (Vorwiegend Theorie und Versuchsresultate.)

Handbuch der Experimentalphysik, herausgeg. von W. Wien und F. Harms. Bd. IV: Hydrodynamik und Aerodynamik, redigiert von L. Schiller, in vier Teilbänden. Erschienen: Teilbd. 1, 730 S., 1931 und Teilbd. 3, 557 S., 1930. (Umfassende Darstellung des Gesamtgebietes, besonders der Versuchsmethoden und der technischen Anwendungen.)

Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, herausgeg. von F. Auerbach und W. Hort. Ambrosius Barth, Leipzig. Bd. V: Mechanik der Flüssigkeiten. 1145 S., 1931. Bd. VI: Mechanik der Gase und Dämpfe. 918 S., 1928. (Besonders ausführliche Behandlung der Anwendungen.)

8. Zeitquerschnitte.

Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik, Innsbruck 1922, herausgegeben von Th. v. Kármán und T. Levi-Civita, 251 S. Springer, Berlin 1924.

Hydraulische Probleme. Vorträge auf der Hydrauliktagung zu Göttingen 1925, herausgeg. vom Wiss. Beirat des Vereins Deutscher Ingenieure, 219 S. VDI-Verlag, Berlin 1926.

Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandten Gebieten, Aachen 1929, herausgeg. von A. Gilles, L. Hopf und Th. v. Kármán, 221 S. Springer, Berlin 1930.

Nachtrag zum Literaturverzeichnis.

Zu 1.: Kaufmann, W., Angewandte Hydromechanik, Bd. II, 293 S. Springer, Berlin 1934.

Zu 2.: Müller, W., Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten, 367 S. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1932.

Hopf, L., Petrow, Reynolds, Sommerfeld, Michell, Hydrodynamische Theorie der Schmiermittelreibung (Nr. 218 von Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften), 227 S. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1927.

Zu 3.: Schiller, L., Drei Klassiker der Strömungslehre: Hagen, Poiseuille, Hagenbach (Nr. 237 von Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften), 97 S. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1933.

Zu 6.: Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. IV. Lieferung, 148 S. München 1932.

Zu 7: Handbuch der Experimentalphysik, Bd. IV, Teilband 2, 422 S., 1932, und Teilband 4, 604 S., 1932.

Durand, W. F., Aerodynamic Theory, 6 Bände, Springer. Bisher erschienen: Bd. I, 398 S., Berlin 1934; Bd. II, 367 S., Berlin 1935; Bd. III im Erscheinen begriffen.

Zu 8.: Proceedings of the Fourth International Congress for Applied Mechanics, Cambridge, England 1934, XIX und 283 S. The University Press, Cambridge 1935.

Namen- und Sach-Verzeichnis.

Abbildung 57.
Ablösung 101.
Absaugen der Reibungsschicht 106.
Adiabatisch 10.
Adiabatische Schichtung 15.
Ähnlichkeit, mechanische 86f.
Aerodynamik 29.
Ahlborn 27.
Anemometer 174.
Anfressung 217.
Anlaufvorgänge 119.
Anstellwinkel 140.
Atmosphäre (Druckmaß) 8, 19.
Ausfluß aus einem Gefäß 35, 36.
Ausflußziffer 122.

Barometer 8, 18.
Becker, R. 194.
Bernoullische Gleichung 32.
Betz 143, 177.
Biot-Savartsches Gesetz 63.
Blasius 117.
Bordamündung 68.
Boyle-Mariottesches Gesetz 8.
Buckingham 123.
Busemann 203, 205, 214.

Couette 100.
Cranz und Becker 213.

Dean 120.
Dichte 10.
Dipol 55.
Drehungsfreiheit 50, 52.
Druck 6.
Druckfortpflanzung 181.
Druckfunktion 33, 185.
Druckgleichung 32.
Druckhöhe 33.
Druckmessung 176.
Drucksonde 46, 176.
Druckverteilung 7, 11, 21, 55, 135. 138, 145.
Druckwiderstand 128.
Dynamischer Druck 37.

Ebene Bewegung 55.
Eiffel 126, 135, 141.
Energiesatz für Strömungen 191.
Erstarrungsprinzip 2.
Euler 26, 72.
Eulersche Gleichungen 34.

Fage und Falkner 179.
Flettner 61.
Fliegner 189.
Flügelblatt-Theorie (Schraube) 160.
Flüssige Linie 48.
Flüssigkeitskoordinaten 25.
Föttinger 156.
Formwiderstand 128.
Francisturbine 168.
Froudesches Gesetz 128.

Gasdynamik 180 f.
Gase 7—10, 13.
Gasstrahlen 188, 201.
Gay Lussac 8.
Gesamtdruck 38.
Geschoßbewegung 210 f.
Geschwindigkeitshöhe 33.
Geschwindigkeitsmessung 174.
Geschwindigkeitspotential 49.
Gleichgewicht 1—23.
Gleitschuh 111.
Gradient 49.
Grashof 198.
Grenzschicht 89 f.
Grundwasserströmung 107.
Grundwelle 80.
Gruppengeschwindigkeit 76.

Hagen-Poiseuillesches Gesetz 84, 118.
Hauptspannungen 5.
Hele Shaw 108.
Helmholtz 45, 62, 78.
Hermann 117, 139.
Hochschild 216.
Hohlraumbildung 215.
Hopf und Fromm 117.
Hubschraube 69, 159.
Hydraulik 29.
Hydrodynamik 29.
Hydrostatik 11.

Ideale Flüssigkeit 31.
Impulssatz 66.

Induzierter Widerstand 148.
Isothermisch 10.

Jakob und Erk 117.
Joukowski 60, 72, 143.

Kapillarwellen 76.
Kaplanturbine 168.
v. Kármán 97, 118, 133.
Kavitation 161, 215.
Kielwasserwiderstand 177.
Kinematik 25.
Kinematische Zähigkeit 88.
Kinetische Theorie der Materie 1, 10, 85.
Kirchhoff 132.
Konforme Abbildung 57.
Kontinuität 28.
Kontraktion 35, 121.
Kontrollfläche 67.
Korrosion 217.
Krell 17.
Krumme Strömung 100, 120.
Kugel, Widerstand der 89, 104, 135.
Kutta 60, 143, 144.
Kutta-Joukowskischer Satz 60, 72.

Lagerschmierung 114.
Lagrange 26.
Lambsche Formel 136.
Laminarströmung 84.
Lavaldüse 187, 189, 194.
Lees 117.
Lilienthal 140, 141.
Linienintegral 48.

Mach 184, 188, 201.
Machscher Winkel 184.
Magnuseffekt 61, 105.
Manometer 8, 16, 176.
Mengenmessung 122—124.
Meyer, Th. 199.
Mikromanometer 16, 176.
Mischungsweg 94.
Modellmessung 176.

Navier-Stokessche Gleichungen 86.
Newtonsche Luftwiderstandstheorie 125.
Nikuradse 118.

Oberflächenwiderstand 128.

Peltonrad 168.
Pitotrohr 37.
Platzwechsel 1.
Pohl 108.
Poiseuille 84.
Polarkurve 141.
Potential 21, 22.
Prášil 108.
Propeller 154.

Quelle 54.

Rauhe Oberflächen 99.
Raumgewicht 10.
Reaktion 67, 68.
Rehbock 125.
Reibungswiderstand 128, 138, 178.
Relative Rauhigkeit 99.
Reynolds 92, 110.
Reynoldssche Zahl 87 f.
Riemann 185, 191.
Rohrströmung 84, 97 f., 120.
Rohrwiderstand 115 f.

Saph und Schoder 117.
Saugkraft 144.
Schallgeschwindigkeit 182.
Schaufelgitter 70.
Scheinbare Spannung 93.
Schichtung 99.
Schiffswellen 77.
Schiller 118, 120, 139.
Schlichting 139.
Schlierenmethode 195.
Schmierung 109.
Schnittprinzip 4.
Schraubenpropeller 155.
Schraubenpumpen und -gebläse 169.
Schwall 79.
Segnersches Rad 68.
Sekundärströmung 103.
Senke 54.
Spaltflügel 106.
Spannungszustand 2.
Stabilität 12, 14.
Stanton und Pannell 117.
Stationäre Strömung 25.
Statischer Druck 38.
Staudruck 37.
Staupunkt 37.
Staurohr 47.
Stodola 191.
Stokes 86.
Stokessche Formel 89, 136.
Stoßverlust 69.
Strahlpumpe 124.
Strahltheorie (Schraube) 157.
Stromfaden 27.
Stromlinie 26.
Stromröhre 27

Taylor, G. I. 100.
Thomsonscher Satz 48, 51.
Thomson und Joule 197.
Töpler 17, 195.
Tollmien 93, 96.
Tor 18.

Toricelli 18, 35.
Tragflügel 140.
Tragflügelauftrieb 60, 140.
Tragflügeltheorie 146.
Trennungsfläche 42, 65.
Trennungsschicht 101.
Turbinen 165.
Turbulenz 91 f.

Überdruck 18.
Überfall 124.
Überschallströmung 187 f., 199 f., 203 f., 213.
Unterdruck 18.
Unterschallströmung 206 f.

Venturirohr 123.
Verdichtungsstoß 193.
Verengung im Rohr 122.
Wassersprung 84.
Wehr 81.
Weisbach 122.
Wellen 74 f.
Wellenwiderstand 128.
White 121.
Widerstand von Körpern 125 f.
Windkanäle 173.
Windmühlen 163.
Wirbel 43.
Wirbelbildung 100.
Wirbelfaden 62.
Wirbelring 64.

Zähigkeit 1, 83 f.
Zapfen im Lager 114.
Zentrifugalpumpen und -gebläse 170.
Zirkulation 48, 58.
Zusammendrückbarkeit 2.
Zusammenfluß 42.

Bisher erschienene Bände in der Reihe „Göttinger Klassiker der Strömungsmechanik“

Die Bände sind auch als freie Onlineversion über die Homepage des Verlags sowie über den Göttinger Universitätskatalog (GUK) bei der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen (http://www.sub.uni-goettingen.de) erreichbar. Es gelten die Lizenzbestimmungen der Onlineversion.

Band 1 Johanna Vogel-Prandtl: **Ludwig Prandtl – Ein Lebensbild, Erinnerungen, Dokumente**, 2005, ISBN 3-938616-34-2 [Nachdr. der Ausg. Göttingen, Max-Planck-Inst. für Strömungsforschung, 1993]

Band 2 **Karl Wieghardt: Theoretische Strömungslehre**, 2005, ISBN 3-938616-33-4 [Nachdr. der Ausg. Stuttgart, Teubner, 1974, 2., überarb. und erw. Aufl.]

Band 3 Ludwig Prandtl, Albert Betz: **Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik**, 2010, ISBN 978-3-941875-75-3, ISSN 1863-1088 [Nachdr. der Ausg. Göttingen, Kaiser-Wilhelm-Inst. für Strömungsforschung, 1927]

Band 4 Ludwig Prandtl (Hg.): **Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen – I. Lieferung**, 2009, ISBN 978-3-941875-35-7, ISSN 1863-1088 [Nachdr. der Ausg. München, Berlin, Oldenbourg, 1921]

Band 5 Ludwig Prandtl (Hg.): **Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen – II. Lieferung**, 2009, ISBN 978-3-941875-36-4, ISSN 1863-1088 [Nachdr. der Ausg. München, Berlin, Oldenbourg, 1923]

Band 6 Ludwig Prandtl, Albert Betz (Hg.): **Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen – III. Lieferung**, 2009, ISBN 978-3-941875-41-8, ISSN 1863-1088 [Nachdr. der Ausg. München, Berlin, Oldenbourg, 1927]

Band 7 Ludwig Prandtl, Albert Betz (Hg.): **Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen – IV. Lieferung**, 2009, ISBN 978-3-941875-42-5, ISSN 1863-1088 [Nachdr. der Ausg. München, Berlin, Oldenbourg, 1932]

Band 8 Julius C. Rotta: **Turbulente Strömungen, Eine Einführung in die Theorie und ihre Anwendung**, 2010, ISBN 978-3-941875-74-6, ISSN 1863-1088 [Nachdr. der Ausg. Stuttgart, Teubner, 1972]

Band 9 Johanna Vogel-Prandtl: **Ludwig Prandtl – A Personal Biography Drawn from Memories and Correspondence**, 2014, ISBN 978-3-86395-160-3, ISSN 1863-1088 [einzig autoris. Übertr. ins Engl. von David A. Tigwell]

Band 10 Ludwig Prandtl: **Abriß der Strömungslehre**, 2017, ISBN 978-3-86395-271-6, ISSN 1863-1088 [Nachdr. der zweiten Aufl., Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn, 1935]

Mit der Berufung Ludwig Prandtls als Professor für Angewandte Mechanik wurde die kleine Universitätsstadt Göttingen im Jahr 1904 zur Wiege der modernen Strömungsmechanik und Aerodynamik. Prandtl begründete hier nicht nur mit der Aerodynamischen Versuchsanstalt (AVA) und dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung zwei Forschungseinrichtungen von Weltrang, sondern auch mit der so genannten „Göttinger Schule“ eine außergewöhnlich fruchtbare wissenschaftliche Denkweise, die sich durch eine eigentümliche Balance von physikalischer Intuition und mathematischer Exaktheit auszeichnet. Die wissenschaftliche Methode Prandtls und seiner Schüler hat ihren Niederschlag in zahlreichen Dissertationen, Monographien und Lehrbüchern gefunden, die mittlerweile als klassisch gelten und damit zum Grundbestand der Strömungslehre gehören. Doch viele dieser Publikationen sind seit langer Zeit nicht mehr verfügbar. Die Reihe „Göttinger Klassiker der Strömungsmechanik“ stellt deshalb ausgewählte Publikationen, die der Göttinger Schule um Ludwig Prandtl zuzurechnen sind oder in einem gewissen historischen Bezug dazu stehen, wieder zur Verfügung.

Anlässlich eines Vortrags bei der Physikertagung 1947 in Göttingen hat Ludwig Prandtl seinen speziellen Weg zur Lösung strömungsmechanischer Probleme dargelegt, dessen charakteristische Eigenart darin besteht, „[…] dass ich aber mir von den den Aufgaben zugrunde liegenden Dingen eine möglichst eingehende Anschauung zu verschaffen strebe und die Vorgänge zu verstehen suche. Die Gleichungen kommen erst später dran, wenn ich die Sache glaube verstanden zu haben […] Die vorerwähnte Art von Anschauung lässt sich durchaus erlernen […], sie erfordert freilich ein besonderes Training.“ Prandtls erstes Lehrbuch „Abriß der Strömungslehre“ ist nichts anderes als der erfolgreiche Versuch, dieses besondere Erkenntnisprinzip in eine leicht fassliche didaktische Form zu bringen.

GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT
GÖTTINGEN

ISBN: 978-3-86395-271-6
ISSN:1863-1088

Universitätsverlag Göttingen